This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

THE LIBRARY OF
THE UNIVERSITY OF MINNESOTA
OMNIBUS VINCULUM
COMMONE ARTIBUS

CLASS T506
BOOK R22t

WALDORF BINDERY COMPANY
LIBRARY BINDERS
ST. PAUL, MINN.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOLUME QUARANTESIMOQUINTO

1909-910

UNIVERSITY OF MINNESOTA LIBRARY

TORINO

VINCENZO BONA

Tipografo di S. M. e dei Reali Principi.

1910

Digitized by Google

UNIVERSITY OF
MINNESOTA
LIBRARY

Digitized by Google

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI STRANIERI E CORRISPONDENTI

AL 31 DICEMBRE 1909.

NB. — *La prima data è quella dell'elezione, la seconda quella del R. Decreto che approva l'elezione.*

PRESIDENTE

D'Ovidio (Enrico), Senatore del Regno, Dottore in Matematica, Professore ordinario di Algebra e Geometria analitica nella R. Università di Torino, incaricato di Geometria analitica e proiettiva e Direttore del R. Politecnico di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio ordinario non residente della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio dell'Accademia Pontaniana, delle Società matematiche di Parigi e Praga, Comm. ✱, e ⊛. — *Torino, Corso Sommeiller, 16.*

Rieletto alla carica il 17 marzo 1907 — 19 aprile 1907.

VICE-PRESIDENTE

Boselli S. E. (Paolo), P.° Segretario di Stato dell'Ordine Mauriziano e Cancelliere dell'Ordine della Corona d'Italia, Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza della R. Università di Genova, già Professore nella R. Università di Roma, Professore Onorario della R. Università di Bologna, e Socio corrispondente della Classe di scienze morali della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Vice-Presidente della R. Deputazione di Storia Patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio Corrispondente dell'Accademia dei Georgofili, Presidente della Società di Storia Patria di Savona, Socio onorario della Società Ligure di Storia Patria, Socio onorario dell'Accademia di Massa, Socio della R. Accademia di Agricoltura, Corrispondente dell'Accademia Dafnica di Acireale, Presidente Onorario della Società di Storia Patria degli Abruzzi in Aquila, Membro del Consiglio e della Giunta degli archivi, Presidente del Comitato Centrale della Società " Dante Alighieri „, Presidente del Consiglio di Amministrazione del R. Politecnico di Torino, Presidente del Consiglio Superiore della Marina Mer-

SEP 12 1912

116620

Digitized by Google

cantile, Membro del Consiglio del Contenzioso diplomatico, Deputato al Parlamento nazionale, Presidente del Consiglio provinciale di Torino, Gr. Cord. ✱ e ⊕, Gr. Cord. dell'Aquila Rossa di Prussia, dell'Ordine di Alberto di Sassonia, dell'Ord. di Bertoldo I di Zähringen (Baden), e dell'Ordine del Sole Levante del Giappone, Gr. Uffiz. O. di Leopoldo del Belgio, Uffiz. della Cor. di Pr., della L. d'O. di Francia, e C. O. della Concezione del Portogallo. — *Torino, Piazza Maria Teresa*, 3.

Rieletto alla carica il 17 marzo 1907 — 19 aprile 1907.

TESORIERE

Parona (Carlo Fabrizio), Dottore in Scienze naturali, Professore e Direttore del Museo di Geologia e di Paleontologia della R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio residente della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, e Corrispondente dell'I. R. Istituto Geologico di Vienna, Membro del R. Comitato Geologico, ecc., Cav. ⊕. — *Torino, Museo Geologico della R. Università, Palazzo Carignano.*

Eletto alla carica 9 giugno 1907 — 30 giugno 1907.

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Direttore

Naccari (Andrea), Dottore in Matematica, Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Torino, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania e dell'Accademia Pontaniana, Uffiz. ✱, Comm. ⊕. — *Torino, Via Sant'Anselmo, 6.*

Eletto alla carica il 15 dicembre 1907.

Segretario

Camerano (Lorenzo), Senatore del Regno, Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Professore di Anatomia comparata e di Zoologia, Direttore dei Musei relativi nella R. Università di Torino, Membro del Consiglio e della Giunta Superiore della Pubblica Istruzione, Rettore della R. Università di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro della Società Zoologica di Francia, Socio corrispondente del Museo Civico di Rovereto, della Società Scientifica del Cile, della Società Spagnuola di Storia naturale, Socio straniero della Società Zoologica di Londra, Socio onorario della Società scientifica del Messico, Socio onorario della Società zoologica italiana, ✱, Comm. ⊕. — *Torino, Museo Zoologico della R. Università, Palazzo Carignano.*

Rieletto alla carica il 14 aprile 1907 — 25 aprile 1907.

Digitized by Google

ACCADEMICI RESIDENTI

Salvadori (Conte Tommaso), Dottore in Medicina e Chirurgia, Vice-Direttore del Museo Zoologico della R. Università di Torino, Professore di Storia naturale nel R. Liceo Cavour di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, della Società Italiana di Scienze naturali, dell'Accademia Gioenia di Catania, Membro della Società Zoologica di Londra, dell'Accademia delle Scienze di Nuova York, della Società dei Naturalisti in Modena, della Società Reale delle Scienze di Liegi, della Reale Società delle Scienze naturali delle Indie Neerlandesi e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro effettivo della Società Imperiale dei Naturalisti di Mosca, Socio straniero della *British Ornithological Union*, Socio Straniero onorario del *Nuttall Ornithological Club*, Socio Straniero dell'*American Ornithologist's Union*, e Membro onorario della Società Ornitologica di Vienna, Membro ordinario della Società Ornitologica tedesca, Uffiz. ✠, Cav. dell'O. di S. Giacomo del merito scientifico, letterario ed artistico (Portogallo). — *Torino, Via Principe Tommaso, 17.*

29 Gennaio 1871 - 9 febbraio 1871. — Pensionato 21 marzo 1878.

D'Ovidio (Enrico), *predetto.*

29 Dicembre 1878 - 16 gennaio 1879. — Pensionato 28 novembre 1889.

Naccari (Andrea), *predetto.*

5 Dicembre 1880 - 23 dicembre 1880. — Pensionato 8 giugno 1893.

Mosso (Angelo), Senatore del Regno, Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Fisiologia nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze), della R. Accademia di Medicina di Torino, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, L. L. D. dell'Università di Worcester, Socio onorario della R. Accademia medica Gioenia di Scienze naturali di Catania, della R. Accademia medica di Roma, dell'Accademia di Genova, Socio dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina Germanica Naturae Curiosorum*, Membro onorario della Società imperiale dei medici di Vienna, della Società Reale delle Scienze mediche di Bruxelles, della Società fisico-medica di Erlangen, Socio straordinario della R. Accademia di Scienze di Svezia, Socio corrispondente della Società Reale di Napoli, Socio corrispondente della Società di Biologia di Parigi, ecc., Socio onorario della *Boston Society of Natural History,* Membro onorario dell'Accademia Imperiale di Medicina di Pietroburgo, Socio corrispondente dell'Accademia Reale di Medicina del Belgio, Socio straniero dell'Accademia medica di Parigi, Membro onorario della Società dei Naturalisti della Svizzera, Dottore *honoris causa* dell'Universita di Bruxelles, ✱, Comm. ✠, Cav. . — *Torino, Via Madama Cristina, 34.*

11 Dicembre 1881 - 25 dicembre 1881. — Pensionato 17 agosto 1894.

Digitized by Google

Spezia (Giorgio), Ingegnere, Professore di Mineralogia e Direttore del Museo mineralogico della R. Università di Torino, ✠. — *Torino, Corso Vinzaglio, 6.*

15 Giugno 1884 - 6 luglio 1884. — Pensionato 5 settembre 1895.

Camerano (Lorenzo), *predetto.*

10 Febbraio 1889 - 21 febbraio 1889. — Pensionato 8 ottobre 1898.

Segre (Corrado), Dottore in Matematica, Professore di Geometria superiore nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana delle Scienze (dei XL), Membro onorario della Società Filosofica di Cambridge, Socio straniero dell'Accademia delle Scienze del Belgio e di quella di Danimarca, Socio corrispondente della Società Fisico-Medica di Erlangen, dell'Accademia delle Scienze di Bologna, del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, ✠. — *Torino, Corso Vittorio Eman., 85.*

10 Gennaio 1889 - 21 febbraio 1889. — Pensionato 8 ottobre 1898.

Peano (Giuseppe), Dottore in Matematica, Professore di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino, Socio della " *Sociedad Cientifica* „ del Messico, Socio del Circolo Matematico di Palermo, della Società matematica di Kasan, della Società filosofica di Ginevra, corrispondente della R. Accademia dei Lincei, ✠. — *Torino, Via Barbaroux, 4.*

25 Gennaio 1891 - 5 febbraio 1891. — Pensionato 22 giugno 1899.

Jadanza (Nicodemo), Dottore in Matematica, Professore di Geodesia teoretica nella R. Università di Torino e di Geometria pratica nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri, Socio dell'Accademia Pontaniana di Napoli, del Circolo matematico di Palermo, dell'Accademia Dafnica di Acireale e della Società degli Ingegneri Civili di Lisbona, Membro effettivo della R. Commissione Geodetica italiana, Uff. ✠. — *Torino, Via Madama Cristina, 11.*

3 Febbraio 1895 - 17 febbraio 1895. — Pensionato 17 ottobre 1902.

Foà (Pio), Senatore del Regno, Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Anatomia Patologica nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto, ecc., ecc., ✠, Comm. ✠. — *Torino, Corso Valentino, 40.*

3 Febbraio 1895 - 17 febbraio 1895. — Pensionato 9 novembre 1902.

Guareschi (Icilio), Dottore in Scienze naturali, Professore e Direttore dell'Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologica nella R. Università di Torino, Direttore della Scuola di Farmacia, Socio della R. Accademia di Medicina di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena, Socio onorario della Società di Farmacia di Torino, Membro anziano del Consiglio Sanitario Provinciale, Cittadino Onorario di Crespellano (Bologna), Socio onorario dell'Associazione chimico-farm. toscana, Membro corrispondente dell'Accademia di Medicina di Parigi, Membro corrispondente della Società di Farmacia di Parigi, Socio della *Deutsche Gesellschaft b.*

Digitized by Google

Geschichte d. Medizin und Naturwissenschaften, Membro della Società Chimica di Berlino, della *Berliner Gesellschaft f. Gesch. d. Naturwiss.*, ecc., Comm. ⊛, ✕. — *Torino, Corso Valentino, 11.*

12 Gennaio 1896 - 2 febbraio 1896. — Pensionato 28 maggio 1903.

Guidi (Camillo), Ingegnere, Professore ordinario di Statica grafica e scienza delle costruzioni e Direttore dell'annesso Laboratorio sperimentale dei materiali da costruzione nel R. Politecnico in Torino, Uff. ✱ e ⊛. — *Torino, Corso Valentino, 7.*

31 Maggio 1896 - 11 giugno 1896. — Pensionato 11 giugno 1903.

Fileti (Michele), Dottore in Chimica, Professore ordinario di Chimica generale, ⊛. — *Torino, Via Bidone, 36.*

31 Maggio 1896 - 11 giugno 1896. — Pensionato 10 marzo 1904.

Parona (Carlo Fabrizio), *predetto.*

15 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 21 gennaio 1909.

Mattirolo (Oreste), Dottore in Medicina, Chirurgia e Scienze naturali, Professore ordinario di Botanica e Direttore dell'Istituto botanico della R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accademia di Medicina, Presidente della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, dell'Accademia delle Scienze del R. Istituto di Bologna, della Società Imperiale di Scienze naturali di Mosca, della *Royal Botanical Society* di Edinburgh, della Società Veneto-Trentina, ecc., ⊛. — *Torino, Orto Botanico della R. Università (al Valentino).*

10 Marzo 1901 - 16 marzo 1901.

Grassi (Guido), Professore ordinario di Elettrotecnica e Direttore della scuola Galileo Ferraris nel R. Politecnico di Torino, Socio ordinario della R. Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli, dell'Accademia Pontaniana e del R. Istituto d'incoraggiamento di Napoli, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Comm. ⊛. — *Torino, Via Cernaia, 40.*

9 Febbraio 1902 - 23 febbraio 1902.

Somigliana (nob. Carlo), Dottore in Matematiche, Professore ordinario di Fisica matematica e incaricato di meccanica razionale nella R. Università di Torino, rappresentante dell'Accademia nel Consiglio amministrativo del R. Politecnico di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, e corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. — *Corso Vinzaglio, 10.*

5 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

Fusari (Romeo), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore ordinario di Anatomia umana, descrittiva e topografica e Direttore dell'Istituto anatomico della R. Università di Torino, Socio dell'Accademia di Medicina di Torino, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Fondatore della Società medico-chirurgica di Pavia, Onorario dell'Accademia delle Scienze mediche e naturali di Ferrara, ⊛. — *Via Baretti, 45.*

5 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

Digitized by Google

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Cannizzaro (Stanislao), Senatore del Regno, Professore di Chimica generale nella R. Università di Roma, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei e della Società Reale di Napoli, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Corrispondente dell'Istituto di Francia, dell'Accademia delle Scienze di Berlino, di Vienna e di Pietroburgo, Associato dell'Accademia Reale delle Scienze del Belgio, Socio straniero della R. Accademia delle Scienze di Baviera, della Società Reale di Londra, della Società Reale di Edimburgo e della Società letteraria e filosofica di Manchester, Socio onorario della Società chimica tedesca, di Londra e Americana, Comm. ✱, Gr. Cr. ⊛, ⊛. — *Roma, Istituto chimico, Via Panisperna, 89 B.*

3 Luglio 1864 - 11 luglio 1864.

Schiaparelli (Giovanni), Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della R. Accademia dei Lincei, dell'Accademia Reale di Napoli e dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze), delle Accademie di Monaco, di Vienna, di Berlino, di Pietroburgo, di Stoccolma, di Upsala, di Cracovia, della Società de' Naturalisti di Mosca, della Società Reale e della Società astronomica di Londra, delle Società filosofiche di Filadelfia e di Manchester, e di altre Società scientifiche nazionali e straniere, Gr. Cord. ⊛, Comm. ✱, ⊛. — *Milano, Via Fate Bene Fratelli, 7.*

16 Gennaio 1870 - 30 gennaio 1870.

Volterra (Vito), Senatore del Regno, Dottore in Fisica, Dottore onorario in Matematiche della Università Fridericiana di Christiania, Dottore onorario in scienze della Università di Cambridge, Dottore onorario in Filosofia della Università di Stoekholm, Dottore onorario in Fisica della Clark University di Worcester, Mass, Professore di Fisica matematica, incaricato di Meccanica celeste e Preside della Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali nella R. Università di Roma.uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Accademico corrispondente della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio onorario dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania, Membro nazionale della Società degli Spettroscopisti italiani, Socio corrispondente nella Sezione di Geometria dell'Accademia delle Scienze di Parigi, Membro straniero nella classe di matematica pura della Reale Accademia Svedese delle scienze, Socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Gottinga, Membro corrispondente dell'Accademia Imperiale delle scienze di Pietroburgo, Socio corrispondente della Società medico-fisica di Erlangen,

Digitized by Google

Membro dell'Accademia Imperiale Leopoldina Carolina di Halle, Membro onorario della Società Matematica di Londra, Membro onorario della Società matematica di Kharkow, Membro onorario della Società matematica di Calcutta e Membro onorario della Società di Scienze fisiche e naturali di Bordeaux, ⚜, ⚜. — *Roma, Via in Lucina, 17.*

3 Febbraio 1895 - 11 febbraio 1895.

Fergola (Emanuele), Senatore del Regno, Direttore del R. Osservatorio astronomico di Capodimonte, Professore emerito nella R. Università di Napoli, Socio ordinario residente della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, Membro della Società italiana dei XL, Socio della R. Accademia dei Lincei e dell'Accademia Pontaniana, Socio ordinario del R. Istituto d'incoraggiamento alle Scienze naturali, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto, Comm. ✱, Gr. Uffiz. ⚜. — *Napoli, Regio Osservatorio di Capodimonte.*

12 Gennaio 1896 - 2 febbraio 1896.

Bianchi (Luigi), Professore di Geometria analitica nella R. Università di Pisa, Socio ordinario della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL; Socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere in Milano, ✱, ⚜. — *Pisa, Via Manzoni, 3.*

13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Dini (Ulisse), Senatore del Regno, Professore di Analisi Superiore nella R. Università di Pisa, Direttore della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Socio della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana detta dei XL, Corrispondente dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Socio onorario della R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Modena, dell'Accademia di scienze naturali di Catania e della R. Accademia di scienze, lettere ed arti degli Zelanti di Acireale, Membro del Consiglio Direttivo del Circolo matematico di Palermo, Socio della Società italiana per il progresso delle scienze (Roma), della R. Società delle scienze di Gottinga, Membro straniero della *London mathemat. Society*, Dottore onorario dell'Università di Christiania e di Glasgow, Vice presidente del Consiglio Superiore e della Giunta di Pubblica Istruzione, Uff. ✱, Cav. ⚜, ⚜.

13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Golgi (Camillo), Senatore del Regno, Membro del Consiglio superiore di Sanità, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei di Roma, Dottore in Scienze *ad honorem* dell'Università di Cambridge, Membro onorario dell'Università Imperiale di Charkoff, uno dei XL della Società italiana delle Scienze, Membro della Società per la Medicina interna di Berlino, Membro onorario della Imp. Accademia Medica di Pietroburgo, della Società di Psichiatria e Neurologia di Vienna, Socio corrispondente onorario della *Neurological Society* di Londra, Membro corrispondente della *Société de Biologie* di Parigi, Membro dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina*, Socio della R. Società delle Scienze di Gottinga e delle Società Fisico-mediche di Würzburg, di Erlangen, di Gand, Membro

Digitized by Google

della Società Anatomica, Socio nazionale della R. Accademia delle Scienze di Bologna, Socio corrispondente dell'Accademia di Medicina di Torino, Socio onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, Socio corrispondente dell'Accademia Medico-fisica Fiorentina, della R. Accademia delle Scienze mediche di Palermo, della Società Medico-chirurgica di Bologna, Socio onorario della R. Accademia Medica di Roma, Socio onorario della R. Accademia Medico-chirurgica di Genova, Socio corrispondente dell'Accademia Fisiocritica di Siena, dell'Accademia Medico-chirurgica di Perugia, della *Societas medicorum Svecana* di Stoccolma, Membro onorario dell'*American Neurological Association* di New-York, Socio onorario della *Royal Microscopical Society* di Londra, Membro corrispondente della R. Accademia di Medicina del Belgio, Membro onorario della Società freniatrica italiana e dell'Associazione Medico-Lombarda, Socio onorario del Comizio Agrario di Pavia, Professore ordinario di Patologia generale e di Istologia nella R. Università di Pavia, Membro effettivo della Società Italiana d'Igiene e dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Membro onorario dell'Università di Dublino, Socio corrispondente della Società medica di Batavia, Membro straniero dell'Accademia di Medicina di Parigi, Membro onorario dell'Imperiale Società degli alienisti e neurologi di Kazan, Socio emerito della R. Accademia medico-chirurgica di Napoli, Socio corrispondente dell'Imp. Accademia delle Scienze di Vienna, Socio onorario della R. Società dei Medici in Vienna, Cav. ✠, ▬, Comm. ✱.

13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Lorenzoni (Giuseppe), Dottore negli Studi d'Ingegnere civile ed Architetto, Professore di Astronomia della R. Università e Direttore dell'Osservatorio astronomico di Padova, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, uno dei XL della Società italiana delle Scienze, Socio effettivo del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze ed Arti di Modena, Membro della Società Imperiale dei Naturalisti di Mosca, ✱, Comm. ✠. — *Padova, Osservatorio astronomico.*

5 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

ACCADEMICI STRANIERI

Klein (Felice), Professore nell'Università di Gottinga. — 10 Gennaio 1897 - 24 gennaio 1897.

Haeckel (Ernesto), Professore nella Università di Jena. — 13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Darboux (Giovanni Gastone), Membro dell'Istituto di Francia (Parigi). — 14 Giugno 1903 - 28 giugno 1903.

Poincaré (Giulio Enrico), Membro dell'Istituto di Francia (Parigi). — 14 Giugno 1903 - 28 giugno 1903.

Helmert (Federico Roberto), Direttore del R. Istituto Geodetico di Prussia, Potsdam. — 14 Giugno 1903 - 28 giugno 1903.

Hoff (Giacomo Enrico van 't), Professore nella Università di Berlino. — 5 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

Digitized by Google

CORRISPONDENTI

Sezione di Matematiche pure.

Tardy (Placido), Professore emerito della R. Università di Genova (Firenze). — 16 Luglio 1864.

Cantor (Maurizio), Professore nell'Università di Heidelberg. — 25 Giugno 1876.

Schwarz (Ermanno A.), Professore nella Università di Berlino. — 19 Dicembre 1880.

Bertini (Eugenio), Professore nella Regia Università di Pisa. — 9 Marzo 1890.

Noether (Massimiliano), Professore nell' Università di Erlangen. — 3 Dicembre 1893.

Jordan (Camillo), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto (Parigi). — 12 Gennaio 1896.

Mittag-Leffler (Gustavo), Professore a Stoccolma. — 12 Gennaio 1896.

Picard (Emilio), Professore alla Sorbonne, Membro dell'Istituto di Francia, Parigi. — 10 Gennaio 1897.

Castelnuovo (Guido), Prof. nella R. Università di Roma. — 17 Aprile 1898.

Veronese (Giuseppe), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Padova. — 17 Aprile 1898.

Zeuthen (Gerolamo Giorgio), Professore nella Università di Copenhagen. — 14 Giugno 1903.

Hilbert (Davide), Prof. nell'Università di Göttingen. — 14 Giugno 1903.

Sezione di Matematiche applicate, Astronomia e scienza dell'ingegnere civile e militare.

Ewing (Giovanni Alfredo), Professore nell' Università di Cambridge. — 27 Maggio 1894.

Celoria (Giovanni), Astronomo all'Osservatorio di Milano. — 12 Gennaio 1896.

Pizzetti (Paolo), Professore nella R. Università di Pisa. — 14 Giugno 1903.

Sezione di Fisica generale e sperimentale.

Blaserna (Pietro), Senatore del Regno, Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Roma. — 30 Novembre 1873.

Kohlrausch (Federico), Presidente dell'Istituto Fisico-Tecnico in Marburg (Bezirk Cassel). — 2 Gennaio 1881.

Reiti (Antonio), Professore nell'Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. — 12 Marzo 1882.

Digitized by Google

Righi (Augusto), Senatore del Regno, Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Bologna. — 14 Dicembre 1884.

Lippmann (Gabriele), dell'Istituto di Francia (Parigi). — 15 Maggio 1892.

Rayleigh (Lord Giovanni Guglielmo), Professore nella *Royal Institution* di Londra. — 3 Febbraio 1895.

Thomson (Giuseppe Giovanni), Professore nell'Università di Cambridge. — 12 Gennaio 1896.

Pacinotti (Antonio), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Pisa. — 17 Aprile 1898.

Röntgen (Guglielmo Corrado), Professore nell'Università di München. — 14 Giugno 1903.

Lorentz (Enrico), Professore nell'Università di Leiden. — 14 Giugno 1903.

Sezione di Chimica generale ed applicata.

Paternò (Emanuele), Senatore del Regno, Professore di Chimica applicata nella R. Università di Roma. — 2 Gennaio 1881.

Körner (Guglielmo), Professore di Chimica organica nella R. Scuola superiore d'Agricoltura in Milano. — 2 Gennaio 1881.

Baeyer (Adolfo von), Professore nell'Università di Monaco (Baviera). — 25 Gennaio 1885.

Lieben (Adolfo), Professore nell'Università di Vienna. — 15 Maggio 1892.

Fischer (Emilio), Professore nell'Università di Berlino. — 24 Gennaio 1897.

Ramsay (Guglielmo), Professore nell'Università di Londra. — 24 Gennaio 1897.

Schiff (Ugo), Professore nel R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. — 28 Gennaio 1900.

Dewar (Giacomo), Professore nell'Università di Cambridge. — 14 Giugno 1903.

Ciamician (Giacomo), Professore nell'Università di Bologna. — 14 Giugno 1903.

Ostwald (Dr. Guglielmo), Gross Bothen, Kgr. Sachsen, Landhaus Energie.

Arrhenius (Ivante Augusto), Direttore e Professore dell'Istituto Fisico dell'Università di Stoccolma. — 5 Marzo 1905.

Nernst (Walter), Professore di Chimica fisica nell'Università di Berlino. — 5 Marzo 1905.

Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia.

Strüver (Giovanni), Professore di Mineralogia nella R. Università di Roma. — 30 Novembre 1873.

Rosenbusch (Enrico), Professore nell'Univ. di Heidelberg. — 25 Giugno 1876.

Zirkel (Ferdinando), Professore nell'Università di Bonn. — 16 Gennaio 1881.

Capellini (Giovanni), Professore nella R. Univ. di Bologna. — 12 Marzo 1882.

Tschermak (Gustavo), Professore nell'Università di Vienna. — 8 Febbraio 1885.

Geikie (Arcibaldo), Direttore del Museo di Geologia pratica (Londra). — 3 Dicembre 1893.

Groth (Paolo Enrico), Professore nell'Università di Monaco. — 13 Febbraio 1898.

Taramelli (Torquato), Professore nella R. Univ. di Pavia. — 28 Gennaio 1900.

Liebisch (Teodoro), Professore nell'Università di Gottinga. — 28 Gennaio 1900.

Digitized by Google

Bassani (Francesco), Professore nella R. Univ. di Napoli. — 14 Giugno 1903.
Issel (Arturo), Professore nella R. Università di Genova. — 14 Giugno 1903.
Levy (Michele), dell'Istituto di Francia, Professore di Mineralogia all'Università di Parigi. — 5 Marzo 1905.
Goldschmidt (Viktor), Professore di Mineralogia nell'Università di Heidelberga. — 5 Marzo 1905.
Suess (Francesco Edoardo), Professore di Geologia nell'Imperiale Università di Vienna. — 5 Marzo 1905.
Haug (Emilio), Prof. di Geologia nell'Università di Parigi. — 5 Marzo 1905.

Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale.

Ardissone (Francesco), Professore di Botanica nella R. Scuola superiore di Agricoltura in Milano. — 16 Gennaio 1881.
Saccardo (Andrea), Professore di Botanica nella R. Università di Padova. — 8 Febbraio 1885.
Hooker (Giuseppe **Dalton**), Direttore del Giardino Reale di Kew (Londra). — 8 Febbraio 1885.
Pirotta (Romualdo), Professore nella R. Univ. di Roma. — 15 Maggio 1892.
Strasburger (Edoardo), Professore nell'Univ. di Bonn. — 3 Dicembre 1893.
Goebel (Carlo), Professore nell'Università di Monaco. — 13 Febbraio 1898.
Penzig (Ottone), Professore nell'Università di Genova. — 13 Febbraio 1898.
Schwendener (Simone), Professore nell'Univ. di Berlino. — 13 Febbraio 1898.
Wiesner (Giulio), Professore nella I. R. Univ. di Vienna. — 14 Giugno 1903.
Klebs (Giorgio), Professore nell'Università di Halle. — 14 Giugno 1903.
Belli (Saverio), Professore nella R. Università di Cagliari. — 14 Giugno 1903.

Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata.

Sclater (Filippo **Lutley**), Segretario della Società Zoologica di Londra. — 25 Gennaio 1885.
Chauveau (G. B. Augusto), Membro dell'Istituto di Francia, Professore alla Scuola di Medicina di Parigi. — 1° Dicembre 1889.
Foster (Michele), Professore nell'Università di Cambridge. — 1° Dicembre 1889.
Waldeyer (Guglielmo), Professore nell'Univ. di Berlino. — 1° Dicembre 1889.
Guenther (Alberto), Londra. — 3 Dicembre 1893.
Roux (Guglielmo), Professore nell'Università di Halle. — 13 Febbraio 1898.
Minot (Carlo Sedgwick), Professore nell' "Harvard Medical School" di Boston Mass. (S. U. A.). — 28 Gennaio 1900.
Boulenger (Giorgio Alberto), Assistente al Museo di Storia Naturale di Londra. — 28 Gennaio 1900.
Marchand (Felice), Professore nell'Università di Leipzig. — 14 Giugno 1903.
Weismann (Augusto), Professore di Zoologia nell'Università di Freiburg i. Br. (Baden). — 5 Marzo 1905.
Lankester (Edwin Ray), Direttore del *British Museum of Natural History*. — 5 Marzo 1905.
Dastre (A.), Profess. di Fisiologia nell'Università di Parigi. — 5 Marzo 1905.

Digitized by Google

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore.

Manno (Barone D. Antonio), Membro e Segretario della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Membro del Consiglio degli Archivi e dell'Istituto storico italiano, Commissario di S. M. presso la Consulta araldica, Dottore *honoris causa* della R. Università di Tübingen, Gr. Uffiz. ✱ e Gr. Cord. ✠, Balì Gr. Cr. d'on. e devoz. del S. M. O. di Malta, decorato di Ordini stranieri. — *Torino, Via Ospedale, 19.*

Eletto alla carica il 17 marzo 1907 - 19 aprile 1907.

Segretario.

De Sanctis (Gaetano), Dottore in Lettere, Professore di Storia antica nella R. Università di Torino, Socio ordinario della Società Archeologica italiana e della Pontificia Accademia romana di Archeologia, ✠. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 44.*

Eletto alla carica il 17 marzo 1907 - 19 aprile 1907.

ACCADEMICI RESIDENTI

Rossi (Francesco), Dottore in Filosofia, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei in Roma, ✠. — *Torino, Via Gioberti, 30.*

10 Dicembre 1876 - 28 dicembre 1876. — Pensionato 1° agosto 1884.

Manno (Barone D. Antonio), *predetto.*

17 Giugno 1877 - 11 luglio 1877. — Pensionato 28 febbraio 1886.

Carle (Giuseppe), Senatore del Regno, Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza e Professore di Filosofia del Diritto nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Uff. ✱, Comm. ✠. — *Torino, Piazza Statuto, 15.*

7 Dicembre 1879 - 1° gennaio 1880. — Pensionato 4 agosto 1892.

Graf (Arturo), Professore di Letteratura italiana nella R. Università di Torino, Membro della Società Romana di Storia patria, Socio onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, dell'Ateneo di Brescia, della R. Accad. dei Lincei, ecc., Comm. ✱ e ✠. — *Torino, Via Bricherasio, 11.*

15 Gennaio 1888 - 2 febbraio 1888. — Pensionato 20 maggio 1897.

Digitized by Google

Boselli (Paolo), *predetto.*

15 Gennaio 1888 - 2 febbraio 1888. — Pensionato 13 ottobre 1897.

Cipolla (Conte Carlo), Dottore in Filosofia, Professore emerito nella R. Università di Torino, Prof. di Storia moderna nel R. Istituto di Studi Superiori in Firenze, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio effettivo della R. Deputazione Veneta di Storia patria, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Monaco (Baviera), del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti e della R. Deputazione Storica toscana, Comm. ☞. — *Firenze, Via Lorenzo il Magnifico, 8.*

15 Febbraio 1891 - 15 marzo 1891. — Pensionato 4 marzo 1900.

Allievo (Giuseppe), Dottore aggregato in Filosofia, Professore di Pedagogia e Antropologia nella R. Università di Torino, Socio onorario della R. Accademia delle Scienze di Palermo, dell'Accademia di S. Anselmo di Aosta, dell'Accademia Dafnica di Acireale, della Regia Imperiale Accademia degli Agiati di Rovereto, dell'Arcadia, della R. Accademia di Lucca, dell'Accademia degli Zelanti di Acireale e dell'Accademia cattolica panormitana, Cav. ✱, Gr. Uff. ☞. — *Torino, Piazza Statuto, 18.*

13 Gennaio 1895 - 3 febbraio 1895. — Pensionato 20 giugno 1901.

Renier (Rodolfo), Dottore in Lettere ed in Filosofia, Professore di Storia comparata delle Letterature neo-latine nella R. Università di Torino, Socio attivo della R. Commissione dei testi di lingua; Socio non residente dell'I. R. Accademia degli Agiati di Rovereto; Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Deputazione Veneta di Storia patria, di quella per le Marche, di quella per l'Umbria, di quella per l'Emilia e di quella per le Antiche Provincie e la Lombardia, della Società storica abruzzese e della Commissione di Storia patria e di Arti belle della Mirandola, della R. Accademia Virgiliana di Mantova, dell'Accademia di Verona, della R. Accademia di Padova, dell'Ateneo Veneto e di quello di Brescia; Membro della Società storica lombarda e della Società Dantesca italiana; Socio onorario dell'Accademia Etrusca di Cortona, della R. Accademia di scienze e lettere di Palermo, dell'Accademia Cosentina e dell'Accademia Dafnica di Acireale, Uffiz. ✱, Comm. ☞. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 90.*

8 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 30 ottobre 1906.

Pizzi (Nobile Italo), Dottore in Lettere, Professore di Persiano e Sanscrito nella R. Università di Torino, Socio corrispondente della Società Colombaria di Firenze, Dottore onorario dell'Università di Lovanio, Socio corrispondente dell'Ateneo Veneto, dell'Accademia Petrarchesca di Arezzo, dell'Accademia Dafnica di Acireale, dell'Accademia dell'Arcadia di Roma, ✱, ☞. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 16.*

8 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 16 giugno 1907.

Chironi (Dott. Giampietro), Senatore del Regno, Professore ordinario di Diritto Civile nella R. Università di Torino, Direttore della R. Scuola superiore di studi applicati al Commercio in Torino, Dottore aggregato

Digitized by Google

della Facoltà di Giurisprudenza nella R. Università di Cagliari, Membro del Consiglio superiore dell'Istruzione pubblica, del Consiglio superiore per l'Istruzione commerciale, agricola, industriale, della Commissione Reale per la riforma del Diritto privato, Socio corrispondente dell'Accademia di Legislazione di Tolosa (Francia), dell'Associazione internazionale di Berlino per lo studio del Diritto comparato, dell'Accademia Americana di Scienze sociali e politiche, ✱. Comm. 🏛. — *Torino, Via Monte di Pietà, 26.*

20 Maggio 1900 - 31 maggio 1900.

De Sanctis (Gaetano), *predetto.*

21 Giugno 1903 - 8 luglio 1903.

Ruffini (Francesco), Dottore in Leggi, Membro corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Professore di diritto ecclesiastico, ✱, Comm. 🏛. — *Torino, Via Principe Amedeo, 22.*

21 Giugno 1903 - 8 luglio 1903.

Stampini (Ettore), Dottore in Lettere ed in Filosofia, Professore ordinario di Letteratura latina, Preside della Facoltà di Filosofia e Lettere nella R. Università di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia Peloritana, dell'Ateneo di Brescia, e della Reale Accademia Virgiliana di scienze, lettere ed arti di Mantova, Decorato della Medaglia del Merito Civile di 1ª Classe della Repubblica di S. Marino, ✱, Comm. 🏛. — *Piazza Vittorio Emanuele I, 10.*

20 Maggio 1906 - 9 giugno 1906.

D'Ercole (Pasquale), Dottore in Filosofia, Professore di Filosofia teoretica nella R. Università di Torino, Membro della Società Filosofica di Berlino, Socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze morali e politiche di Napoli, Uff. ✱, Comm. 🏛. — *Corso Siccardi, 26.*

17 Febbraio 1907 - 19 Aprile 1907.

Brondi (Vittorio), Dottore in Legge, Professore di Diritto amministrativo e Scienza dell'Amministrazione nella R. Università di Torino, Membro del Consiglio Superiore di assistenza e beneficenza pubblica, Socio corrispondente onorario del Circolo di Studi sociali di Firenze, ✱, Comm. 🏛. — *Torino, Via Montebello, 21.*

17 Febbraio 1907 - 19 Aprile 1907.

Sforza (Nob. Giovanni), Vice-Presidente della R. Deputazione di Storia patria di Modena, per la Sotto-Sezione di Massa e Carrara, Socio effettivo di quelle delle antiche Provincie e della Lombardia, di Parma e Piacenza e della Toscana, Corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, e della Società Ligure di Storia patria, Socio ordinario non residente della R. Accademia Lucchese, Socio onorario della R. Accademia di Belle Arti di Carrara, Membro d'onore dell'*Académie Chablaisienne* di Thonon-les-Bains, Membro aggregato dell'*Académie des Sciences, Belles Lettres et Arts de Savoie*, Socio della R. Commissione per i testi di lingua, Membro della Commissione Araldica Piemontese,

Digitized by Google

della Società di Storia patria di Vignola, della Commissione municipale di Storia patria e belle arti della Mirandola, della Commissione senese di Storia patria e della Società storica di Carpi, Corrispondente della R. Accademia Valdarnese del Poggio in Montevarchi, della Società Georgica di Treia e della Colombaria di Firenze, ecc., ecc., Presidente onorario della R. Accademia dei Rinnovati di Massa, Direttore del R. Archivio di Stato di Torino, Gr. Uff. dell'Ordine del Medjidiè di Turchia, Uff. ✱ e Comm.. ⛁. — *Via Giusti, 4.*

17 Febbraio 1907 - 19 aprile 1907,

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Villari (Pasquale), Senatore del Regno, Presidente dell'Istituto Storico di Roma, Professore di Propedeutica Storica e Presidente della Sezione di Filosofia e Lettere nell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio residente della R. Accademia della Crusca, Presidente della R. Accademia dei Lincei, Socio nazionale della R. Accademia di Napoli, della R. Accademia dei Georgofili, della Pontaniana di Napoli, Presidente della R. Deputazione di Storia Patria per la Toscana, Socio di quella per le provincie di Romagna, Socio straordinario del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia di Baviera, Socio straniero dell'Accademia di Berlino, dell'Accademia di Scienze di Gottinga, della R. Accademia Ungherese, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Scienze morali e politiche), Dott. on. in Legge della Università di Edimburgo, di Halle, Dott. on. in Filosofia dell'Università di Budapest, Professore emerito della R. Univers. di Pisa, Gr. Uffiz. ✱ e Gr. Cord. ⛁, Cav. ⛁, Cav. del Merito di Prussia, ecc.

16 Marzo 1890 - 30 marzo 1890.

Comparetti (Domenico), Senatore del Regno, Professore emerito dell'Università di Pisa e dell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Socio corrispondente dell'Accademia della Crusca, del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto, Membro della Società Reale pei testi di lingua, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) e corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco, di Vienna, di Copenhagen e di Pietroburgo, Dottore *ad honorem* dell'Università di Oxford e di Cracovia, Uff. ✱, Comm. ⛁, Cav. ⛁. — *Firenze, Via Lamarmora, 20.*

20 Marzo 1892 - 26 marzo 1892.

D'Ancona (Alessandro), Senatore del Regno, già Professore di Letteratura italiana nella R. Università e già Direttore della Scuola normale supe-

Digitized by Google

riore in Pisa, Membro della Deputazione di Storia patria per la Toscana, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Académie des Inscriptions et Belles Lettres), della R. Accademia di Copenhagen, dell'Accademia della Crusca, del R. Istit. Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto, della R. Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti di Napoli e della R. Accademia di Lucca, Cav. della Legione d'Onore, Cav. ⚜, Gr. Uff. ❋, Comm. ⛁. — *Pisa, Lungarno Mediceo, Palazzo Mediceo.*

20 Febbraio 1898 - 3 marzo 1898.

Savio (Sacerdote Fedele), Professore di Storia ecclesiastica nella Pontificia Università Gregoriana, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio della Società Storica Lombarda. — *Roma, Via del Seminario, 120.*

20 Maggio 1900 - 31 maggio 1900.

Scialoja (Vittorio), Senatore del Regno, Dottore in Leggi, Professore ordinario di Diritto romano nella R. Università di Roma, Professore onorario della Università di Camerino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei e della R. Accademia di Napoli, di Bologna, di Modena e di Messina, Socio onorario della R. Accademia di Palermo, ecc., Comm. ❋ e ⛁. — *Roma, Piazza Grazioli, 5.*

29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Rajna (Pio), Dottore in Lettere, Dottore " honoris causa " dell'Università di Giessen, Professore ordinario di lingue e letterature neo-latine nel R. Istituto di Studi superiori di Firenze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Accademico residente della Crusca, Socio Urbano della Società Colombaria, Socio onorario della R. Accademia di Padova, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della Società Reale di Napoli, della Società Reale di Scienze e Lettere di Göteborg, dell'Accademia R. Lucchese e della R. Deputazione di Storia Patria per la Toscana, ⚜, Uff. ❋, Comm. ⛁. — *Firenze, Piazza d'Azeglio, 13.*

29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Kerbaker (Michele), Dottore in lettere, Professore di Storia comparata delle lingue classiche e incaricato di Sanscrito nella R. Università di Napoli, Socio ordinario della R. Accademia dei Lincei, Socio residente della Società Reale di Napoli, della R. Accademia Pontaniana, Membro della Società Asiatica italiana di Firenze, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Comm. ❋ e ⛁. — *Napoli, Vomero, Via Scarlatti, 60.*

26 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

Guidi (Ignazio), Dottore, Professore di Ebraico e di Lingue semitiche nella R. Università di Roma, Socio e Segretario della Classe di scienze morali, storiche e filologiche della R. Accademia dei Lincei, ⚜, Uff. ❋, ⛁, C. O. St. P. di Svezia. — *Roma, Botteghe Oscure, 24.*

12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.

Digitized by Google

Tocco (Felice), Professore nel R. Istituto di Studi superiori e di perfezionamento, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio ordinario non residente della R. Accademia di Scienze morali-politiche di Napoli, Socio corrispondente dell'Istituto Veneto, Socio ordinario della Colombaria di Firenze e corrispondente della R. Deputazione di Storia patria per la Toscana, Uff. ✱.
12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.

Pigorini (Luigi), Direttore dei Musei Preistorico e Kircheriano, Professore nella R. Università di Roma. Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei. — *Via del Collegio Romano, 26.*
12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.

ACCADEMICI STRANIERI

Meyer (Paolo), Professore nel Collegio di Francia, Direttore dell'*École des Chartes* (Parigi). — 4 Febbraio 1883 - 15 febbraio 1883.

Tobler (Adolfo), Professore nell'Università di Berlino. — 8 Maggio 1891 - 26 maggio 1891.

Maspero (Gastone), Professore nel Collegio di Francia (Parigi). — 26 Febbraio 1893 - 16 marzo 1893.

Brugmann (Carlo), Professore nell'Università di Lipsia. — 31 Gennaio 1897 - 14 febbraio 1897.

Bréal (Michele Giulio Alfredo), Membro dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) (Parigi). — 29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Wundt (Guglielmo), Professore nell'Università di Lipsia. — 29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Foerster (Wendelin), Professore nell'Università di Bonn, Comm. ✱. — 12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.

Duchesne (Luigi), Direttore della Scuola Francese in Roma, Membro dell'Istituto di Francia. — 12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.

Saleilles (Raimondo), Professore nell'Università di Parigi. — 12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.

Jellinek (Giorgio), Prof. nell'Università di Heidelberg. — 12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.

Digitized by Google

CORRISPONDENTI

Sezione di Scienze Filosofiche.

Bonatelli (Francesco), Professore nella R. Università di Padova. — 15 Febbraio 1882.
Pinloche (Augusto), Prof. nel Liceo Carlomagno di Parigi. — 15 Marzo 1896.
Chiappelli (Alessandro), Prof. nella R. Università di Napoli. — 15 Marzo 1896.
Masci (Filippo), Professore nella R. Università di Napoli. — 14 Giugno 1903.
Zuccante (Giuseppe), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 31 Maggio 1908.
Ardigò (Roberto), Professore nella R. Università di Padova. — Id. id.

Sezione di Scienze Giuridiche e Sociali.

Schupfer (Francesco), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 14 Marzo 1886.
Gabba (Carlo Francesco), Prof. nella R. Univ. di Pisa. — 3 Marzo 1889.
Buonamici (Francesco), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Pisa. — 16 Marzo 1890.
Dareste (Rodolfo), dell'Istituto di Francia (Parigi). — 26 Febbraio 1893.
Bonfante (Pietro), Prof. nella R. Università di Pavia. — 21 Giugno 1903.
Toniolo (Giuseppe), Prof. nella R. Università di Pisa. — 10 Giugno 1906.
Brandileone (Francesco), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Brini (Giuseppe), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Fadda (Carlo), Prof. nella R. Università di Napoli. — Id. id.
Filomusi-Guelfi (Francesco), Prof. nella R. Università di Roma. — Id. id.
Polacco (Vittorio), Prof. nella R. Università di Padova. — Id. id.
Stoppato (Alessandro), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Simoncelli (Vincenzo), Prof. nella R. Università di Roma. — Id. id.

Sezione di Scienze storiche.

Birch (Walter de **Gray**), del Museo Britannico di Londra. — 14 Marzo 1886.
Chevalier (Canonico Ulisse), Romans. — 26 Febbraio 1893.
Bryce (Giacomo), Londra. — 15 Marzo 1896.
Patetta (Federico), Prof. nella R. Università di Torino. — 15 Marzo 1896.
Gloria (Andrea), Prof. nella R. Università di Padova. — 21 Giugno 1903.
Venturi (Adolfo), Professore nella R. Università di Roma. — 31 Maggio 1908.
Luzio (Alessandro), Direttore del R. Archivio di Stato in Mantova. — Id. id.

Sezione di Archeologia.

Lattes (Elia), Membro del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano). — 14 Marzo 1886.
Poggi (Vittorio), Bibliotecario e Archivista civico a Savona. — 2 Gennaio 1887.

Digitized by Google

Palma di Cesnola (Cav. Alessandro), Membro della Società degli Antiquari di Londra (Firenze). — 3 Marzo 1889.
Mowat (Roberto), Membro della Società degli Antiquari di Francia (Parigi). — 16 Marzo 1890.
Barnabei (Felice), Roma. — 28 Aprile 1895.
Gatti (Giuseppe), Roma. — 15 Marzo 1896.
Orsi (Paolo), Professore, Direttore del Museo Archeologico di Siracusa. — 31 Maggio 1908.
Patroni (Giovanni), Professore nella R. Università di Pavia. — Id. id.

Sezione di Geografia ed Etnografia.

Dalla Vedova (Giuseppe), Professore nella R. Università di Roma. — 28 Aprile 1895.
Porena (Filippo), Professore nella R. Università di Napoli. — 21 Giugno 1903.
Bertacchi (Cosimo), Professore nella R. Università di Palermo. — Id. id.

Sezione di Linguistica e Filologia orientale.

Sourindro Mohun Tagore (Calcutta). — 18 Gennaio 1880.
Marre (Aristide), Vaucresson (Francia). — 1° Febbraio 1885.
Amélineau (Emilio), Professore nella *École des Hautes Études* di Parigi. — 28 Aprile 1895.
Salvioni (Carlo), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 31 Maggio 1908.
Lasinio (Fausto), Professore nel R. Istituto di studi superiori e di perfezionamento in Firenze. — Id. id.
Parodi (Giacomo (Ernesto), Professore nel R. Istituto di studi superiori e di perfezionamento in Firenze. — Id. id.
Schiaparelli (Celestino), Professore nella R. Università di Roma. — Id. id.
Teza (Emilio), Professore nella R. Università di Padova. — Id. id.

Sezione di Filologia, Storia letteraria e Bibliografia.

Del Lungo (Isidoro), Socio residente della R. Accademia della Crusca (Firenze). — 16 Marzo 1890.
Novati (Francesco), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 21 Giugno 1903.
Rossi (Vittorio), Professore nella R. Università di Pavia. — id. id.
Boffito (Giuseppe), Professore nel Collegio delle Querce in Firenze. — id. id.
D'Ovidio (Francesco), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Napoli. — id. id.
Biadego (Giuseppe), Bibliotecario della Civica di Verona. — id. id.
Cian (Vittorio), Professore nella R. Università di Pisa. — id. id.
Vitelli (Gerolamo), Professore nel R. Istituto di studi superiori e di perfezionamento in Firenze. — 31 Maggio 1908.
Flamini (Francesco), Professore nella R. Università di Padova. — Id. id.
Gorra (Egidio), Professore nella R. Università di Padova. — Id. id.

Digitized by Google

MUTAZIONI

AVVENUTE

nel Corpo Accademico dal 31 Dicembre 1908 al 31 Dicembre 1909.

ELEZIONI

SOCI

Ruffini (Francesco) .
Chironi (Giampietro)
D'Ercole (Pasquale) .
} Eletti per comporre la Commissione del premio Gautieri per la Filosofia (triennio 1906-1908). Adunanza della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche del 31 gennaio 1909.

Salvadori (Tommaso), Eletto delegato della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali presso il Consiglio di Amministrazione dell'Accademia, in seduta del 25 aprile 1909.

Mattirolo (Oreste), Eletto membro della Giunta per la sorveglianza della Biblioteca, in seduta del 25 aprile 1309.

Naccari (Andrea) . .
Camerano (Lorenzo) .
Guareschi (Icilio) . .
Somigliana (Carlo) .
Parona (C. Fabrizio) .
Renier (Rodolfo) . .
Pizzi (Italo) . . . .
De Sanctis (Gaetano)
Ruffini (Francesco) .
Stampini (Ettore) . .
} Eletti in seduta delle Classi Unite del 2 maggio 1909 a comporre la 2ª Giunta per il XVI premio Bressa del quadriennio 1905-1908.

Guidi (Camillo) . .
Grassi (Guido) . . .
De Sanctis (Gaetano)
Ruffini (Francesco) .
} Eletti per comporre la Commissione per i premii Morelli di Bergamo, nell'adunanza delle Classi Unite del 25 aprile 1909.

Digitized by Google

MORTI

8 Febbraio 1909.

Morera (Giacinto), Socio nazionale residente della Classe di Scienze fisiche matematiche e naturali.

16 Febbraio 1909.

Thomsen (Giulio), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Chimica generale ed applicata).

9 Giugno 1909.

Rodriguez de Berlanga (don Manuel), Socio corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Scienze giuridiche e sociali).

11 Luglio 1909.

Newcomb (Simon), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Matematiche applicate, Astronomia e Scienza dell'ingegnere civile e militare).

3 Agosto 1909.

Carutti di Cantogno (Barone Domenico), Socio nazionale residente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

17 Ottobre 1909.

Zeuner (Gustavo), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di matematica applicata, Astronomia e scienza dell'ingegnere civile e militare).

31 Ottobre 1909.

Monticolo (Giovanni), Socio corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Scienze storiche).

16 Novembre 1909.

Bellio (Vittore), Socio corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Geografia ed Etnografia).

Digitized by Google

Digitized by Google

PUBBLICAZIONI PERIODICHE RICEVUTE DALL'ACCADEMIA

Dal 1° Gennaio al 31 Dicembre 1909.

NB. Le pubblicazioni segnate con * si hanno in cambio;
quelle notate con ** si comprano; e le altro senza asterisco si ricevono in dono.

* **Aberdeen**. University. — Studies, N. 31: The Miscellany of the New Spalding Club, vol. II; N. 35: The Records of Elgin 1234-1800, vol. II.
* **Acireale**. R. Accademia di scienze, lettere ed arti degli Zelanti. Rendiconti e Memorie, serie 3ª, vol. V, 1096-1907.
Adelaide. Royal Society of South Australia. Transactions and Proceedings and Report, vol. XXXII; 8°.
Aix-en-Provence. Faculté de Lettres, Annales, T. II, Nos. 1-4; Faculté de Droit, Annales, T. II, 1-2.
* **Alba**. Società di Studi storici ed artistici per Alba e territori connessi: Alba Pompeia, anno I (1908), N. 1-4; anno II (1909), 1.
Albany. State of New York. Report to the Governor of the Advisory Board of Consulting Engineers upon its work relating to the Barge Canal from January 1, 1907, to January 1, 1908. Albany, 1908; 8°.
* **Albuquerque**. University of New Mexico. Bulletin, Cat. Ser., vol. 17, Pt. 2. — Biological Series, vol. III, art. 1, 3, 13. — Educational Ser., vol. I, N. 3. — Geological Ser., vol. III, N. 1.
America. American Philological Association: Transactions and Proceedings, 1907, vol. XXXVIII.
* **Amsterdam**. Société mathématique. Nieuw Archief voor Wiskunde: Tweede Reeks, Dl. IX, 1. Stuk. — Wiskundige opgaven met de oplossingen, Dl. X, 4 Stuk. — Wiskundige opgaven, Afl. 4, Blz. 209-224.
* **Angers**. Société d'Études Scientifiques; Bulletin. Nouvelle Sér., XXXVII[e] an., 1907.
Australia. Report of the 11° Meeting of the Australasian Association for the Advancement of Science, held at Adelaide, 1907. Adelaide, 1 vol. 8°.
* **Baltimore**. Johns Hopkins University. American Chemical Journal, vol. XXXIX, Nos. 3-6; XL, XLI, 1. — American Journal of Mathematics, vol. XXX, Nos. 2-4, XXXI, 1. — American Journal of Philology, vol. XXIX, Nos. 113-116. — Historical and Political Science, Ser. XXVI, Nos. 1-12. — Circular, 1908, Nos. 2-10.
* — Peabody Institute. 42° Annual Report. June 1, 1909.

Digitized by Google

* **Barcelona**. R. Académia de Ciencias y Artes: Historia, 1 vol. 8°. — Nómina del Personal académico, año académico 1898-1899—1908-1909; 11 vol. in-16°. — Boletin, Tercera epoca, vol. I-II, 1892-1900, 1901-1909; 2 vol. 4°. — Memórias, Tercera epoca, vol. I-VII, VIII, 1-6 (1908-1909); 7 vol. 4°.

* **Basel**. Naturforschende Gesellschaft. Verhandlungen, Bd. XX, Heft 1.

Basilea Università. Tesi di laurea, 1906-7; 1907-8. N. 146.

* **Bassano**. Museo Civico. Bollettino, anno V, 1908, N. 3-4; VI, 1909, 1-3.

* **Batavia**. Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. — Tijdschrift, Deel LI, Afl. 2-4. — Notulen, 1908, Deel XLVI, Afl. 2-4. — Verhandelingen, Deel LVII. — Dagh Register gehonden int Casteel Batavia..., An. 1679. — Register op de artikelen voorkomende in het Tijdschrift... en de Verhandelingen loopende tot het jaar 1907-1908; 1 vol. 8°.

* — K. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië. Natuurkundig Tijdschrift, Deel. LXVIII.

— R. Magnetical and Meteorological Observatory. Observations, vol. XXIX, 1906. Containing meteorological, magnetical and seismometrics observations made in 1906. — Regenwaarnemingen in Nederlandisch-Indie, 29. Jahr., 1907, Deel I, Dagelijksche regenval; II, Uitkomsten. — Magnetic Survey of the Dutch East-Indies made in the Years 1903-1907.

* **Bergen**. Bergens Museum. Aarbog 1908, 3die Hefte, 1909, 1-2. — Aarsberetning for 1908. — An account of the Crustacea of Norway with short descriptions and figures of all the species by G. O. Sars, vol. V, Copepoda, parts XXIII-XXVI; 4°. — Untersuchungen über den Hummer mit besonderer Berücksichtigung seines auftretens an den norwegischen Küsten von Dr. A. Appellöf; 4°.

* **Berkeley**. University of California. Chronicle and official record, vol. X, 1-4; XI, 1. — American Archaeology and Ethnology, vol. VI, Nos. 1-3; VII, 3; VIII, 1-4. — Botany, vol. II, N. 16; III, 1-3, 5. — Economics, vol. I. — Geology, vol. V, Nos. 12-15, 17. — Physiology, vol. III, N. 11-13. — Zoology, vol. IV, Nos. 5-7; V, 1; VI, 1. — Memoirs, vol. I, N. 1.

* **Berlin**. K. Preussische Akademie der Wissenschaften. Abhandlungen Physik.-Mathematische Classe, 1908. — Id. Philosoph.-historische Classe, 1908, — Sitzungsberichte, 1908, XL-LIII; 1909, I-XXXIX.

* **Besse**. Station Limnologique. Annales. Recueil trimestriel 1909, fasc. I, II.

* **Beyrouth**. Université de St.-Joseph. Al. Machriq. Revue catholique orientale mensuelle. 1909, XII Ann., N. 1-12; Tables décennales 1898-1907, avec les sommaires des deux dernières années 1908-1909.

Biella (Città di). Biblioteca municipale (annessa alla Scuola professionale). Catalogo. Biella, 1909; 1 vol. 4°.

* **Bologna**. Istituto di Bologna. Accademia delle Scienze. Classe di Scienze fisiche. Rendiconto, N. S., vol. XII (1907-1908). — Memorie, Ser. 6ª, t. V (1907-1908).

* — Osservatorio della R. Università. Osservazioni meteorologiche dell'annata 1907.

* — Biblioteca Comunale. L'Archiginnasio. Bullettino, anno III, N. 6; IV, 1-5.

Digitized by Google

* **Bordeaux**. Société des sciences physiques et naturelles. Mémoires, 6e Sér., T. IV. — Procès-verbaux des Séances. 1907-1908. — Bulletin de la Commission météorologique du Département de la Gironde. An. 1907.

* — Faculté des Lettres... et des Universités du Midi. Annales. Bulletin italien, 4e Sér., T. IX, 1-4. — Bulletin hispanique, 4e Sér., T. XI, 1-4. — — Revue des études anciennes, 4e Sér., T. XI, N. 1-4.

* **Boston**. American Academy of Arts and Sciences. Proceedings, vol. XLIII, Nos. 17-22; LIV, 1-17. — Memoirs, vol. XIII, N. 6.

* — Boston Society of Natural History. Occasional Papers, vol. VII, Nos. 8-10. — Proceedings, vol. XXXIV, Nos. 1-4.

— Massachusetts General Hospital. Publications, vol. II, N. 1.

* **Brescia**. Ateneo. Commentari per l'anno 1908. — Indici per nomi e per materia, 1808-1907.

* **Brooklyn**. Museum of Brooklyn Institute of Arts and Sciences. Science Bulletin, vol. I, N. 14; Col Spring Harbor. Monographs, VII.

* **Bruxelles**. Académie Royale de Belgique. Annuaire, 1909. — Classe des sciences: Bulletin, 1908, N. 7-12; 1909, 1-3. — Mémoires, Collect. in-4°, 2e Sér., T. II, fasc. 1. — Mémoires, Collection in-8°, 2e Sér., T. II, fasc. 3-4. — Programme du Concours pour 1910. — Biographie nationale, T. XX, 1r fasc. — Notices biographiques et bibliographiques concernant les membres, les correspondants et les associés, 1907-1909, 5me édition.

* — Société d'Archéologie. Annuaire, T. XX, 1909. — Annales, T. XXII, 1908, fasc. 3°, 4°.

* — Société des Bollandistes. Analecta Bollandiana, T. XXVIII, fasc. 1-3.

* — Société Entomologique de Belgique. Annales, T. LII; Mémoires, XVI.

* — Société Géologique de Belgique. Annales, T. XXX, 4e livr.; XXXIII, 4; XXXV, 3, 4; XXXVI, 1.

* — Société Belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie. Bulletin, Procès-Verbaux, T. XXII, 1908, Nos. 1-11. — Bulletin, Mémoires, T. XXII, 1908, fasc. 1-2. — Nouveaux Mémoires, Sér. in-4°, 1908. Les cristallisations des Grottes de Belgique par W. Prinz.

* — Observatoire Royal de Belgique. Annuaire astronomique pour 1909. — Annuaire météorologique pour 1909. — Annales, Nouv. sér., Annales astronomiques, T. XI, fasc. II. — Nouv. Sér., Physique du Globe, T. VI, fasc. 1.

* **Bucarest**. Académie Roumaine: Lois, Statuts, Règlements, Décisions, 1908. — Analele, 1907-1908, Ser. II, T. XXX. — Memoriile sectiunii historice. — Memoriile sectiunii literare. — Memoriile sectiunii stiintifice. — Memoriile partea administrativa și desbaterile. — Din vieata poporului român Culegeri și studii, I-III. — Bibliografia romanească veche 1508-1830 de J. Bianu si N. Hodos, T. II, fasc. IV, 1784-1796. — Discursuri de receptiune, XXX, XXXI. — Monumentele epigrafice și sculpturali muzeului national de antichitati... de Gr. G. Tocilescu. — Alessandru Russo. Serieri publicate de P. V. Hanes. — Literatura medicală românească biografii și bibliografie de Dr. G. Crăinicianu (Editiunea Academiei Române).

Digitized by Google

* **Bucarest**. Société des sciences. Bulletin, an. XVII (1908), N. 5-6; XVIII (1909), 1-4.
— Observatorul Astronomic si Meteorologic din România: Buletinul Lunar An. XVII (1908); XVIII (1909).
* **Budapest**. Ungarische geologische Reichsanstalt. Mitteilungen aus dem Jahrbuche, XVI. Bd., 5. Heft; XVII, 1.
— Jahresberichte für 1907.
* — Ungarische geologische Gesellschaft. Földtani közlöny, XXXVIII kötet, 1908, 11, 12 Füzet; XXXIX, 1909, 1-4.
* **Buenos Aires**. Ville de Buenos-Aires. Annuaire Statistique. XVIII^{e} an., 1908. — Bulletin mensuel de Statistique, an. XXII, 1908, N. 11-12; XXIII, 1909, 1-9.
* — Sociedad Científica Argentina. Anales, T. LXVI, Entrega 6^{a}; LXVII, LXVIII, Entrega 1.
* — Museo Nacional. Anales, Ser. III, T. X. Buenos Aires, 1909; 1 vol. 8°.
— Jardin Zoológico. Revista, Epoca II, an. V, N. 18.
* **Cagliari**. Università. Annuario, anno scolastico 1908-1909.
* **Calcutta**. Asiatic Society of Bengal. Journal et Proceedings, vol. LXXIV, part 2^{a}, 3^{a}; III, N. S., N. 5-10; IV, 1-4 and Extra No. — Bibliotheca Indica. Collection of Oriental Works. N. S., N. 1112, 1143, 1152, 1171, 1179, 1182-1186, 1188-1196.
* — Geological Survey of India. Memoirs, vol. XXXIV, part 4; XXXVII, 1-3 (1909). — Palaeontologia Indica, Ser. XV, vol. VI, N. 1; N. S., vol. II, N. 4, 5; III, 3. — Records, vol. XXXVII, part 2-4; XXXVIII, 1, 2.
* — Geological Survey of India. A Sketch of the Geography and Geology of the Himalaya Mountains and Tibet. Part IV. The Geol. of the Himalaya.
— Board of Scientific Advice for India. Annual Report for the years 1906-1907, 1907-1908; 8° (Superintendent Gouvernment Printing India).
* **Cambridge**. Cambridge Philosophical Society. Transactions, vol. XXXI, Nos. 7-9. — Proceedings, vol. XV, p. 1-3.
* — Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Memoirs, vol. XXXIV, N. 2; XXXVI, 1; XXXVII. — Proceedings, vol. XLII, 6, 8, 10, 13; LIII, 1, 3, 4.
* **Cape Town**. South African Philosophical Society. Transactions, vol. XVIII, p. 4, 1909.
* **Catania**. Accademia Gioenia di scienze naturali. Atti, ser. V, vol. I, 1908. — Bollettino delle sedute, fasc. 5°-9° (1908-1909).
* — Società degli Spettroscopisti italiani. Memorie, vol. XXXVII, disp. 12; XXXVIII, 1-10.
— R. Università. Annuario dell'Istituto di storia del Diritto romano. Catania, 1907-1908, 1 vol. 8°, vol. IX, 2; vol. X.
— Istituto di Storia di Diritto romano. Rassegna Universitaria catanese, vol. VII, fasc. 1°; 4°.
* **Chambéry**. Académie des sciences, belles-lettres et arts de Savoie. Mémoires, 4$^{\text{ème}}$ Sér., T. XI, 1909.
* — Société Savoisienne d'histoire et d'archéologie. Mémoires et documents, 2$^{\text{ème}}$ Sér., T. XLVI, 1908.

Digitized by Google

Charlottenburg. Physikalisch-technische Reichsanstalt. Die Tätigkeit im Jahre 1908.

* **Cherbourg**. Société Nationale des sciences naturelles et mathématiques. Mémoires, T. XXXVI.

* **Chicago**. Field Museum of Natural History. Publication. — Geological Series, vol. III, N. 7. — Report Series, vol. III, N. 2, 3. — Zoological Series, vol. VII, N. 6.

* — American Urological Association. Transactions. Seventh Annual Meeting June 1st and 2d, 1908.

* — The John Crerar Library. Fourteenth annual Report for the year 1908; 8°.

* **Cincinnati**. Lloyd Library of Botany, Pharmacy and Materia medica. Bulletin N. 11.

* **Cividale**. Memorie storiche Forogiuliesi. An. IV (1908), fasc. 2-4; V (1909), 1.

* **Colorado Springs**. Colorado College Publication. Engineering Ser., vol. I. N. 3-4. — Language Ser., vol. II, N. 19-21. — Sciences Ser., vol. XII, N. 2-5.

* **Copenhague**. Académie R. des sciences et des lettres de Danemark. Bulletin, 1908, N. 6; 1909, N. 1, 4, 5. — Mémoires, Section des Sciences, 7ème Sér., T. VI, N. 3, 4; VII, 1; VIII, 1-3. — Section des Lettres, 7ème Sér., T. I, 3.

Cordoba Academia Nacional de Ciencias. Boletin, T. XVIII, Entrega 3ª.

* **Cracovie**. Académie des Sciences (Akademii Umiejętnosći). Bulletin international, Classe de philologie. — Classe d'histoire et de philosophie, 1908, Nos. 6-10; 1909, 1-6. — Classe des sciences mathématiques et naturelles, 1908, Nos. 9, 10; 1909, 1-7. — Catalogue of Polish scientific Literature, T. VIII, Rok 1908, 1-4; IX, 1909, 1-2. — Rozprawy wydział filologiczny, Ser. II, T. XXX. — Rozprawy wydział historyczno-filozoficzny, Ser. II, T. XXVI, XXVII. — Rozprawy wydziału matematyczno-przyrodniczego. T. VIII, A; T. VIII, B (1908). — Zapatowicz (U.), Conspectus florae Galiciae criticus, vol. II, 1908. — Duda (F.), Rozwoj terytoryalny Pomorza poliskiego (Wiek XI-XIII). — Dr. W. Tokarz, Galicya w poczatkach ery Jozefinskiej w swietle ankiety urzedowej z roku 1783.

* **Delf**. Bibliothek der Technische Hoogeschool. Tesi, 5.

* **Denison**. Scientific Laboratories of Denison University. Bulletin, vol. XIV, art. 1-5.

* **Dublin**. Royal Irish Academy. Proceedings, vol. XXVII, Section A, Nos. 10-12; B, 6-11; C, 9-18.

* — Royal Dublin Society. Economic Proceedings, vol. I (1908), p. 13-16. — Scientific Proceedings, N. S., vol. XI, Nos. 29-32; XII, 1-23. — Scientific Transactions, Ser. II, vol. IX, Nos. VII-IX.

* **Edinburgh**. Royal Society. Proceedings, vol. XXIX, p. 2-8 (Session 1908-9). — Transactions, vol. XLVI, p. 2, 3.

* — Royal Physical Society. Proceedings, Sess. 1906-1907, vol. XVII, 1-6.

— Geological Society. Transactions, vol. IX, p. 3, 4.

* **Elberfeld**. Naturwissenschaftliches Verein. Jahres-Berichte, XII Heft. — Chemischen Untersuchungsamtes der Stadt Elberfeld Bericht über die Tätigkeit des Jahres 1908.

Digitized by Google

* **Erlangen.** Physikalisch-Medizinische Sozietät. Sitzungsberichte, 39. Bd., 1907; 40, 1908. — Festschrift..... zur Feier ihres 100jährigen Bestehens am 27 Juni 1908.

— Università. Tesi di laurea, 1907-1908, N. 219.

Firenze. R. Accademia della Crusca. Vocabolario. Quinta impressione, vol. X, fasc. 2°, 1909.

* — R. Accademia economico-agraria dei Georgofili. Atti, serie 5ª, vol. VI, disp. 1-4.

* — R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento. Sezione di scienze fisiche e naturali: Raccolte Planctoniche fatte dalla R. Nave "Liguria „, vol. I, fasc. V. — Contributo allo studio fisico e chimico dei minerali che per riscaldamento sviluppano acqua. — Storia della Collezione centrale degli Animali vertebrati italiani del R. Museo Zoologico di Firenze, 1876-1908. — Osservazioni astronomiche fatte all'Equatoriale di Arcetri nel 1908 da A. Abetti, fasc. 26. — Sezione di Filosofia e Filologia: Ezio Levi, Francesco di Vannozzo e la Lirica nelle Corti Lombarde durante la seconda metà del secolo XIV. Firenze, 1908; 8°.

* — Osservatorio Meteorico del R. Museo. Pubblicazioni periodiche di meteorologia. Osservazioni dell'anno 1907-1908.

— Osservatorio Comunale di Quarto-Castello. Spoglio delle Osservazioni sismiche dal 1° dicembre 1903 al 30 novembre 1906.

— R. Commissione geodetica italiana. Differenza delle longitudini fra Milano Osservatorio astronomico di Brera e Crea punto trigonometrico di 1° ordine della rete geodetica italiana. Osservazioni. Milano, 1909; 4°.

— Elementi della rete geodetica fondamentale a nord del parallelo di Roma. Firenze, 1908; 4°.

** — Sezione di Statistica del Comune. *Annuario* statistico delle Città italiane, an. I (1906); II (1907-1908).

* **Frankfurt am Mein.** Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft. Abhandlungen, Bd. XXX, 3, 4. — Berichte, 1908, 39; 1909, 40.

* **Freiburg i. Br.** Naturforschende Gesellschaft. Berichte, Bd. XVII, 2.

* **Gap.** Société d'Études des Hautes-Alpes. Bulletin, 3ème Sér., XXVII^eme An., Nos. 27-28, 3ème-4ème trimestre 1908; XXVIII^ème, Nos. 29-31, 1er et 3^eme trimestre 1909.

* **Genova.** Società Ligure di Storia patria. Medaglia commemorativa coniata pel cinquantenario della fondazione della Società.

* — Società di letture e conversazioni scientifiche. Rivista ligure di scienze, lettere ed arti. An. XXXI, fasc. 1-5.

Giessen. Università. Tesi di laurea, 1908-1909, N. 178.

* **Göteborgs.** K. Vetenskaps- och Vitterhets-Samhälles. Handlingar-Fjärde följden. Häft X, XI.

* **Göttingen.** K. Gesellschaft der Wissenschaften. Philologisch-historische Klasse: Abhandlungen, N. F., Bd. VI, 4; XI, 2-5. — Nachrichten, 1908, 6; 1909, 1-3. — Matematisch-physikalische Klasse: Abhandlungen, N. F., Bd. VII, 3. — Nachrichten, 1908, 4; 1909, 1, 2. — Geschaftliche Mitteilungen, 1909, 1.

Digitized by Google

* **Granville Ohio**. Scientific Laboratory of Denison University. Bulletin, vol. XIV, Art. 6-10.
* **Haarlem**. Musée Teyler. Archives, Sér. II, vol. IX, 3ème partie.
* **Habana**. Academia de Ciencias médicas, físicas y naturales. Anales, T. XLV, nov.-diciemb.. enero-mayo 1908-1909; T. XLVI, mayo-julio 1909.
* **Hamburg**. Hamburgische Wissenschaftliche Anstalten. Jahrbuch XXV (1907). Beiheft. 1-7. — Jahrbuch, XXV Jahrgang, 1907.
* **Harlem**. Société hollandaise des sciences. Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. Sér. II, T. XIV, 1-5 livrs.
* **Heidelberg**. Naturhistorisch-medicinisches Verein. Verhandlungen, N. F., Bd. VIII, Heft 5; IX, 1-4; X, 1-2.
* — Università. Tesi di laurea, 1907-1908, N. 297.
* **Helsingfors**. Société des sciences de Finlande. Acta, vol. XXXIII-XXXIV, XXXVII. 1, 5, 1907-1908; 4°. — Bidrag, 64-66 Häftét, 1907-1908; 8°. — Övfversig, XLVIII, 1905-1906; XLIX, 1906-1907; L, 1907-1908; 8°. — Festschrift Herrn Prof. Dr. J. A. Palmén zu seinem 60. Geburtstage am 7 november 1905, gewidmet von Schüler und Kollegen, Bd. I-II (10 vol.). — Observations météorologiques publiées par l'Institut météorologique central: État des glaces et des neiges en Finlande pendant les hivers 1896-1897 et 1897-1898. — Meteorologisches Jahrbuch für Finland herausg. von der Meteorologischen Zentralanstalt. Bd. II, 1902.

Hermannstadt. Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften. Verhandlungen und Mitteilungen, LVIII. Bd. Jahrg. 1908; 8°.

Hollande. Institut Météorologique Royal des Pays-Bas. Mededeelingen en Verhandelingen, N. 6-7.

* **Jena**. Medizinisch-Naturwissenschaftliche Gesellschaft. Jenaische Zeitschrift, N. F., XXXVI. Bd., II-IV; XXXVIII, 1. — Denkschrift, III, 1, 2 Liefg.; XIII, 1, 2.
* **Inghilterra**. British Association for the Advancement of Science. Report of the Dublin Meeting. London, 1909; 1 vol. 8°.
* **Kasan**. Société Physico-Mathématique; Bulletin. 2ème Sér., T. XVI.
* **Kharkow**. Société mathématique. Communications, 2ème Sér., T. X. XI, N. 1-4.
* **Karlsruhe**. Technische Hochschule. Dissertaz., 1907-1908; 1908-1909. N. 52.
* **Kiel**. Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen Meere in Kiel und der Biologischen Anstalt auf Helgoland. Wissenschaftliche Meersuntersuchungen. N. F., IX. Bd., Abth. Helgoland, Heft 1; X. Bd., Abth. Kiel, Ergänzungsheft.
* **Königsberg**. Physikalisch-Ökonomische Gesellschaft. Schriften, XLVIII. Jahrg., 1807; XLIX, 1909.

Kyōto. Imp. University. College of Science and Engineering. Memoirs, vol. I, No. 4, 1908.

* **Leipzig**. K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-physische Klasse: Berichte über die Verhandlungen, 1908, VI-VIII; 1909, I-III. — Abhandlungen, XXX. Bd., N. 5-6; XXXI, XXXII, 1. — Philologisch-historische Klasse: Berichte über die Verhandlungen, 1908, 6-8; 1909, 1-2. — Abhandlungen, XXVI, Bd. 3-5; XXVII.

Digitized by Google

Leipzig. Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft; 8°. — Jahresbericht. 1909. — Preisschriften: F. POLAND, Geschichte des griechischen Vereinswesen (N. XXIII d. hist. nat.-ökonomischen Section).

— Pathologisches Institut. Arbeiten, Heft 1-5, 1903-1908 (*dono del Prof. F. Marchand Socio corrispondente dell'Accademia*).

Léopol. Société Polonaise pour l'advancement des sciences. Bulletin, I-VIII, 1901-1908.

Lima. Ministerio de Fomento. Cuerpo de Ingenieros de Minas del Perú. Boletín, N. 63-74; 8°.

* **Lisboa**. Academia de Sciencias de Portugal. Trabalhos, 1ª Ser., T. I.

* — Academia Real da Sciencias. Sessão Publica. Em de fevereiro 1905; março 1906, junho 1907. — Notes on the Climate of Mont'Estoril and the Riviera of Portugal etc.

* — Commissão do Serviço Geologico de Portugal. Communiçaões, T. VII, fasc. 2.

* **Lisbonne**. Société Portugaise des sciences naturelles. Bulletin, vol. II, fasc. 1-3.

Locarno. Società ticinese di Scienze naturali. Bollettino, An. I-IV, 1904-1908.

* **London**. Royal Institutions of Great Britain. Low-Temperature Research, 1900-1907. — Proceedings, vol. XVIII, Part III.

* — Royal Society. Proceedings. Mathematical and Physical sciences, Ser. A, vol. 81, 550; 82, 83, No. 559, 560. — Biological sciences, Ser. B, vol. 80, No. 544; 81, 545-551. — Philosophical. Transactions: Ser. A, containing papers of Mathematical or Physical Character, vol. 208, 209; Ser. B, containing papers of a Biological character, vol. 200.

* — Royal Society. Evolution Committee. Report, IV.

* — Royal Society. Report of Magnetic Survey of South-Africa; 1 vol. 4°.

— Royal Society. National Antartic Expedition 1901-1904. Magnetic Observations. London, 1909; 4°.

** — Royal Society. Catalogue of scientific paper 1800-1900 subject index, vol. I. Pure Mathematics. Cambridge, University Press, 1908; 1 vol. 8° gr.

* — Royal Society. *International Catalogue of Scientific Literature*. Sixth Annual issue: **B**. Mechanics; **C**. Physics; **D**. Chemistry (Fifth Annual Issue); **F**. Meteorology including Terrestrial Magnetism; **G**. Mineralogy including Petrology and Crystallography; **H**. Geology; **K**. Palaeontology; **M**. Botany; **N**. Zoology, 2 vol. (1. Seventh ann. Issue); **O**. Anatomy; **P**. Anthropology; **Q**. Physiology; 13 vol. 8°.

* — R. Astronomical Society. Monthly Notices, vol. LXIX, 2, 9 suppl. numb. — Memoirs, vol. LVII, part III; Appendix II, vol. LVIII; LIX, p. I-III.

* — British Museum (Natural History). Catalogue of the Fresh-Water Fishes of Africa, vol. I. By G. A. Boulenger. — Catalogue of the Lepidoptera Phalaenae, vol. VII. Test. a., VIII Plates. — Synopsis of the British Basidiomycetes by W. G. Smith. 1 vol. 8°. — Guide to the Specimens illustrat. the Races of Mankind (Anthropology). — Guide to the Whales, Porpoises and Dolphins (Order Cetacea). — Mineral Department. — An introduction to the Study of Rocks and guide to the Museum collection, 4. edit. — An introduction to the Study of Meteorites with

Digitized by Google

a list of the Meteorites represented in the Collection, 10. edit. — Memorials of Charles Darwin.

* **London**. Chemical Society. Journal, vol. XCV, XCVI, January-Dec. 1909. Indexes, vol. XCIII and XCIV. — Proceedings, vol. XXV, No. 350-363. Index, vol. XXIV.

* — Geological Society. The Centenary of the G. S. celebrated Sept. 26th. to October 3rd. 1907. — Quarterly Journal, vol. LXV, p. 1, N. 257-259. — Geological literature during the Year ended December 31st., 1908.

* — Linnean Society. List 1900-1910; Proceedings, 121st. Session. From November 1908 to June 1909. — Journal. Botany, vol. XXXVIII, N. 268; XXXIX, 269-271. — Zoology, vol. XXX, N. 199; XXXI, 205. — Transactions, Botany, 2nd Ser., vol. VII, p. 10-12. — Zoology, 2nd Ser., vol. XI, p. 1-5; XII, 4, 5. — The Darwin-Wallace celebration held on Thursday, 1st July, 1908.

* — Royal Society of Literature. Transactions, 2nd ser., vol. XXVIII, p. 4; XXIX, p. I. — Milton Memorial Lectures 1908. London, 1909; 1 vol. 8°. — Report and List of Fellows, 1909.

— Royal Microscopical Society. Journal 1909, Part 1-5.

* — Zoological Society. Proceedings, 1908, p. IV; 1909, p. I-III. — Transactions, vol. XIX, p. 1.

* **Louvain**. Université catholique. Annuaire 1909. — Programme des cours de l'année académique 1908-1909. — Bibliographie, Louvain, 1908. — E. Tobac, Le problème de la justification dans saint Paul, Louvain, 1908. — C. Collard, L'éducation protectrice de l'enfance en Prusse, Louvain, 1908. — O. de Spoelberch, L'impôt sur le revenu en Italie, Bruxelles. 1908. — V. Claes, L'organisation professionnelle et le contrat collectif de travail des imprimeurs allemands, Louvain, 1908. — G. Duplat, Le Journal. Sa vie juridique. Ses responsabilités civiles. Bruxelles, 1908. — R. de Mûelenaere, La grève et le contrat de travail. Louvain, 1909. — J.-B. Goetstouwers, Les mêtiers de Namur. Lierre, 1908. — E. de Moreau, L'abbaye de Villers-en-Brabant au XII^{e} et XIII^{e} siècles. Bruxelles, 1909. — E. Palandri, Les négociations politiques et religieuses entre la Toscane et la France à l'époque de Cosme I^{r} et de Catherine de Médicis. Roulers, 1908.

* **Lyon**. Société d'Agriculture, Sciences et Industrie. Annales, 1907.

* — Société Linnéenne. Annales, An. 1908 (Nouvelle Sér.), T. LV^{eme}.

* — Diocèse de Lyon. Bulletin historique, 9ème année, 1908, N. 54-57.

* — Université. Annales, Nouvelle Série: I. Sciences, Médecine, fasc. 22, 24. — II. Droit, Lettres, fasc. 20.

* **Madison**. Wisconsin Academy of Sciences, Arts and Lettres. Transactions, vol. XV, part 2 (1907).

* — Wisconsin Geological and Natural history Survey. Bulletin, No. XX (Economic Series, N. 13).

— University Wisconsin. Publications of the Washburn Observatory, vol. XII.

Madras. Kodaikanal Observatory. Bulletin, No. XIV-XVIII. Annual Report of the Director 1908; 4°.

Digitized by Google

* **Madrid**. Real Academia de la Historia. Boletin, T. LIV, Cuaderno 1-6; LV, 1-4.
* — R. Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales. Anuario, 1909. — Revista, T. VII (1908), N. 4-12. — Memorias, vol. XXV, 1-2 fasc.
— Instituto Central Meteorológico. Resumen de las observaciones Meteorológicas efectuadas en la península y algunas de sus islas adyacentes durante el año 1907, vol. II-III.
* **Magdeburg**. Museum für Natur- und Heimatkunde. Abhandlungen und Berichte, Bd. I, Heft 4.
* **Manila**. Bureau of Science; Division of Ethnology Publication, vol. IV, p. II, The history of Sulu; vol. V, p. I, II, III, Vocabulary of the Igorot language as spoken by the Bontok Igorots. — Igorot-English and English-Igorot.
* **Mantova**, R. Accademia Virgiliana. Statuto e Regolamento della " Fondazione Franchetti „. — Atti e Memorie, an. 1904-1905, 1906-1907. N. S., vol. I, p. 1-2; II, 1.
* **Marseille**. Faculté des Sciences. Annales, T. XVII, 1909; 8°.
* **Mexico**. Sociedad Científica " Antonio Alzate „. Memorias y Revista, T. XXV, No. 4; XXVI, 10-12; T. XXVII, 1-8.
* — Observatorio Meteorológico Magnético Central. Boletín mensual: 1904, Mes de Abril, Noviembre, Diciembre; 1905, Mes de Enero; 1908, Mes de Agosto-Diciembre; 1909, Enero-Abril. — Tiempo probable en la República Mexicana durante el mes de Enero-Marzo 1909.
— Observatorio Astronómico Nacional de Tacubaya. Anuario, año de 1909 (Año XXIX). — Observaciones Meteorológicas y en algunas otras estaciones mexicanas durante el año de 1897.
* **Milano**. R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti, Ser. II, vol. XLI, fasc. 18-20; XLII, 1-15. — Atti della fondazione scientifica Cagnola dalla sua istituzione in poi, vol. XXII (1907-1908).
* — Società Italiana di scienze naturali e Museo Civico. Atti, vol. XLVII, fasc. 3°, 4°; XLVIII, 1°, 2°.
— Università Commerciale Luigi Bocconi. Annuario per l'anno scolastico 1908-1909, anno VII.
— R. Osservatorio di Brera. Anno 1910. Articoli generali del Calendario ed Effemeridi del Sole e della Luna per l'orizzonte di Milano. Con appendice; 8°. — Pubblicazioni, fasc. 45°.
— Municipio. Bollettino statistico mensile, 1908, novembre, dicembre: 1909, gennaio-ottobre. — Riassunto dei Bollettini statistici mensili dell'anno 1908. — Dati statistici a corredo del Resoconto dell'Amministrazione comunale, 1908.
* **Modena**. Regia Accademia di scienze, lettere ed arti. Memorie, ser. III, vol. VII; 4°.
* — Società dei Naturalisti e Matematici. Atti, Ser. 4ª, vol. III, IV, VII-X, 1905-1908.
Monaco. Institut Océanographique (Fondation Albert I^r Prince de Monaco). Bulletin, 1909, Nos. 136-153. Résultats des campagnes scientifiques ac-

Digitized by Google

complies sur son yacht par Albert 1er Prince souverain de Monaco, fasc. XXXIV (*dono di S. A. Serenissima il principe Alberto*).

* **Moncalieri**. Osservatorio del R. Collegio Carlo Alberto. Osservazioni meteorologiche e sismiche. Bollettino, 1908 dicembre; 1909 gennaio-ottobre.

* **Montevideo**. Observatorio Nacional Físico-Climatológico. Boletín, vol. VI (1908), N. 61-72.

* **Montpellier** Académie des sciences et lettres. Bulletin mensuel, 1909, N. 1-7.

* **Moscou**. Société Impériale des Naturalistes. Bulletin, An. 1907, N. 4.

* **Moskau**. Meteorologisches Observatorium der K. Universität. Beobachtungen 1905, 1906, 1907.

* **München**. Kgl. Bayerisches Akademie der Wissenschaften. Almanac, 1909. — I. Philosophisch-philologischen Klasse: Abhandlungen, XXIII Bd., 3. Abt.; XXIV, 3. — II. Mathematisch-physikalische Klasse; Abhandlung., XXIII Bd., 3 Abt.; XXIV, 2; I Suppl.-Bd., 1-6 Abt.; II. Suppl.-Bd., 1 Abt. — Sitzungsber., 1907, Heft 2; 1909, 1-14 Abt. — III. Philosoph.-philolog. und historische Klasse: Abhandlungen, XXIII Bd., 3 Abt.; XXIV, 3. — Sitzungsber., 1908, 1-11 Abt.; 1909, 1-14. — Festrede, 14 Dezember 1907: Dante und die Idee des Weltfriedens, von H. Granert. — 14 Novemb. 1907. Der Anteil der geistlichen Ritterorden an dem geistigen Leben ihrer Zeit, von H. Prutz. — 10 Marz 1909: Die Münchner Akademie von 1759 bis 1909, von K. Th. v. Heigel. — Neue Annalen der K. Sterwarte. Bd. IV.

* — Ornithologische Gesellschaft in Bayern, Verhandlungen, 1907.

* **Nancy**. Académie de Stanislas. Mémoires, 1907-1908, 6ème Sér., T. V.

* **Nantes**. Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France. Bulletin. 2e Sér., T. VIII, 3e et 4e trimestres 1908; IX, 1er trimestre 1909.

* **Napoli**. Società Reale. Annuario 1909. — Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti. Rendiconto, N. S., An. XXII, 1908. — Accademia delle scienze fisiche e matematiche. Rendiconto, Ser. 3a, vol. XIV., fasc. 8-12, 1908; XV, 1-7, 1909. — Accademia di scienze morali e politiche. Rendiconti, an. XLV, 1906; XLVI, 1907; XLVII, 1908. — Atti, vol. XXXVII, XXXVIII.

* — R. Istituto d'Incoraggiamento. Atti, Ser. VI, vol. LX, 1908; 4°.

* — Accademia Pontaniana. Atti, vol. XXXVIII.

* — Società dei Naturalisti. Bollettino, vol. XXII (1908); 8°.

* — Stazione Zoologica. Mittheilungen, XIX. Bd., 2, 3 Heft.

* **Neuchâtel**. Société Neuchâteloise des sciences naturelles. Bulletin. T. XXXV, An. 1907-1908.

* **New Mexico**. University. Bulletin, Whole, N. 50 (Catalogue ser., vol. 18).

* **New-York**. American Mathematical Society. Bulletin, vol. XV, No. 4-10; XVI, 1-3. — Transactions, vol. X, No. 1-4. -- Annual Register, January, 1909.

* — New York Public Library Astor Lenox and Tilden foundations. Bulletin, 1908, vol. XII, No. 12; 1909, vol. XIII, Nos. 1-11.

— Carnegie Foundation for the Advancement of Teaching. Third Annual Report of the President and Treasurer, 1908. New York City, 1908; 1 vol. 8°.

Digitized by Google

Oberlin (Ohio). Wilson Ornithological Club. Wilson Bulletin, Nos. 65, 66.

* **Ottawa** (Canada). Ministère des Mines. Division de la Commission Géologique. Rapport Annual (N. Sér.), vol. XII et Cartes, 1899. Ottawa, 1908, 1 vol. di testo e carte.

* — Canada. Department of Mines. Mines Branch. Annual Report on the Mineral production of Canada. During the Calendar Year 1906 (No. 266), 1908; 8°. — Report on the Mining and Metallurgical Industries of Canada. 1907-1908 (No. 24). — Report on the Investigation of an electric Shaft Fournace Domnarfvet, Sweden (No. 32).

* — Geological Survey of Canada. Department of Mines. Nos 980, 983, 1013, 1020, 1021, 1035, 1050, 1073, 1075 et 1081. — Summary Report..... for the Calendar Year 1908.

* **Padova**. R. Accademia di scienze, lettere ed arti. Atti e Memorie, N. S., 1907-1908, vol. XXIV.

* — Museo Civico. Bollettino, An. XI (1908), N. 4-6; XII (1909), N. 1-3.

* **Palermo**. Circolo Matematico. Annuario biografico, 1909. — Rendiconti, T. XXVII, fasc. 1-3; XXVIII, 1-2. — Supplemento ai Rendiconti: vol. III, N. 5-6; IV, 1, 2. — Indice delle pubblicazioni, N. 2, 1909.

* — Società di scienze naturali ed economiche. Giornale, vol. XXVI, 1908.

* — R. Istituto Botanico. Contribuzioni alla Biologia vegetale, vol. IV, fasc. II.

Parà (Brazil). Museu Gœldi (Museu Paranense), Boletim, vol. V, N. 2.

Paris. Ministère de l'Instruction Publique. Catalogue des Thèses et Écrits académiques, 24ème fasc. Année scolaire 1907-1908.

— Ministère de l'Instruction Publique et des Beaux-Arts. Inventaire sommaire des Archives communales et départementales antérieures à 1790: *Allier*. Hospice de Gayette. — *Basses-Alpes*, Archives civiles, Sér. B, T. II. — *Bouches du Rhône*, Ville de Marseille (Archives communales). Sér. AA. Actes constitutifs et politiques de la commune cartulaire de la cité. — *Cher*, Archives civiles, Sér. E, T. IV. — *Gironde*, Sér. suppl., T. IVème. — *Hautes-Alpes*, Ville de Gap, T. I. — *Lot-et-Garonne*, Période révolutionnaire, Sér. L, T. 1r. — *Morbihan*, Sér. B, T. I, Table générale. — *Rhône*, Ville de Lyon, La Charité ou Aumône générale.

— Ministère des Travaux Publics. Annales des Mines, 10ème Sér., T. XIV, 7-12 livrs., 1908; XV, 1-6, 1909.

* — Institut de France. Annuaire pour 1909. — Paris (E.), Souvenir de marine. Collection des plans ou dessins de navires et de bateaux anciens ou modernes existants ou disparus avec les éléments numériques nécessaires à leur construction. Paris, 1908. Atl. in f°. — Académie des sciences. Comptes rendus hebdomadaires, 1909, T. 148, 149. — Mémoires, T. L, 2e Sér. — Mémoires présentés par divers savants, 2e Sér., T. XXXIII et XXXIV. — Académie des sciences morales et politiques. Mémoires, T. XXV, XXVI. — Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, Mémoires, T. XII, 1e partie; XXXIII, 3; XXXVIII, 1; XXXIX, 1. — Séances et travaux. — Corpus inscriptionum semiticarum. Pars quarta: Inscriptiones Himyarticas et Sabaeas continens, T. I, fasc. IV, Testo e Tav. — Catalogue des Actes de François Ier, T. IX, X.

Digitized by Google

** **Paris**. Bureau des Longitudes. Annuaire pour l'an 1910; 16°.
* — Musée National d'histoire naturelle. Bulletin, 1908, N. 6. 7; 1909, 1-4. — Nouvelles Archives, 4° sér., T. X, 2° fasc.
* — Musée Guimet (Ministère de l'Instruction Publique et des Beaux-Arts). Annales, T. XXXI, 1re et 2e partie. — Bibliothèque d'études, T. XXV. — Revue de l'histoire des religions, T. LVII, Nos. 2, 3; LVIII, 1-3.
** — Société Anatomique. Bulletins, 1909.
* — Société de Géographie. La Géographie, Bulletin, An. 1908, XVIII, N. 1 (15 juillet) - 6 (15 décembre); 1909, XIX, 1 (15 janvier) - 6 (15 juin); XX, 1 (15 juillet).
* — Société Géologique de France. Bulletin, 4e Sér., T. VIII, Nos. 3-6.
* — Société Mathématique de France. Bulletin, T. XXXVII, fasc. 1-3.
* — Société Nationale des Antiquaires de France. Bulletin, 1908, 4e trim.; 1909, 1r-3e trim. — Mémoires, 7e Sér., T. VIII.
* — Société Philomatique. Bulletin, 9e Sér., T. XI, N. 5-6; 10e Sér., T. I, 1, 2, 3.
* — Société de Spéléologie Spelunca. Bulletin et Mémoires, T. VII, N. 54-56.
* — Société Zoologique de France. Bulletin, T. XXXIII, N. 1-10. — Mémoires, an. 1908, T. XXI.
* **Pavia**. Società Pavese di Storia patria. Bollettino, An. VIII, 1908, fasc. 6°; IX, 1909, 1-2.
* **Perugia**. Università degli Studi. Annali: della Facoltà di Giurisprudenza, 1907, Ser. III, vol. V; 1908, vol. VI, fasc. 1-4; 1909, V, 1; della Facoltà di Medicina, 1905, Ser. III, vol. V, fasc. 1; VI, VII, 1, 2.
* — R. Deputazione di Storia patria. Bollettino, An. XIV, fasc. 2, 3; XV, 1-2.
* **Philadelphia**. Academy of Natural Sciences. Proceedings, vol. LX, p. 1-3; LXI, p. 1. — Journal, 2nd Ser., vol. XIII, p. 4.
* — American Philosophical Society. Proceedings, vol. XLVII, Nos. 188-190.
* **Pisa**. Società Toscana di scienze naturali. Memorie, vol. XXII. — Processi verbali, vol. XVI, adunanza del 16 dicembre 1906; XVIII, 1909, 1-4.
* — R. Scuola Normale superiore. Annali: Scienze fisiche e matematiche, vol. X; Filosofia e filologia, vol. XXI.
* **Porto**. Academia Polytecnica. Annaes scientificos, vol. III, N. 3; IV, 1-4. — Obras sobre Mathematica do Dr. F. Gomes Teixeira, vol. II-IV (*Omaggio dell'Academia Polyt. e dell'A.*).
Potsdam. Bureau Central de l'Association Géodésique internationale. Rapport sur les travaux en 1908 et programme des travaux pour l'exercice de 1909. — Lotabweichungen, Heft IV, Veröff., N. S., 39. — Resultate des Internationalen Breitendienstes, Bd. III, Veröff., N. S., 18.
— K. Preussisches Geodätisches Instituts. Jahresbericht des Directors... für die Zeit von April 1908 bis April 1909, Veröffentlichung, N. F., Nr. 40.
Poulkovo. Observatoire Central Nicolas. Publications de l'Observatoire. vol. XVI, 2; XVIII, 3. — Publications de la Commission pour la mesure d'un Arc de Méridien au Spitzberg, T. II, IXe Sect., 1 fasc.; 4°.
* **Prag**. Kgl. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften. Jahresbericht... für das Jahr 1908. — Sitzungsberichte, Mathematisch-Naturwissen-

Digitized by Google

schaftliche Classe, 1908. — Sitzungsberichte, Klasse für Philosophie, Geschichte und Philologie, 1908.

Prag. K. K. Sternwarte. Magnetische und Meteorologische Beobachtungen im Jahre 1908, 69 Jahrgang.

* **Prague.** Académie des Sciences de l'Empereur François Joseph I (Česká Akademie Cisáre Františka Josepha I). — Bulletin international. Résumé des travaux présentés. Classe des sciences mathématiques, naturelles et de la médecine, XII[e] et XIII[e] An., 1907 et 1908. — Almanach. Ročník XIX, 1909. — Biblioteka Klassiků reckých a rimských, vydávana. III, Cislo, 15-17. — Bibliographie Ceské Historie. Dil IV, Svazik 2.3. — Historicky Archiv, Cislo 30-34. — Rozpravy, Třida I, Cislo 38; Třida II (Mathematicko-prirodnická), Roc. XVII (1908); Třida III, Cislo 23-26, 28. — Sbirka pramenův, Skupina II, Cislo 9, 11, 12. — Véstnik, Roen. XVII (1908). — Filosofická bibliotheka. Filosofické Spisy Vincence Zahradnika... opatril Františeka Cáda, Dil. II. — Anatomie a fysiologie rostlin napsal prof. Dr. B. Němec, 1908; 1 vol. 8°. — Remeslnictvo a zivnosti XVI. Véku v Cechách sepsal Z. Winter, 1 vol. 8°. — Rukovét k pisemnictvi humanistickemu..... sestavil Ant. Truhlář (I. Svazek); 1 vol. 8°. — Albert Velflik Života a působeni arch. Dr. Josef Hlávky s přehledem pokroku v. umeni Stavitelskélio za jetro zivnosti.

Pretoria. Transvaal Meteorological Department. Annual Report for the Year ended 30th June, 1908.

* **Pusa.** Agricultural Research Institute. Memoirs of the Department of Agriculture in India. — Botanical Series, vol. II, Nos. 6-8. — Chemical Series, vol. I, N. 7. — Entomological Series, vol. II, No. 7.

* **Reims.** Académie Nationale. Travaux, T. CXVIII (2nd 1904-1905), CXIX et CXX (I-II, 1905-1906), CXXI (T. I, 1906-1907), T. CXXIII et CXXIV (1907-1908).

* **Rennes.** Société scientifique et Médicale de l'Ouest. Bulletin, T. XVII, Nos. 2-4; XVIII, 1.

* **Riga.** Naturforscher-Verein. Korrespondenzblatt, LI, LII.

Rio de Janeiro. Instituto historico e geographico brazileiro. Commissão central de bibliographia brazileira, An. I, fasc. 1. Rio de Janeiro, 1895. — Osservatorio. Anuario para o año de 1908, An. XXIV.

Roma. Ministero degli Affari Esteri. Commissariato dell'Emigrazione. Emigrazione e colonie. Raccolta di rapporti dei RR. Agenti diplomatici e consolari. Vol. III, America, parte I, Brasile; parte II, Argentina; 1 vol. 8°.

* — Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio. Direzione generale della Statistica. Statistica della emigrazione italiana per l'estero negli anni 1906 e 1907. Con una appendice di confronti internazionali. — Statistica delle elezioni generali politiche alla XXIII Legislatura (7 a 14 marzo 1909). — Movimento della popolazione secondo gli Atti dello Stato civile nell'anno 1907. — Statistica dei ricoverati in Ospedali e in altri Istituti di Assistenza pubblici e privati nell'anno 1907; 8°. — Catalogo della Biblioteca, supplemento VI, dal 1° luglio 1906 al 31 dicembre 1908; 1 vol. 8°.

Digitized by Google

Roma. Ministero delle Finanze. Statistica del commercio speciale di importazione e di esportazione, fasc. di novembre e dicembre 1908, gennaio-settembre 1909. — Bollettino di Legislazione e Statistica doganale e commerciale, anno XXV, settembre-dicembre 1908; XXVI, gennaio-settembre 1909. — Relazione sull'Amministrazione delle Gabelle per l'esercizio 1907-1908. — Movimento della Navigazione del Regno d'Italia nell'anno 1907, vol. I-II. — Tabella indicante i valori delle merci nell'anno 1908 per le statistiche commerciali. — Movimento commerciale del Regno d'Italia nell'anno 1908, parte 1ª-2ª, vol. II, p. 2. — Stati Uniti. Tariffa doganale del 5 agosto 1909 (Ediz. provvisoria). — Notizie complementari alle statistiche giudiziarie penali degli anni 1896-1900. — Statistica giudiziaria penale per gli anni 1905-1906.

** — Ministero dell'Interno. Calendario generale del Regno, a. XLVII, 1909; 8°.

** — Ministero della Pubblica Istruzione. Annuario 1909; 8°.

* — Senato del Regno. Bollettino delle pubblicazioni di recente acquisto. Anno 1908, N. 3-6; 1909, 1-2.

* — Camera italiana dei Deputati. Raccolta degli Atti parlamentari della Legislatura XXII (1904-1909). — Discussioni, vol. I-XXI, Indice generale. — Disegni di Legge, vol. 1-33, Documenti, I-V. — Manuale ad uso dei Deputati per la Legislatura XXIII. — Discorsi parlamentari di E. Gianturco, 1 vol. 8°; Id. id. di G. Zanardelli, 3 voll. 8°. — Catalogo metodico degli scritti contenuti nelle pubblicazioni periodiche italiane e straniere. Parte 1ª: Scritti bibliografici e critici. Indice generale a tutto l'anno 1906.

* — Reale Accademia dei Lincei. Atti. Annuario 1909. — Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Rendiconti, vol. XVIII; Memorie, ser. 5ª, vol. VII, N. 1-10. — Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Rendiconti, Ser. 5ª, vol. XVIII; Memorie, vol. XII, XIV, fasc. 1, 2. — Notizie degli Scavi di antichità, Ser. 5ª, vol. V, fasc. 9-12; VI, 1-8. — Rendiconto dell'adunanza solenne del 6 giugno 1909.

* — R. Ufficio Geologico. Carta geologica d'Italia. 1 : 100.000: Lucania, fol. N. 198-200, 209-212, 8 fol. di sezioni, fol. 10. — Bollettino del Comitato Geologico. Anno 1908, N. 3; 1909, 1.

* — Istituto di Diritto romano. Bullettino. An. XX, fasc. 4-6.

— Società degli Agricoltori italiani. Bollettino quindicinale, vol. XIV, N. 1-22.

— Ufficio centrale Meteorologico e Geodinamico italiano. Annali. Ser. 2ª, vol. XIX, p. 1ª (1897); XXVII, p. 1ª (1905); XXVIII, p. 1ª e 3ª (1906).

* — Pontificia Accademia Romana dei nuovi Lincei. Atti, Anno LXII (1908-1909), Sessione I-VII. — Memorie, vol. XXVI.

* — Biblioteca Vaticana. Studi e Testi, 20. I codici petrarcheschi.

* **Rovereto**. I. R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti degli Agiati. Atti, Ser. 3ª, vol. XIV, fasc. 3 4; XV, 1-2.

* **Saint-Louis**. Mo. Botanical Garden. 19. Annual Report, 1908.

* — Academy of Science. Transactions, vol. XVI, Nos. 8, 9, 1906; XVII, 1, 2, 1907.

* **St-Pétersbourg**. Académie Impᵉ des sciences. Bulletin, Classe physico-mathématique, 5ᵉ Sér., T. XXV, an. 1909; 6ᵉ Sér., 1909, N. 1-17.

Digitized by Google

St-Pétersbourg. Musée Géologique Pierre le Grand. Travaux, T. I, II, III, 1, 1907-1909.

— Observatoire Physique Central Nicolas. Annales, 1904. Supplément, 1905, 1e part., II, fasc. 1, 2; 1905, Suppl. Observatoire magnétique et météorologique d'Irkoutsk.

* — Comité Géologique. Bulletins, 1907, T. XXVI, Nos. 1-4, 8-10; 1908, XXVII, 2, 3. — Mémoires, Nouv. Sér., livrs. 28, 30, 37, 38, 41, 42.

* — Société physico-chimique russe. Journal, XL, 5; XLI, 1-8.

* **San Francisco**. California Academy of sciences. Proceedings, IVe Ser., vol. III, pp. 41-48.

* **Sassari**. Studi sassaresi. An. VI, sez. II, fasc. 3-4; VII, 1-2.

* **Siena**. R. Accademia dei Fisiocritici. Atti, Serie IV, vol. XX, N. 7-10; V, vol. I, 1-6.

— R. Università. Annuario per l'anno accademico 1908-1909.

— R. Archivio di Stato. Inventario delle pergamene conservate nel diplomatico dall'anno 736 all'anno 1250, Parte I. Siena, 1908; 8°.

Stettin. Gesellschaft für Pommersche Geschichte und Alterthumskunde: Baltische Studien, Bd. 32-46, N. F., 1-11. — Monatsblätter, 1882-1908 (*dono del Dr. Giuseppe Piolti*).

* **Stockholm**. K. Svenska Vetenskpsakademien. Arkiv för Matematik, astronomi och fysik, Bd. V, N. 1-2. — Arkiv för botanik, Bd. VIII, 1-4. — Arkiv för zoologi, Bd. V, 1-3. — Handlingar, Bd. XLIII, 7-12. — Meddelanden, Bd. I, 12, 13. — Les prix Nobel en 1906. Stockolm, 1908; 8°.

Stonyhurst. College Observatory. Results of Meteorological and Magnetical Observations, 1908. — With Report and Notes of the Director, Rev. W. Sidgreaves. Liverpool, 1909: 8°.

Strassburg. Università. Tesi di laurea 1906-1907, N. 95. — 1907-1908, N. 93.

— International Kommission für wissenschaftliche Luftschiffahrt. Veröffentlichungen. Jahrg. 1907, Heft 8-12.

* **Stuttgart**. Verein für vaterländische Naturkunde in Württemberg. Jahreshefte, 65. Jahrg. 1909. — Beilage, Ergebnisse der pflanzengeographischen von Württemberg, Baden und Hohenzollern, IV. — Mitteilungen der Geologische Abtheilung des K. Württenbergischen Statistischen Landesamts, N. 6.

* **Svizzera**. Commission Géologique de la Société helvétique des sciences naturelles. Matériaux pour la Carte géologique de la Suisse. XXIX livr. Bibliographie géologique de la Suisse; 2e partie.

Teddington. National Physical Laboratory. Report for the Year 1908.

* **Thonon**. Académie Chablaisienne. Mémoires et Documents, T. XXI, 1908.

Tōkyō. K. Japanische Universität. Medizinische Fakultät, Mitteilungen, Bd. VIII, N. 1-2, 1908.

* — Imperial University College of Science. Journal, vol. XXVI, art. 1; XXVII, 1, 2.

* Imperial Earthquake Investigation Committee. Bulletin, vol. II, 3; III, 1.

* **Torino**. R. Accademia di Agricoltura. Annali, 1908, vol. LI.

* — R. Accademia di Medicina. Giornale, Anno LXXI (1908), N. 1-12; LXXII (1909), N. 1-8.

Digitized by Google

* **Torino**. R. Università. Annuario 1908-1909.
— Musei di Zoologia ed Anatomia comparata della R. Università. Bollettino, Vol. XXIII, 1908.
* — R. Università. Istituto di esercitazioni nelle scienze giuridico-politiche: Abello (L.), Natura giuridica del contratto di somministrazione di merce lavorata. Nota a sentenza. Torino, 1907; 8°. — Brusa (E.), Sulla impugnabilità delle sentenze dell'Alta Corte di Giustizia. Osservazioni. Torino, 1908; 8°. — Brusa (C. F.), Un caso interessante in materia di risarcibilità. Milano, 1908; 8°. — Castellani (A.), Il luogo in cui deve eseguirsi l'obbligazione a senso dell'art. 91 Cod. p. c. Milano, 1908; 8°. — Cottino (V. A.), L'usura, studio critico. Torino, 1908; 8°. — Garbarino (F.), I diritti del coniuge superstite nella successione " ab intestato „. Alessandria, 1908; 8°. — Ottolenghi (E.), La convenzione di presa a domicilio nei trasporti ferroviari di merci e il servizio di traghetto a Venezia. Città di Castello, 1908; 8°. — Id., Ancora sulle dichiarazioni d'ingombro. Milano, 1908; 8°. — Ricca-Barberis (M.), Nuovi appunti intorno agli effetti della sentenza sulla prescrizione dei crediti. Milano, 1907; 8°. — Sincero (L.), La legge 29 giugno 1906 e gli Enti ecclesiastici. Studio giuridico. Torino, 1906; 8°. — Solari (G.), La scuola del diritto naturale nelle dottrine etico-giuridiche dei secoli XVII e XVIII. Torino, 1904; 8°. — Id., L'indirizzo psicologico nelle scienze giuridiche. Torino, 1905; 8°. — Toesca di Castellazzo (C.), La " Dote militare „ ed un caso di conflitto di giurisdizione, Roma, 1907; 8°. — Bianco (E.), Il principio " Solve et repete „ nel diritto pubblico italiano. Chieri, 1909; 8°. — Giordano (G.), Del riscatto convenzionale. Studio. Casale, 1909; 8°. — Magnani (A.), Il diritto sullo spazio aereo e l'areonautica. Torino, 1909; 8°. — Petitti di Roreto (S.), Il diritto al nome patronimico. Torino, 1909; 8°. — Ricci des Ferres (C.), Faida di Comune. Torino, 1909; 8°. — Sarfati (M.), Natura giuridica del contratto di abbonamento alle cassette di sicurezza munite di controchiusura. Città di Castello, 1909; 8°. — Zanetti (C.), Il contratto d'impiego nelle amministrazioni industriali di Stato. Sciopero. Arbitraggio obbligatorio. Brescia, 1909; 8°.
* — R. Politecnico. Classificazione degli allievi che nell'an. scol. 1907-1908 riportarono il diploma di Ingegnere Civile, di Ingegnere Industriale o di Architetto.
* — R. Deputazione sovra gli studi di Storia Patria. Le campagne di Guerra in Piemonte (1703-1708) e l'Assedio di Torino (1706). Studi-documenti-illustrazioni. Vol. IV, VIII. — Biblioteca di Storia italiana recente (1800-1850), vol. II. — Miscellanea di Storia italiana. Serie 3ª, T. XIII.
* — Club Alpino italiano. Rivista, 1909, vol. XXVIII, N. 1-12. — Bollettino, vol. XXXIX, N. 72.
* — Associazione meteorologica italiana. Bollettino bimensuale, Ser. III, vol. XXVII (1908), N. 10-12; XXVIII (1909), 1-9.
— Consiglio Provinciale. Atti, An. 1908.
* — Municipio. Servizi d'igiene e di sanità. Bollettino di statistica, a. XXXVII, 1908, luglio-dicembre. N. 13, riassunto dell'a. 1908; XXVIII,

Digitized by Google

1909, 1-7. — Statistica demografico-sanitaria e servizi dell'Ufficio d'igiene. 1907-1908. — Annuario. 1907-1908. — La vita amministrativa del Comune di Torino nel quinquennio 1903-1908. Torino, 1909. 2 vol. 8°.

Torino. Camera di Commercio. Statistica delle industrie del distretto camerale. Torino, 1909, 8; vol. 1°.

— Associazione Pro-Torino. Pro-Torino. Pubblicazione mensile illustrata, an. V, N. 1-12. — Torino e dintorni. 1909. 1 vol. 8°.

— Scuola professionale per gli Orefici. Relazione, anno V (1° luglio 1908 - 30 giugno 1909).

— Cassa di Risparmio. Resoconto dell'anno 1908.

* **Toronto**. Canadian Institute. Transactions, vol. VIII, part 3

— University of Toronto Studies. Review of historical publications relating to Canada. vol. XIII, 1908.

* **Toulouse**. Université. Faculté des sciences. Annales, 2ᵉ Sér., T. X, 1908, 2ᵉ et 3ᵉ fasc. — Annuaire, An. 1908-1909.

— Revue de la France méridionale. Annales du Midi. XXᵉ Année, 1908, Nos. 79-80; XXI, 1909, 81, 82. — Rapport annuel du Conseil de l'Université (6 janvier 1909). — Comptes rendus des Facultés et des Observatoires.

* **Trieste**. Società di Minerva. Archeografo Triestino. Raccolta di memorie, notizie e documenti particolarmente per servire alla storia della regione Giulia, Serie 3ª. vol. V, fasc. 1.

* **Udine**. Biblioteca e Museo Civico. Bollettino, An. II (1908), N. 3-4; An. III (1909), 1-2.

* **Upsala**. Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis Nova Acta, Ser. IV, vol. II, fasc. 1.

— Universitets. Årsskrift 1908. Bref och skrifvelser af och tiss Carl von Linné..., Deel III. — Bulletin mensuel de l'Observatoire Météorologique, vol. XL (1908).

Valle Pompei. Santuario di Pompei. Calendario 1909.

* **Venezia**. R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Atti, T. LXVIII, disp. 1-9. — Concorsi a premio proclamati nell'adunanza solenne del 23 maggio 1909. — Osservazioni meteorologiche e geodinamiche eseguite nell'anno 1907 nell'Osservatorio del Seminario Patriarcale di Venezia.

— Biblioteca Nazionale di San Marco. Catalogo dei Codici Marciani italiani a cura della Direzione, vol. I (Fondo antico. Classe I, II e III: redatto da Carlo Frati bibliotecario-capo, A. Segarizzi sotto-bibliotecario).

* **Vercelli**. Società Vercellese di Storia ed Arte. Archivio, an. I, fasc. 1-2. — Storici inediti vercellesi. I. C. A. Mella, Responsum pro inclita Vercellarum civitate et ordine decurionum.

* **Verona**. Accademia d'Agricoltura, scienze, lettere, arti e commercio. Atti e Memorie, Serie 4ª, vol. VIII, IX. — Osservazioni meteoriche dell'anno 1907, 1908.

* — Museo civico. Madonna Verona. Bollettino. An. II, fasc. 4; III, 1-3.

Digitized by Google

Vicenza. Accademia Olimpica. Atti, N. Ser., vol. I, annate 1907-1908. L'emigrazione italiana nell'America del Sud. Studi sulla espansione coloniale transatlantica del Dott. Antonio Franchini. Roma, 1908; 1 vol. 8°.

* **Warsawa**. Towarzystwo Nàukowe (Société scientifique). Sprawozdania (Comptes rendus des séances). Rok I, N. 4-8; II, 1-7. — Travaux. Classe des sciences mathématiques et naturelles, An. III, N. 1.

* **Washington**. Smithsonian Institution. Annual Report of the Board Regents... 1907 — Smithsonian Miscellaneous Collections, vol. LI, Nos. 1803, 1807; LII (vol. V, Quarterly Issue, part 1), N. 1792; LIII, 1804, 1805, 1810, 1811, 1812, 1813.

* — Smithsonian Institution. Bureau of American Ethnology. 26 Annual Report, 1904-1905; 4°. — Bulletin, N. 34.

* — Smithsonian Institution. United States National Museum. Bulletin, 61, 62. — Proceedings, vol. XXXIII, XXXIV. — Report on the progress and condition ending June 30, 1908. — Contributions from the U. S. National Herbarium, vol. XII, part 1-3, 5-6.

— Department of Commerce and Labor. Coast and Geodetic Survey. Report of the Superintendent... from July 1, 1907, to June 30, 1908. — Hypsometry. Precise leveling in the United States 1903-1907.

* — Department of Commerce and Labor. Bureau of Standards, Bulletin, vol. V, N. 3-4.

— U. S. Geological Survey (Department of Interior). 29th Annual Report of the Director... to the Secretary of the Interior. — Professional Paper, 58-63. — Bulletin, Nos 328, 335, 337, 338, 340, 343-355, 357-359. 361-367, 369. — Mineral Resources, part 1-2. — Water Supply, 219-222, 226. — Geologic Atlas of the U. S., fol. 151-159.

* — U. S. Naval Observatory. Navy Department. Synopsis of the Report of the Superintendent for the Physical Year ending June 30, 1908.

* — Carnegie Institution. Publications, Nos. 39; 73 (1 vol. diviso in due), 75, 85, 87 (in 2 vol. and Atl.), 89. 90, 93-99, 101-103, 106, 107, 110. — Year Book, No. 7, 1908.

— Library of Congress. Report of the Librarian of Congress and Report of the Superintendent of the Library Building and Grounds, 1908, 1 vol. 8°. — Publications issued since 1907.

* **Wien**. K. Akademie der Wissenschaften. Almanach, 1907. 1908. — Archiv für österreichische Geschichte, Bd. XCIV, 2; XCVI, XCVIII, 1; XCIX, 1. — Fontes rerum Austriacarum. Bd. LX, LXI. — Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Denkschriften, LXXIX, 1 Halb. Bd., LXXXI. — Sitzungsberichte, Bd. CXVI, I, II a, II b, III; CXVIII, I, 1-7; II a. 1-9; II b, 1-7; III, 1-7. — Philosophisch-historische Klasse, Denkschriften, LIII, 1-2. — Sitzungsberichte, Bd. CLIV-CLVII; CLVIII, 1-6; CLIX; CLX, 1-3, 6-8; CLXI, 1, 2, 5, 6, 8. — Mitteilungen der Erdbeben-Kommission, N. F., Nos. XXXII, XXXIII.

* — K. K. Geologische Reichsanstalt. Abhandlungen, Bd. XXI, Heft 1. — Jahrbuch, Jahrg. 1908, LVIII Bd., 3,4 Heft. — Verhandlungen, Jahr. 1908, N. 15-18; 1909, 1-9.

Digitized by Google

Wien. Kommission für die internationale Erdmessung. Verhandlungen... Protokolle über die am 29. Dezemb. abgehaltenen Sitzung. 1908; 8°. — Astronomisch-Geodätische Arbeiten des K. K. Militärgeographischen Institutes, XXII Bd. Astronomische Arbeiten.

* — K. K. Zoologisch-Botanische Gesellschaft. Verhandlungen, Jahrg. 1908, LVIII Bd.

* **Wisconsin.** Geological and Natural history Survey. Supplementary Maps of the Lead and Zing district.

* **Würzburg.** Physikalisch-medicinische Gesellschaft. Sitzungsberichte, 1907, N. 8; 1908, 1-5. — Verhandlungen, N. F., Bd. XL, 2-5.

* **Zagrebu.** Jugoslavenska Akademija znanosti i umjetnosti. Codex diplomaticus Regni Croatiae, Dalmatiae et Slavoniae. Vol. VI. Diplom. ann. 1272-1290 continens. — Grada xa povijest književnosti hrvatske, Kniga 6. — Ljetopis, 1908 (23 Svezak). — Prinosi za hrvatski pravnopovjestni Rječnik, Svez. II (Čteta Grabež). — Rad, Knjiga 174, 176. — Razredi historico-filologički i filosoficko-juridićki, 70-71. — Rjećnik hrvatskoga ili srpskoga jezika, Svezak 27, 4 šestoga Drjela-Mariti-Micati. — Zbornik za narodni život i običaje južnih Slavena, Kg. XIII, Svezak 2; XIV, 1.

* — Kön. Kroat. Slavon. Dalmat. Landesarchives. Berichte, Jahrg. XI, N. 1-4.

* — Hrvatskoga Archeološkoga Društva. Vjestnik, N. S., Sv. X, 1908/9.

* **Zürich.** Naturforschende Gesellschaft. Vierteljahrsschrift, 53. Jahrg., 1908, 1-3 Heft.

PERIODICI 1909.

* **Acta** mathematica. Vol. 32, 1898. Zeitschrift herausg. von G. Mittag-Leffler. Stockholm; 4°.

** **Allgemeine** Deutsche Biographie. Liefg. 269-273. Leipzig; 8°.

** **Almanacco** italiano. An. XIV, 1909. Piccola enciclopedia popolare della vita pratica.

** **Annalen** der Physik und Chemie. Leipzig; 8°.

Annales de biologie lacustre publiées sous la direction du dr. E. Rousseau, 1906. Vol. 1, 2, 3.

** **Annales** de Chimie et de Physique. Paris; 8°.

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure. Paris, T. XXVI.

* **Annals** and Magazine of Natural History. London; 8°.

** **Annals** of Mathematics, second series. Charlottesville; 4°.

** **Antologia** (Nuova). Rivista di scienze, lettere ed arti. Roma; 8°.

** **Archiv** für Entwickelungsmechanik der Organismen, XXVII. Leipzig; 8°.

Archiv für Naturgeschichte. Berlin (Jahrg. 75).

** **Archives** des Sciences physiques et naturelles, etc. Genève; 8°.

** **Archives** italiennes de Biologie... sous la direction de A. Mosso. Turin; 8°.

** **Archivio** per le Scienze mediche. Torino; 8°.

** **Archivio** storico italiano. Firenze; 8°.

Digitized by Google

* **Archivio** storico lombardo. Milano; 8°.
* **Archivio** storico sardo. Edito dalla Società storica sarda. Cagliari; 8°.
* **Archivio** storico per la Sicilia orientale. Catania, 8°.
Archivum Franciscanum historicum. An. I.
* **Ateneo** veneto. — Rivista mensile di scienze, lettere ed arti. Venezia; 8°.
** **Athenaeum** (The). Journal of English and Foreign Literature, Science, the Fine Arts, Music and the Drama. London; 4°.
* **Beiblätter** zu den Annalen der Physik und Chemie. Leipzig; 8°.
* **Beiträge** zur chemischen Physiologie und Pathologie. Braunschweig; 8°.
** **Berliner** philologische Wochenschrift; 8°.
** **Bibliografia** italiana. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. Milano; 8°.
** **Bibliographie** der deutschen Zeitschriften-Litteratur, mit Einschluss von Sammelwerken und Zeitungen. Supplementband. Leipzig; 4°.
Biblioteca nazionale centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. Firenze; 8°.
** **Bibliotheca** mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik. Stockholm; 8°.
** **Bibliotheca** Philologica Classica; 8°.
** **Bibliothèque** de l'École des Chartes; Revue d'érudition consacrée spécialement à l'étude du moyen âge, etc. Paris; 8°.
** **Bibliothèque** universelle et Revue suisse. Lausanne; 8°.
** **Bollettino** Ufficiale del Ministero dell'Istruzione Pubblica. Roma; 8°.
** **Bullettino** (Nuovo) di Archeologia cristiana. Roma; 8°.
** **Bullettino** di Archeologia e Storia dalmata. Spalato; 8°.
** **Centralblatt** für Mineralogie, Geologie und Paleontologie in Verbindung mit dem neuen Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paleontologie. Stuttgart; 8°.
* **Cimento** (Il nuovo). Pisa; 8°.
* **Elettricista** (L'). Rivista mensile di elettrotecnica. Roma; 4°.
** Ἐφημερὶς ἀρχαιολογική. Ἐν Ἀθήναις. 4°.
Eranos. Acta philologica Suecana, 1908, vol. VIII; 1909, IX, 1, 2.
** **Euphorion**, Zeitschrift für Literaturgeschichte.
** **Fortschritte** der Physik im Jahre 1907, 3; 1908, 1. Braunschweig; 8°.
* **Gazzetta** chimica italiana. Roma; 8°.
* **Gazzetta** Ufficiale del Regno. Roma; 4°.
* **Giornale** del Genio civile. Roma; 8°.
** **Giornale** della libreria, della tipografia e delle arti e industrie affini. Milano; 8°.
** **Giornale** storico della Letteratura italiana. Torino; 8°.
Giornale storico della Lunigiana, 1909.
** **Guida** commerciale ed amministrativa di Torino. 8°.
* **Heidelberger Jahrbücher** (Neue). Heidelberg; 8°.
* **Historische** Zeitschrift. München; 8°.
Index librorum recentium (Index Ferrerio). Bologna, 1909, An. I.
* **Jahrbuch** über die Fortschritte der Mathematik, XXXVII, I, 1, 2.

Digitized by Google

** **Jahrbuch** (Neues), für Mineralogie, Geologie und Palaeontologie, etc. 1909, I. II. Beil. Bd. VIII, 1, 2.
** **Jahresberichte** der Geschichtswissenschaft im Auftrage der historischen Gesellschaft zu Berlin herausgegeben von E. Berner. XXVII Jahrg. 1906. Berlin; 8°.
* **Journal** (The American) of Science. Edit. Edward S. Dana. New-Haven. Ser. IV, vol. XXVII; XXVIII; 8°.
** **Journal Asiatique**, ou Recueil de Mémoires, d'Extraits et de Notices relatifs à l'histoire, à la philosophie, aux langues et à la littérature des peuples orientaux. Sér. X, vol. XIII, 1. Paris; 8°.
** **Journal** de Conchyliologie, comprenant l'étude des mollusques vivants et fossiles. 1907; T. LVI. Paris; 8°.
** **Journal** de Mathématiques pures et appliquées. Paris; 4°.
** **Journal** des Savants. Paris; 8°.
** **Journal** für die reine u. angewandte Mathematik. Berlin; 4°.
* **Journal** of Physical Chemistry. Ithaca; 8°.
** **Mathematische** u. Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Leipzig; 8°.
* **Morphologisches** Jahrbuch. Leipzig; 8°.
** **Minerva**. Jahrbuch d. gelehrten Welt. Strassburg; 16°.
** **Modern** language notes. Baltimore; 4°.
* **Monatshefte** für Mathematik und Physik. Wien; 8°.
** **Moyen Age** (Le). Bulletin mensuel d'histoire et de philol. Paris; 8°.
** **Nature**, a weekly illustrated Journal of Science. London; 8°.
* **Nieuw Archieff** voor Wirskunde. Uitgegeven door hel Wiskundig Genootschap te Amsterdam; 8°.
** **Palaeontographica**. Beiträge zur Naturgeschichte der Vorzeit. Stuttgart.
** **Petermanns** Mitteilungen aus Justus Perthes' Geographisch. Anstalt. Gotha; 8°.
** — Ergänzung. N. 159-160.
* **Physical Review** (The); a journal of experimental and theoretical physic. Published for Cornell University Ithaca. New-York; 8°.
** **Poggendorff's** biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften. Leipzig; 8°.
* **Portugalia**. Materias para o estudo do povo portuguez. Porto; 8°.
* **Prace** matematyczno fizyczne. Warzawa; 8°.
* **Psychologische Studien** herausg. von W. Wundt. Neue Folge der Philosophischen Studien. Leipzig; 8°.
** **Quarterly** Journal of pure and applied Mathematics. London; 8°.
** **Raccolta** Ufficiale delle leggi e dei decreti del Regno d'Italia. 8°.
Revista de Mathematica per G. Peano.
** **Revue** archéologique. Paris; 8°.
** **Revue** de la Renaissance. Paris; 8°.
* **Revue** de l'Université de Bruxelles; 8°.
** **Revue** des Deux Mondes. Paris; 8°.
Revue du Mois. Paris; 8°.
** **Revue** générale des sciences pures et appliquées. Paris; 8°.
** **Revue** numismatique. Paris; 8°.

Digitized by Google

** **Revue** politique et littéraire, revue bleue. Paris; 4°.
** **Revue** scientifique. Paris; 4°.
* **Revue** semestrielle des publications mathématiques. Amsterdam; 8°.
** **Risorgimento** italiano. Rivista storica diretta dal prof. B. Manzone. Torino; 8°.
* **Rivista** di Artiglieria e Genio. Roma; 8°.
** **Rivista** di Filologia e d'Istruzione classica. Torino; 8°.
** **Rivista** d'Italia. Roma; 8°.
** **Rivista** di scienza. Organo internazionale di sintesi scientifica. Bologna; 8°.
** **Rivista** filosofica, in continuazione della *Filosofia delle Scuole italiane* e della *Rivista italiana di Filosofia*, Pavia; 8°.
* **Rivista** internaz. di scienze sociali e discipline ausiliarie. Roma; 8°.
* **Rivista** italiana di Sociologia. Roma; 8°.
* **Rivista** storica benedettina. Roma; 8°.
* **Rivista** storica italiana. Torino; 8°.
Rosario (Il) e la Nuova Pompei. Valle di Pompei; 8°.
** **Science**. New-York; 8°.
* **Science Abstracts**. Physics and Electrical Engineering. London; 8°.
* **Sperimentale** (Lo). Archivio di Biologia. Firenze; 8°.
** **Stampa** (La). Gazzetta Piemontese. Torino; f°.
** **Studi** medioevali diretti da F. Novati e R. Renier. Torino; 8°.
* **Tridentum**. Rivista mensile di studi scientifici. Trento; 8°.
* **Wiskundige** Opgaven met de Oplossingen, door de leden van het Wiskundig Genootschap. Amsterdam; 8°.
** **Zeitschrift** für Gletscherkunde für Eiszeitforschung und Geschichte des Klimas. Berlin; 4°.
* **Zeitschrift** für matematischen und naturwissenschaftl. Unterricht, herausg. v. J. C. Hoffmann. Leipzig; 8°.
** **Zeitschrift** für physikalische Chemie. Leipzig; 8°.

Digitized by Google

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALL'ACCADEMIA

NB. Le pubblicazioni notate con * si hanno in cambio
quelle notate con ** si comprano; e le altre senza asterisco si ricevono in dono.

Dal 13 Giugno al 21 Novembre 1909.

Bertini (E.). Sopra la teoria dei moduli di forme algebriche. Note 2ª e 3ª. Roma, 1909; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Besio Moreno (N.). La Pampasia Argentina ante geología moderna, contribución al estudio del desecamiento progresivo del globo. Buenos Aires, 1909; 8° (*dall'A.*).

Brioschi (F.). Opere matematiche. T. V. Milano. 1909; 4° (*dono del Comitato per le onoranze a F. Brioschi*).

Camerano (L.). La Fauna delle nostre Alpi. Firenze, 1909; 8°.

— Ricerche intorno al *Colobus occidentalis* Rochebr. ed altre specie affini (Estr. dal vol. 1° dell'opera " Il Ruwenzori. Relazioni scientifiche „). Milano; 8°.

— Di alcuni Coleotteri dell'Uganda e del Ruwenzori. Id. id.

— Osservazioni intorno al *Felis pardus* subsp. *Ruwenzorii* Camer. Id. id.

— Osservazioni intorno al *Cercopithecus ascanias* Aud. subsp. *Schmidti* Matsch. Id. id.

— Osservazioni intorno al *Buffelus Caffer* subsp. *Radcliffei* Oldf. Thomas. Id. id.

— Osservazioni intorno all'*Equus quagga* subsp. *Granti* Winton. Id. id. (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Cavaccini (Angelina). Tavole per la trasformazione dei gradi sessagesimali in gradi centesimali e viceversa. Napoli, 1909; 4° (*dall'Autrice*).

Coblentz (W. W.). Supplementary Investigations of Infra-red Spectra. Parts V-VII. Washington, 1908: 8° (*dall'A.*).

Durán y Loriga (D. J. J.). La enseñanza de la Matemática. Madrid, 1908; 8°.

— El vocabulario de voces técnicas matemáticas. Madrid, 1908; 8°.

— Notas de Geometría. Madrid, 1908; 8° (*Id.*).

Fragoso (F. J.). Trisecção do angulo. Tvora, 1909; 8° (*Id.*).

Haton de la Goupillière. Oscillations des bennes non guidées. Paris, 1909; 8°.

— Les lois des aires dans le mouvement avec liaisons. Lisbonne, 1909; 8°.

— Potentiel du temps de parcours. Louvain, 1909; 8°.

— Mémoires divers. Paris, 1909; 4° (*dall'A.*).

Jadanza (N.). Geometria pratica. Lezioni date nel R. Politecnico di Torino. Torino, 1909; 1 vol. 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Digitized by Google

Janet (Ch.). Histolyse, sans phagocytose, des muscules vibrateurs du vol chez les reines des Fourmis. Paris, 1907; 4°.

— Histogénèse du Tissu adipeux remplaçant les Muscules vibrateurs histolysés après le vol nuptial, chez les reines des Fourmis. Paris, 1907; 4°.

— Histolyse des muscles de mise en place des ailes, après le vol nuptial, chez les reines des Fourmis. Paris, 1907; 4°.

— Anatomie du corselet et histolyse des muscles vibrateurs, après le vol nuptial, chez la reine de la Fourmi (Lasius Niger). Limoges, 1907; 1 vol. di testo e Atl. in-8° (*dall'A.*).

Leyst (E.). Meteorologische Beobachtungen in Moskau im Jahre 1907.

— Luftelectrische Beobachtungen im Ssamarkand'schen Gebiet während der totalen Sonnenfinsternis am 14 Januar 1907 (*Id.*).

Lombardi (L.). Sulla propagazione del magnetismo nelle aste rettilinee di ferro. Memoria. Roma, 1909; 4° (*Id.*).

Moreno (N. B.). Enseñanza universitaria de las matemáticas. Buenos Aires, 1909; 8° (*Id.*).

Oechsner de Coninck (W.). Sur la stabilité et sur les reactions du chlorure d'uranyle. Bruxelles. 1909; 8°.

— Sur un mode de formation du nitrate d'uranyle. Bruxelles, 1909; 8° (*Id.*).

Pavón (R.). Reflexions sopra la locomoción moderna. Córdoba, 1907; 8° (*Id.*).

Rajna (M.). Una discussione tra l'Osservatorio e un giornale politico quotidiano. Lettere e articoli. Bologna, 1909; 8° (*Id.*).

** **Reichenbach** (L.) et (H. G.) fils. Icones florae germanicae et helveticae simul terrarum adjacentium ergo mediae Europae. Opus..... conditum, nunc continuatum D^re^ G. Beck de Mannagetta. T. XIX, 2 Decas. 23, Lief. 24, 25, 26. Lipsiae et Gerae; 4°.

Roccati (A.). I minerali utili dell'Uganda (Africa orientale inglese). Roma, 1909; 8° (*dall'A.*).

Schiaparelli (G.). Di alcune macchie osservate in Mercurio dal sig. Jarry Desloges la mattina del 19 agosto 1907. Annotazioni. Torino, 1909; 8° (*dall'A. Socio nazionale non residente dell'Accademia*).

** **Seitz** (A.). Fauna palaearctica. Les Macrolépidoptères du Globe. 19-23 livrs.

Sellerio (A.). Le curve limiti di poligonali che si deformano con legge assegnata. Palermo, 1909; 8° (*dall'A.*).

Serretta (F.). Il pensiero geologico attraverso i secoli. Analisi sulle ricerche vulcanologiche del geologo L. Ricciardi. Seconda edizione. Palermo, 1909; 8° (*Id.*).

Taramelli (T.). Di un pozzo trivellato che raggiunge il pliocene marino presso Belgioioso. Milano, 1909; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Traverso (G. B.). Stazione Neolitica di Alba. Parte terza. Alba, 1909; 8°.

— Le miniere d'argento in Sardegna. Alba, 1909; 8° (*dall'A.*).

Welch (W. H.). A Consideration of the Introduction of Surgical Anæsthesia. Boston; 8° (*Id.*).

** **Winkelmann** (A.). Handbuch der Physik. Zweite Auflage. Leipzig, 1905-1909, 6 vol. in-8°.

Digitized by Google

Dal 20 Giugno al 28 Novembre 1909.

Barduzzi (C. E.). " La Giurisdizione Consolare „ nelle terre islamitiche, nell'estremo Oriente, negli Stati vassalli, nei Protettorati, con un'appendice sugli ordinamenti giudiziari coloniali. Torino, 1909; 8° (*dall'A.*).

Boselli (P.). In Memoria di Domenico Carutti. Torino, 1909.

— In Memoria dell'abate Pietro Chanoux. Torino, 1909; 8° (*dall'A. Vice-Presidente dell'Accademia*).

Caillet (L.). Lyon et les Lucquois au XV^e^ siècle. Lyon, 1909; 8° (*dall'A.*).

Catania (Comune di). Relazione dell'Amministrazione Comunale sull'opera compiuta in occasione del disastro di Messina. Catania, 1909; 4°, 2 fasc.

Champollion le jeune, Lettres écrites d'Italie, recueillies et annotées. — Lettres et Journaux recueillis et annotés par H. Hartleben. Paris, 1909; 2 vol. 8° (*dono della signora H. Hartleben*).

Chiesa (Gustavo). Regesto dell'Archivio comunale della Città di Rovereto, fasc. 2°: Estimo dell'anno 1449 (*Dono della Biblioteca Civica*).

Cinquantesimo (Nel) anniversario della guerra liberatrice 1859 1909. Torino, 1909; 8° (*dal Presidente della Lega Franco-italiana*).

Dalla Vedova (G.). Una vecchia idrografia dell'Alto Adige. Trento, 1909; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Di Silvestri Falconieri (Fr.). Sulle relazioni fra la Casa di Borbone e il Papato con una nota sugli ordini religiosi. Roma, 1906; 8° (*dall'A.*).

Eusebio (F.). Alba e suo territorio nella guerra del 1703-1709. Torino, 1909; 8° (*Id.*).

Finocchiaro-Sartorio (A.). Le leggi di Corrado IV. Catania (*Id.*).

** **Funk** (F. X.). Kirchengeschichtliche Abhandlungen und Untersuchungen. Paderborn, 1897; 3 vol. 8°.

Gilson (G.). Le Musée propédeutique. Essai sur la création d'un organisme éducatif extra-scolaire. Bruxelles, 1909; 8° (*dall'A.*).

** **Goetz** (C.). Die Busslehre Cyprians. Eine Studie zur Geschichte des Busssacraments. Königsberg, 1895; 8°.

** **Kayfer** (F.) und **Roloff** (E. M.). Ægyten einst und jetzt. Dritte, völlig neubearbeitete Auflage. Freiburg im Breisgau, 1908; 8°.

** **Labourt** (J.). Le christianisme dans l'empire Perse sous la Dynastie Sassanide (224-632), 2^e^ édit. Paris, 1904; 8°.

Lameire (I.). Les dernières survivances de la souveraineté du Saint Empire sur les États de la monarchie piémontaise. Paris, 1909; 8° (*dall'A.*).

** **Litta**. Famiglie celebri italiane. 2^a^ serie, Foscarini di Venezia, fasc. XLII; D'Aquino di Capua, fasc. XLIII.

** **Minocchi** (S.). Le profezie d'Isaia tradotte e commentate. Bologna, 1907; 1 vol. 8°.

** **Muratori** (L. A.). Rerum italicarum scriptores. T. VIII, p. II, fasc. unico (fasc. 71); T. XXII, p. II, fasc. 2 (fasc. 72); T. XXXII, p. 1^a^, fasc. 4^a^ (fasc. 73); T. XXIV, p. 1^a^, fasc. 2 (fasc. 74).

** **Orientalischen** (Die) Religionen. Berlin und Leipzig, 1906; 2 vol. 8°.

Paoli (G. C.). Fatti e concetti come principj a proposito del " Pensiero di

Digitized by Google

Roberto Ardigò „ di G. Marchesini. Roma-Palermo-Napoli, R. Sandron, 1909; 8° (*dall'A.*).

** **Petrakakos** (Dem. A.). Die Toten im Recht nach der Lehre und den Normen des orthodoxen morgenländischen Kirchenrechts und der Gesetzgebung Griechenlands. Leipzig, 1905; 8°.

** **Rauschen** (G.). Eukaristie und Busssakrament in den ersten sechs Jahrhunderten der Kirche. Freiburg im Breisgau, 1908; 8°.

Raymond (G. L.). System of comparative aesthetics. New York and London, 1909; 8 vol. in-8°.

— Dante and collected verse. New York and London, 1909; 1 vol. 16°.

** **Renz** (F. S.). Die Geschichte der Messopfer-Begriffe oder der alte Glaube und die Neuen Theorien über das Wesen des Unblutigen Opfers. Freising, 1901; 2 vol. 8°.

Rondolino (F.) e **Brayda** (R.). La chiesa di S. Domenico in Torino. Opera storico-artistica pubblicata sotto il patronato della Società Piemontese di Archeologia e Belle Arti. Torino, 1909; in-4° (*dono della Società*).

Sangiorgio (G.). L'italianità dei Romani. Ricordo a Leopoldo Tiberi. Perugia, 1909; 8° (*dall'A.*).

** **Schilling** (O.). Reichtum und Eigentum in der altkirchlichen Literatur. Freiburg im Breisgau, 1908; 8°.

** **Seeberg** (R.). Lehrbuch der Dogmengeschichte. I. Bd.: Die Anfänge des Dogmas im nachapostolischen und altkatholischen Zeitalter. Leipzig, 1908; 8°.

** **Seipel** (J.). Die Wirtschaftsethischen Lehren der Kirchenväter. Wien, 1907; 8°.

Sommer (R.). Psicologia criminale e psicopatologia penale sulla base delle scienze naturali. Traduzione dal tedesco con prefazione e note del Dr. M. Ponzo. Torino, Unione tip.-edit., 1909; 1 vol. 8° (*dono del Trad.*).

Tomassetti (G.) e **Biasiotti** (G.). La Diocesi di Sabina (con documenti inediti). Roma, 1909; 8° (*Omaggio di S. E. il cardinale Cassetta*).

Dal 21 Novembre al 5 Dicembre 1909.

Barraja (E.), **Mattirolo** (O.), **Negri** (G.), **Gola** (G.), **Cassano** (G.), **Couvert** (C.G.). Il botanico Giovanni Francesco Re. La vita, le opere, le onoranze. Torino, 1909; 8° (*dal Socio residente O. Mattirolo*).

Burali-Forti (C.) e **Marcolongo** (R.). Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla Geometria, alla Meccanica, e alla Fisica matematica. Bologna, 1909; 8°.

— Omografie vettoriali con applicazioni alle derivate rispetto ad un punto e alla Fisica matematica. Torino, 1909; 8° (*dagli AA.*).

Guareschi (I.). Correlazioni fra l'azione fisiologica e la costituzione chimica dei corpi. Piacenza, 1909; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Jausseaume (F.). Réflexions sur les volcans et les tremblements de terre. Paris, 1909; 8° (*dall'A.*).

Mattirolo (O.). I tartufi. Come si coltivano in Francia. Perchè non si coltivano e come si potrebbero coltivare in Italia. Note di una visita alle

Digitized by Google

Tartufaie del Dipartimento di Vaucluse (Provenza). Torino, 1909; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*)

Roccati (A.). Osservazioni geologiche nell'Uganda e nella catena del Ruwenzori. Milano, 1909; 8°.

— I minerali utili dell'Uganda (Africa orientale inglese). Roma, 1909; 8°.

— Il supposto porfido rosso della Rocca dell'Abisso (Alpi marittime). Torino, 1909; 8° (*dall'A.*).

Rosenbusch (A.). Elemente der Gesteinslehre Dritte, neubearbeitete Auflage. Stuttgart, 1910; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Dal 28 Novembre al 12 Dicembre 1909.

Gerini (G. B.). Gli scrittori pedagogici italiani del secolo decimonono. Torino, 1909; 8° (*dall'A.*).

Porena (F.). La più antica carta regionale del Regno napolitano. Napoli, 1909; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Sforza (G.). La rivoluzione del 1831 nel Ducato di Modena. Roma-Milano, 1909 (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).

Dal 5 al 19 Dicembre 1909.

Boccardi (G.). Questioni di probabilità. Torino, 1909; 8° (*dall'A.*).

Helmert (F. R.). Die Tiefe der Ausgleichsfläche bei der Prattschen Hypothese für das Gleichgewicht der Erdkruste und der Verlauf der Schwerestörung vom Innern der Kontinente und Ozeane nach den Küsten. Berlin, 1909; 8° (*dall'A. Socio straniero dell'Accademia*).

Oechsner de Coninck (W.). Action du sulfate uranique sur le carbonate de calcium. Bruxelles, 1909; 8° (*dall'A.*).

Sasse (E.). Fermat's grosser Satz. Berlin, 1909; 1 c. in 8° (*dall'A.*).

** **Seitz** (A.). Les Macrolépidoptères du Globe. I. vol. Fauna palaeartica, 24 livr. — Exotica. II. vol. Fauna indoaustralica, 5 livr. Exotica 12. — II. Partie Exotica. Sect. III. Fauna africana, 1 livr. Exotica 11. Stuttgart, 3 fasc. 4°.

Tommasina (T.). Physique de la gravitation universelle basée sur l'action exclusive des forces Maxwell-Bartoli. Genève, 1909; 8° fasc. V-VII (*dall'A.*).

Vicarelli (G.). Compte rendu de la Clinique Obstétricale et Gynécologique de l'Université Royale de Turin, 3°, 4° et 5° année. Ciriè, 1909; 8° (*Id.*).

Dal 12 al 26 Dicembre 1909.

Acsády (Ignazio). La liberazione di Vienna dall'assedio turco del 1683 e la liberazione dell'Ungheria dal giogo turco fino alla pace di Karlovicz del 1699 (Traduzione dall'ungherese). Firenze, 1908; 8° (*dall'A.*).

** **Cambridge** (The). Modern history planned by the late Lord Acton. Vol. VI. The eighteenth century. Cambridge, 1909; 8°.

Mustard (W. P.). Later Echoes of the Greek Bucolic Poets. Baltimore, 1909; 8° (*dall'A.*).

Papa Innocenzo XI e lo sterminio della dominazione turca in Ungheria (Articolo di giornale con nuove note ed aggiunte). Traduzione dall'ungherese. Firenze, 1909; 8°.

Digitized by Google

Profumo (A.). L'incendio di Roma dell'anno 64. Feltre, 1909; 8°.

— Roma sotterranea cristiana. N. S.: " Descrizione analitica dei monumenti esistenti negli antichi cimiteri suburbani „. pubblicata a cura della Commissione di Archeologia sacra. T. I: " Monumenti del cimitero di Domitilla sulla via Ardeatina „, descritti da Orazio Marucchi. Fasc. 1°. Roma Spithoever, 1909. Padova, 1909: 8° (*dall'A.*).

Romano (S.). Il Comune. Parte generale. Milano. 1909; 1 vol. 8° (*Id.*).

** **Seeberg** (R.). Lehrbuch der Dogmengeschichte. II Bd. Die Dogmenbildung in der Alten Kirche. Zweite, durchweg neu ausgearbeitete Auflage. Leipzig, 1910; 8°.

Dal 19 Dicembre 1909 al 2 Gennaio 1910.

Mosso (A.). Stazione preistorica di Coppa Nevigata presso Manfredonia. Roma, 1909; 4° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).

Somigliana (C.). Sulle deformazioni elastiche non regolari. Roma, 1909; 8° (*Id.*).

Павлов (*Аналолій*). ИЗВЛЕЧЕНІЕ ВСЕХ КОРНЕЙ. Moscou, 1909. f. v.

Dal 26 Dicembre 1909 al 9 Gennaio 1910.

Bourgeois (H.). Ethnographie Européenne. Bruxelles, 1909; 8° (*dall'A.*).

** **Justiniani Augusti** Digestorum seu Pandectarum codex Florentinus olim Pisanus phototypice expressus. Vol. II. fasc. VIII. Roma, MCMIX; fol.°

** **Litta.** Famiglie celebri italiane (2ª serie): Caracciolo di Napoli, fasc. XLIV; Provana, fasc. XLV.

** **Muratori** (L. A.). Rerum italicarum scriptores: fasc. 2° del T. XXIV, p. XIII (fasc. 76); 4°.

Petrone (I.). L'inerzia della volontà e le energie profonde dello spirito. Napoli, 1909; 8° (*dall'A.*).

Reycend (G. A.). Chiesa e Santuario di N. S. della Salute (Torino - Borgo Vittoria). Torino, 1909: in-f° (*Id.*).

Zawodny (J.). Der grösste Philosoph (S. Augustinus). Prag, 1908; 8° (*Id.*).

Dal 2 al 16 Gennaio 1910.

Eliot (Ch. W.). The Fruits of Medical research with the Aid of Anaesthesia and Asepticism. Boston, 1909; 8° (*dall'A.*).

Helmert (F. R.). Die sechzehnte Allgemeine Konferenz der Internationalen Erdmessung zu London-Cambridge, September 1909. Stuttgart, 1909; 8° (*dall'A. Socio straniero dell'Accademia*).

Largaiolli (V.). Ricerche biolimnologiche sui laghi Trentini. Il lago di Cei. Trento, 1909; 8° (*dall'A.*).

Ravelli (A.). Memoria dimostrativa sull'energia del moto ondoso del mare e sulla utilizzazione di questa energia a scopo industriale. Prato, 1909; 4° (*Id.*).

Tello (W.). El espíritu universitario mundial. Buenos Aires, 1900; 8° (*Id.*).

Digitized by Google

Dal 9 al 23 Gennaio 1910.

Allievo (G.). Gian Giacomo Rousseau filosofo e pedagogista. Torino, 1909; 8° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).

Armando (V.) e **Manno** (A.). Bibliografia dell'assedio di Torino dell'anno 1706. Torino, 1909; 8° (*dagli AA.*).

Calò (G.). Il problema della libertà nel pensiero contemporaneo. Milano-Palermo-Napoli, 1906; 1 vol. 8°.

— La psicologia dell'attenzione in rapporto alla scienza educativa. Firenze, 1907; 8° (*dall'A. per concorrere al premio Gautieri per la Filosofia*).

Del Lungo (I.). Per la lingua d'Italia. Roma, 1909; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

La Rocca (L.). Istruzioni al Marchese Falletti di Castagnole vicere di Sardegna dal 1831 al 1835. Catania, 1909; 8° (*dall'A.*).

Lattes (A.). Le leggi civili e criminali di Carlo Felice pel regno di Sardegna. Cagliari, 1909; 8° (*Id.*).

Lucchetti (L.). Les images dans les œuvres de Victor Hugo. Essai avec portrait et biographie du Maître et notes explicatives. Nouvelle édition corrigée et augmentée avec préface de Maurice Souriau Prof. à l'Université de Caen. Veroli, 1909; 8° (*Id.*).

Martini (A.). I fatti psichici riviviscenti (Studio psicologico). Catania, 1909; 1 vol. 8° (*Id.*).

** **Monumenta** Germaniae historica: Scriptorum qui vernacula lingua usi sunt. T. VI, p. II. — Legum Sectio IV. Constitutiones et Acta publica imperatorum et regum. T. V, pars prior. — Diplomatum regum et imperatorum Germaniae. T. IV. Conradi II Diplomata.

Dal 16 al 30 Gennaio 1910.

Baiardi (D.) e **Fusari** (R.). Per Giovanni De Lorenzi. Torino, 1909; 8° (*dagli AA.*).

Bovero (A.). Sull'epoca della comparsa delle ghiandole uterine. Torino, 1909; 8° (*dall'A.*).

Bruni (A. C.). Stato attuale della dottrina dell'istogenesi delle fibre connettive ed elastiche. Torino, 1909; 8° (*Id.*).

Civalleri (A.). L'Ipofisi faringea nell'uomo. Leipzig, 1909; 8° (*Id.*).

Fusari (R.). Su di un'anomalia arteriosa della midolla spinale nell'uomo. Torino, 1909; 8°.

— Antonio Zincone. Cenno necrologico. Torino, 1909; 8° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).

Grassi (G.). Corso di Elettrotecnica. Vol. II, 2ª ediz. riveduta ed ampliata. Torino; 8° (*Id.*).

Mattirolo (O.). Prove di coltivazione dell'Helianti (" Helianthus decapetalus „ Linn.) detto Scorzanera d'America (" Salsifis d'Amérique „). Torino, 1910; 8° (*Id.*).

** **Seitz** (A.). Les Macrolépidoptères du Globe. Exotica. Fauna indoaustralica. Vol. II, 6 livr.

Digitized by Google

Dal 23 Gennaio al 6 Febbraio 1910.

Fenger (L.). Le temple Etrusco-Latin de l'Italie centrale. Copenhague, 1909; fol.° mass. (*dono della R. Accademia di scienze e lettere di Danimarca*).

Leipzig: Universität. Festschrift zur Feier des 500 Jährigen Bestehens der Universität Leipzig herausgegeben von Rektor und Senat. 1409-1909. Leipzig, 1909; 4 Tomi in 5 vol.; 4°.

Massarani (Tullo). Scritti editi e inediti. Roma, tip. Forzani e C., 1907; 2 vol. 8° (*Dono degli esecutori testamentari*).

Muratori (L. A.). Rerum italicarum scriptores. Fasc. 77, 5° del T. XVIII, p. 1ª.

Romano (G.). Le dominazioni barbariche in Italia (395-1024). Milano, 1909; 1 vol. 8° (*dall'A.*).

Dal 30 Gennaio al 13 Febbraio 1910.

Report on the progress of Agriculture in India for 1909. Calcutta, 1909; 8°.

Guidi (Camillo). Prove comparative su travi di beton armate con tondini o con quadretti tipo Jonson. Milano, 1909; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Dal 6 al 20 Febbraio 1910.

Massarani (T.). Opere: I. Studi civili, 4 vol. 8°; II. Studi letterari e artistici, 2 vol. 8°; III. Saggi poetici, vol. III-V, 3 vol. 8°; IV. Ricordi, 7 vol. 8°. Firenze, Le Monnier, 1906-1910, 16 vol. 8°.

Borsi (U.). Le funzioni del Comune italiano. Roma-Napoli, 1909; 1 vol. 8° (*dall'A.*).

Dal 13 al 27 Febbraio 1910.

Galilei (G.). Opere, vol. XX ed ultimo. Edizione nazionale sotto gli auspici di Sua Maestà il Re d'Italia. Firenze, 1909: 4°.

Jadanza (N.). Storia del cannocchiale. Torino, 1910; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Lebon (E.). Gaston Darboux. Biographie, bibliographie analytique des écrits. Paris, 1910; 4° (*dall'A.*).

Dal 20 Febbraio al 6 Marzo 1910.

Gallo (G.ma). Della vita e delle opere di Giuseppe Regaldi. Novara, 1909; 8° (*dall'A.*).

Marini (R. A.). Zecche e Zecchieri della Real Casa di Savoia. Milano, 1909; 8° (*Id.*).

Orsi (P.). Storia politica d'Italia. Milano, s. a., 2 vol. 4°.

— L'Italia moderna. Storia degli ultimi 150 anni. Terza edizione riveduta ampliata e continuata sino al 1909. Milano, 1910; 8° (*dall'A. per concorrere al Premio Gautieri per la Storia*).

Pagliotti (C.). Cuorgnè e l'alto Canavese. 2ª ediz. Torino, 1907; 8° (*dall'A.*).

Roberti (M.). Le Magistrature giudiziarie veneziane e i loro capitolari fino al 1300. Padova, 1907-1909; 4° (*dall'A. per concorrere al Premio Gautieri per la Storia*).

Digitized by Google

Dal 27 Febbraio al 13 Marzo 1910.

Boccardi (G.). Ricerche su i Cataloghi di Stelle. Torino, 1909; 4° (*dall'A.*).

Festa (E.). Nel Darien e nell'Ecuador. Diario di viaggio di un naturalista. 1909. Unione tip. edit. torinese; 1 vol. 8° (*dall'A.*).

Guareschi (I.). Galeazzo Piccinini. Unione tipogr. edit. torinese, 1910; 8° (*dall'A., Socio nazionale residente dell'Accademia*).

Guerrini (G.). Primäres Sarkom der Konjunktiva beim Rinde. Leipzig, 1909; 8°.

— Ueber einen Fall von Ren policysticus beim Kalbe. Wien, 1909; 8°.

— Index parassitorum qui exstant in Instituto Pathologico Regiae Scholae Superioris Medicinae Veterinariae Mediolani. Bologna, 1909; 8°.

— Su di un caso di " cyclops rhynchaenus „ (Gurlt) osservato in un cane. Milano, 1909; 8°.

— Note di casistica teratologica. Milano, 1909; 8°.

— I neoplasmi negli animali. Genova, 1909; 8°.

— I neoplasmi dell'occhio negli animali. Genova, 1909; 8°.

Dal 6 al 20 Marzo 1910.

Asmundo (M.). La diplomazia europea. Discorso. Ancona, 1910; 8° (*dall'A.*).

Croce (B.). Problemi di estetica e contributi alla storia dell'estetica italiana. Bari, 1910; 1 vol. 8° (*Id.*).

Del Cerro (E.). Giuseppe Mazzini e Giuditta Sidoli (Con documenti inediti). Torino, 1909; 8° (*dall'A. per concorrere al premio Gautieri per la Storia*).

D'Ercole (P.). Necrologio ovvero il pensiero, gli scritti e l'insegnamento del prof. P. R. Trojano. Torino, 1910; 8° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).

Ghetti (B.). I patti tra Ferrara e Venezia dal 1191 al 1313 esaminati nel loro testo e nel loro contenuto storico. Roma, 1907; 4° (*dall'A. per concorrere al premio Gautieri per la Storia*).

Masci (F.). Paolo Raffaele Trojano. Parole commemorative. Napoli, 1910; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Pigorini (L.). Gli abitanti primitivi dell'Italia. Roma, 1910; 8° (*dall'A. Socio nazionale non residente dell'Accademia*).

Dal 13 Marzo al 3 Aprile 1910.

Bertini (E.). Applicazione della geometria sopra una curva alla dimostrazione di un teorema di Geiser. Palermo, 1910; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Cabreira (A.). Les mathématiques en Portugal, deuxième défense des travaux de A. C. Lisbonne, 1910; 8° (*dall'A.*).

** **Carte** géologique internationale de l'Europe: 49e feuilles à l'échelle de 1:1.500.000, livr. VI. Berlin, 1909; fol. mass.

Digitized by Google

Mascart (E.). Recherches sur le spectre solaire ultra-violet et sur la détermination des longueurs d'onde. Paris, 1864; 8°.
— Sur les enregistrateurs de l'électricité atmosphérique et du magnétisme terrestre. Paris, 1881; 8°.
— Sur la construction de la règle géodésique internationale. Paris, 1880; 4°.
— Notice sur les travaux scientifiques. Paris, 1884; 4°.
— Électricité moderne. Paris, 1894; 8°.
— Aimantation induite par le champ terrestre sur les aimants. Cincinnati, 1899; 8°.
— Rapports sur l'Exposition internationale d'électricité et sur les Travaux du Congrès des électriciens. Paris; 8°.
Mascart (J.). Correction aux tables des logarithmes décimales de Borda. Paris, s. a.
— Enseignement de l'Astronomie. Système métrique. Les planètes et leur origine. Paris, 1909; 8°.
— Comparaison des anciennes mesures. Paris, 1908; 8°.
— Les problèmes de Mars. Bruxelles, 1910; 8°.
Mattirolo (L.). Luigi Mosca. Torino, 1910; 8° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).
Médaille offerte à Mascart. Paris, 1900; 8°.
Pinazzoli (R.) e **Masini** (A.). Osservazioni meteorologiche fatte all'Osservatorio della R. Università di Bologna dell'annata 1908 eseguite e calcolate dagli astronomi aggiunti. Bologna, 1909; 4° (*dal Direttore dell'Osservatorio M. Raina*).
Vercelli (F.). Le teorie idrodinamiche delle sesse e loro applicazione al calcolo dei periodi e dei moti delle sesse del Benaco. Milano, 1910; 4° (*dal Presidente della Commissione per lo studio dei laghi lombardi prof. G. Celoria Socio corrispondente dell'Accademia*).

Dal 20 Marzo al 10 Aprile 1910.

Bollea (L. C.). Gli " Statuta comunis Placentiae „ del 1323. S. a. l.
— Il misticismo di S. Bonaventura studiato nelle sue antecedenze e nelle sue esplicazioni. Torino, 1901; 8°.
— Le prime relazioni fra la Casa di Savoia e Ginevra (926-1211). Torino, 1901; 8°.
— Pubblicazioni dell'Istituto storico italiano dal 1891 al 1903. Pinerolo, 1904; 8°.
— Un diurno di guerra di Carlo Emanuele I Duca di Savoia, pubblicato con prefazione e riproduzioni fototipiche di piani militari sincroni. Torino, 1905; 8°.
— La rivoluzione di una terra del Piemonte (1797-1799). Torino, 1905; 8°.
— Antonio Maria Spelta e la sua Storia della guerra per la successione di Monferrato (1613-1618). Pavia, 1906; 8°.
— Una fase militare controversa della guerra per la successione di Monferrato (aprile-giugno 1615). Alessandria, 1906; 8°.
— Un anno di carteggio epistolare fra Carlo Emanuele I di Savoia e l'Infante Caterina d'Austria sua moglie. Torino, 1906; 8°.

Digitized by Google

Bollea (L. C.). L'assedio di Bricherasio dato da Carlo Emanuele I Duca di Savoia (18 settembre-23 ottobre 1594. Torino; 8°.

— Atti del Congresso internazionale di scienze storiche del 1903, recensione. Torino, 1908; 8°.

— Le idee religiose e morali di Carlo Emanuele I Duca di Savoia. Torino, 1908; 8°.

— La biblioteca Cavagna-Sangiuliani in Zelada in alcuni cataloghi pubblicati dal conte Antonio Cavagna-Sangiuliani. Torino, 1909; 8°.

— Documenti degli archivi di Pavia relativi alla Storia di Voghera. Pinerolo, 1910; 8° (*dall'A.*).

Iodice (V.). Storia dei Siculi Napoletani (Tempi antichi). Torino, 1910; 8° (*dall'A. per concorrere al premio Gautieri per la Storia*).

Lanzoni (F.). Sopra un manoscritto antico intorno alla vita del beato Nevolone Faentino. Nota critica. Faenza, 1903; 8°.

— San Mercuriale, vescovo di Forlì nella leggenda e nella storia. Roma, 1905; 8°.

— S. Severo, vescovo di Cesena. Note critiche. Faenza, 1906; 8°.

— I primordi della Chiesa Faentina. Faenza, 1906; 8°.

— Le origini del Cristianesimo e dell'Episcopato nell'Umbria romana. Note critiche. Roma, 1907; 8°.

— S. Petronio, vescovo di Bologna, nella storia e nella leggenda. Roma, 1907; 1 vol. 8°.

— Di una legge sull'esecuzione del canto gregoriano inesattamente formulata. Roma, 1909; 8°.

— Le figure dell' " ancus „ o " climacus liquescens „ nei mss. gregoriani. Loro significato ed esecuzione. Roma, 1908; 8°.

— Il " liber Pontificalis „ Ravennate. Saronno, 1909; 8°.

— Un antico vescovo d'Imola. Faenza, 1909; 4°.

— Il primo vescovo di Comacchio. Bologna, 1909; 8°.

— I primordi dell'ordine Francescano in Faenza. Faenza, 1910; 8° (*dall'A.*).

Muratori (L. A.). Archivio Muratoriano. Studi e ricerche in servigio della nuova edizione dei " Rerum italicarum scriptores „. N. 7.

— Rerum italicarum scriptores. Fasc. 78; 5° del T. XXXI, p. 1ª.

Dal 3 al 17 Aprile 1910.

** **Dalton** (J.). A New System of Chemical Philosophy. Manchester, 1808-1827; 3 vol. 8°.

Guareschi (I.). La Chimica in Italia. Introduzione. Cenni sullo Stato dell'Italia nella seconda metà del secolo XVIII. — I. J. B. Beccari. Vincenzo Menghini. G. B. Beccaria. Felice Fontana. Giovanni Fabbroni. Angelo Saluzzo. Torino, 1909; 8° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).

Dal 10 al 24 Aprile 1910.

De Luca (P.). I Liberatori. Glorie e figure del risorgimento (1821-1870). Nuova edizione riveduta ed ampliata con 361 illustrazioni e 14 tavole.

Digitized by Google

Bergamo, 1909; 4° (*dall'A. per concorrere al premio Gautieri per la Storia*).

** **Muratori** (L. A.). Rerum italicarum scriptores. Fasc. 79 (fasc. 5° del T. XXXII, p. 1ª).

Saleilles (R.). De la personnalité juridique. Histoire et Théories. Paris, 1910; 1 vol. 8° (*dall'A. Socio straniero dell'Accademia*).

Dal 17 Aprile al 1° Maggio 1910.

** **Reichenbach** (L.) et (H. G.) fils. Icones florae germanicae et helveticae simul terrarum adjacentium ergo mediae Europae. Opus... conditum, nunc continuatum Dr° G. Beck de Mannagetta. T. XIX, Decas 28-30. Lipsiae et Gerae: 4°.

Dal 1° al 15 Maggio 1910.

Fermor (L. L.). The Manganese-ore deposits of India. Calcutta, 1910; 4 vol. 8° (*dall'A. per concorrere al premio Bressa*).

Sacco (F.). L'évolution biologique et humaine: essai synthétique et considérations. Turin-Paris, 1910; 1 vol. 8°.

Taramelli (T.). Osservazioni stratigrafiche nell'Alta Valle Brembana e presso a Como. Milano, 1910; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Dal 24 Aprile al 12 Giugno 1910.

* **Biàdego** (G.). Pisanus Pictor. Nota 4ª. Venezia, 1910; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Borgherini (Maria). Il governo di Venezia in Padova nell'ultimo secolo della Repubblica (dal 1700 al 1797. Padova, 1909; 8° (*dall'A.*).

* **Litta**. Famiglie celebri italiane. 2ª Ser., fasc. XLVI: Provana, D'Aquino di Capua; XLVII: D'Aquino di Napoli.

Petrone (I.). Il diritto nel mondo dello spirito. Milano, 1910: 1 vol. 8° (*dall'A.*).

Rodolfo (G.). Il combattimento al ponte sul Po il 16 agosto 1630 e la pestilenza e la carestia nel 1630 e 1631 a Carignano. Carmagnola, 1909; 8°.

Dal 15 Maggio al 19 Giugno 1910.

Carnazzi (P.). Azione della resina sulle lastre fotografiche. Pisa, 1906; 8° (*dall'A.*).

Ceresole (G.). Le differenti indicazioni della Talassoterapia secondo la spiaggia, la stagione e l'ora del giorno. Venezia, 1909; 8°.

— L'oftalmo-reazione nelle malattie cutanee. Venezia, 1909; 8°.

— La cura dell'ulcera perforante colle scintille di alta tensione. Venezia, 1909; 8°.

— La Teleradiografia. Venezia, 1909; 8°.

— La cura delle artriti e delle miositi blenorragiche coi raggi Röntgen. Venezia, 1909; 8° (*Id.*).

Digitized by Google

Coblentz (W. W.). Bericht über die neueren Untersuchungen über ultrarote Emissionsspektren. Leipzig: 1910; 8° (*Id.*).

Darwin (Sir G. H). Scientific Papers. Cambridge, 1907-1910. Vol. I. Oceanic Tides and Lunar disturbance of Gravity. Vol. II. Tidal Friction and Cosmogony. Vol. III. Figures of Equilibrium of Rotating Liquid and Geophysical Investigations (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Firenze. Comitato permanente " Pro Flora italica ". Regolamento. Firenze, 1910; 8°.

Gurinar~es (R.). Les mathématiques en Portugal, 2e édit. Coimbre, 1909; 1 vol. 8°.

Kornen (T.). Sur les relations du gradient barométrique avec le vent et avec quelques éléments météorologiques à O-Gyalla et à Hornsrev. Upsala. 1910; 8° (*dall'A.*).

Lussana (S.). Sul calore specifico dei liquidi a pressione costante sotto varie pressioni. Pisa, 1908; 8°.

— Sull'influenza della pressione e della temperatura sulla resistenza elettrolitica. Pisa, 1909; 8°.

— Proprietà termiche dei solidi e dei liquidi. II. Pisa, 1910: 8° (*dall'A.*).

Meyer (E. von). Ueber dimolekulare Nitrile und ihre Abkömmlinge. Leipzig, 1895; 8°.

— Ueber Konstitution und Bildungsweise der Kyanalkine genannten trimolekularen Nitrile. Leipzig. 1905; 8°.

— Neue Beiträge zur Kenntnis der dimolekularen Nitrile. Leipzig, 1908; 8°.

— Ueber Zersetzungsweisen vierfach-alkylierter Ammoniumverbindungen. Leipzig, 1909; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Neumann (C.). Ueber das Logarithmische Potential einer gewissen Ovalfläche. Leipzig, 1909; 8° (*Id.*).

** **Seitz** (A.). Les Macrolépidoptères du Globe. Vol. I. Fauna palaearctica, livrs. 26, 27. Vol. II. Fauna indoaustralica, livr. 7; Exotica, 14.

Sella-Starabba (F.). L'eruzione etnea del 1910 dal 23 al 31 marzo. Roma, 1910; 8° *dall'A.*).

Dal 12 al 26 Giugno 1910.

Pesce (A.). Una necropoli romana nel territorio ovadese. Asti, ...; in-8°.

Pivano (S.). Da Berengario I ad Arduino. Firenze, 1909; 8°.

— " Consortium " o " Societas " di chierici e laici ad Ivrea nei secoli IX e X. Catania.

— Sistema Curtense. Roma, 1909; 8° (*dall'A. per concorrere al premio Gautieri per la Storia*).

** *Monumenta Germaniae historica*: Legum Sectio IV. Constitutiones et Acta publica Imperatorum et Regum. T. VIII, Pars I. Scriptorum rerum Merovingicarum. T. V.

Rinaudo (C.). Il Risorgimento italiano; Conferenze con Appendice bibliografica. Torino, 1910; 2 vol. in-8° (*dall'A.*).

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 21 Novembre 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: NACCARI, Direttore della Classe, SPEZIA, PEANO, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA, MATTIROLO, GRASSI, SOMIGLIANA, FUSARI e CAMERANO Segretario.

Si legge e si approva l'atto verbale della seduta precedente.

Il Presidente dà il benvenuto ai Colleghi, ed augura loro buon anno accademico.

Il Socio SEGRE scusa la sua assenza.

Il Presidente annunzia la morte del Socio corrispondente Simone NEWCOMB, avvenuta a Washington l'11 luglio 1909, dice brevemente dei suoi meriti e comunica alla Classe che vennero inviate condoglianze alla famiglia.

Annunzia pure la morte del prof. Senatore Valentino CERRUTI, alla famiglia del quale vennero pure inviate le più vive condoglianze.

Il Presidente dà conto dei lavori del Comitato per le onoranze ad " Amedeo Avogadro „. Numerose sono già le offerte pervenute: il Comitato propone che vengano ad esso aggiunti il Tesoriere dell'Accademia e i Sindaci di Torino e Biella. La Classe approva.

Digitized by Google

Comunica: 1° le lettere di ringraziamento per l'invio del vol. LIX delle Memorie accademiche, di S. E. il Ministro della Real Casa a nome di S. M. il Re e dell'Aiutante di Campo di S. A. R. il Duca di Genova; 2° l'invito a sottoscrivere per un ricordo in onore del compianto Valentino Cerruti; 3° l'invito al Congresso internazionale di Botanica a Bruxelles nel maggio 1910 e del Congresso internazionale di Zoologia di Graz nell'agosto 1910. La rappresentanza dell'Accademia verrà data ai Soci prof. Mattirolo e Camerano.

Il Presidente presenta poscia i seguenti libri pervenuti in dono all'Accademia:

1° *Opere matematiche* di Francesco Brioschi, vol. V ed ultimo, omaggio del Comitato per le Onoranze a F. Brioschi;

2° *Geometria pratica. Lezioni date nel R. Politecnico di Torino,* omaggio del Socio Jadanza;

3° *Di alcune macchie osservate in Mercurio dal sig. Jarry Desloges la mattina del 19 agosto 1907, Annotazioni,* dal Socio nazionale non residente G. Schiaparelli;

4° *Sopra la teoria dei moduli di forma algebrica,* nota 2ª e 3ª, dal Socio corrispondente prof. E. Bertini;

5° *Arbeiten aus dem pathologische Institute zu Leipzig,* fasc. 1-4, dal Socio corrispondente prof. Felice Marchand.

Il Socio Mattirolo fa omaggio alla Classe di due suoi lavori intitolati: 1° *I Tartufi. Come si coltivano in Francia. Perchè non si coltivano e come si potrebbero coltivare in Italia.* — 2° *Il botanico Giovanni Francesco Re, la vita, le opere e le onoranze.*

Il Socio Spezia presenta a nome del Dr. Alessandro Roccati:

a) *I minerali utili dell'Uganda (Africa orientale inglese);*

b) *Il supposto porfido rosso della Rocca dell'Abisso (Alpi marittime);*

c) *Osservazioni geologiche nell'Uganda e nella catena del Ruwenzori* e la sua nota *Ueber das metallische Natrium als die angebliche Ursache der natürlichen blauen Farbe des Steinsalzes.*

Digitized by Google

Il Socio PEANO presenta:

C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO: *a) Omografie vettoriali con applicazione alle derivate rispetto ad un punto e alla Fisico-matematica; b) Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla Geometria, alla Meccanica e alla Fisico-Matematica.*

Il Socio GUARESCHI presenta:

Correlazioni fra l'azione fisiologica e la costituzione chimica dei corpi.

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° C. BURALI-FORTI, *Sulla Geometria differenziale assoluta delle congruenze e dei complessi rettilinei,* dal Socio PEANO;

2° Carlo Alberto DELL'AGNOLA, *Sul teorema di Borel,* dal Socio PEANO.

Il Socio SOMIGLIANA, a nome anche del Socio NACCARI, legge la relazione sulla Memoria del Dr. E. LAURA, *Sopra i moti armonici semplici smorzati di un mezzo elastico omogeneo isotropo.* La relazione che conchiude per l'accettazione della Memoria è approvata all'unanimità e pure all'unanimità con votazione segreta è accolta la stampa della Memoria stessa nei volumi accademici.

Il Socio CAMERANO presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* il lavoro del Dr. E. ZAVATTARI, intitolato: *I muscoli ioidei dei Sauri in rapporto con i muscoli ioidei degli altri vertebrati.* Parte 2ª, *Ricerche morfologiche.* Il Presidente delega i Soci FUSARI e CAMERANO per riferire intorno ad essa.

Il Socio CAMERANO presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* il suo lavoro intitolato: *Franco Andrea Bonelli e i suoi concetti evoluzionistici.* Con votazione segreta la Classe approva questa Memoria per la stampa nei volumi delle *Memorie* accademiche.

Digitized by Google

LETTURE

Sulla Geometria differenziale assoluta delle congruenze e dei complessi rettilinei.

Nota di C. BURALI-FORTI (Torino).

Il punto P varî in un campo continuo Σ a tre dimensioni, e sia

$$f(P) = u$$

un *vettore unitario* funzione, pure continua, di P.

Le rette $Pf(P)$, o brevemente Pu, cioè le parallele condotte da ciascun punto P di Σ al corrispondente vettore $f(P)$, formano un sistema di rette che, in generale, è un *complesso* rettilineo. Se nel campo Σ esiste una superficie S tale che: fissato ad arbitrio P in Σ si possa determinare un sol punto Q di S in modo che P giaccia sulla retta $Qf(Q)$, ed inoltre, comunque varî P in questa retta si abbia sempre

$$f(P) = f(Q),$$

allora il sistema di rette è una *congruenza*, poichè ogni retta g del sistema si può far corrispondere univocamente ad uno dei punti comuni a g e ad una superficie S.

L'omografia vettoriale (*)

$$\alpha = \frac{df(P)}{dP} = \frac{du}{dP}$$

(*) Per denominazioni e notazioni cfr. *Elementi di calcolo vettoriale...* (N. Zanichelli, Bologna), *Omografie vettoriali...* (G. B. Petrini, Torino), (1909) di C. Burali-Forti e R. Marcolongo. — Nelle citazioni indicherò il secondo di questi due libri brevemente con **H**.

Digitized by Google

ha grande importanza per lo studio dei complessi e delle congruenze. In questa breve nota mi limito ad esporre, dimostrandole, quelle proprietà geometriche di α che servono di fondamento ad uno studio particolareggiato, completo ed *assoluto* (cioè del tutto indipendente da coordinate) (*), delle congruenze e dei complessi rettilinei.

1. Proprietà generali di α. — Come è noto (**H**, n. 20) l'omografia α è l'operatore che applicato ad uno spostamento infinitesimo qualunque dP di P produce il corrispondente spostamento $d\boldsymbol{u}$ di $\boldsymbol{u}$,

$$\alpha dP = d\boldsymbol{u};$$

quindi, affinchè α sia determinata da questa proprietà, è necessario si possano considerare almeno tre spostamenti dP in direzioni non complanari.

Variando P in un campo continuo a tre dimensioni α (se esiste, e ne ammettiamo l'esistenza quando è definita) è definita nei punti P di Σ, eccettuati, al più, punti isolati, o formanti linee isolate, nel contorno (se esiste) di Σ.

Segue che: *eccettuati al più punti speciali di* Σ, *la coniugata di* α *applicata al vettore* $\boldsymbol{u}$ *dà il vettore nullo, e, quindi,* α, *insieme a* $K\alpha$, *è degenere, cioè il suo invariante terzo è nullo,*

$$K\alpha\boldsymbol{u} = 0, \qquad I_3\alpha = I_3 K\alpha = 0. \tag{1}$$

Invero. Essendo $\boldsymbol{u}$ unitario $\boldsymbol{u} \times d\boldsymbol{u} = 0$, e poichè $d\boldsymbol{u} = \alpha dP$, si ha $\boldsymbol{u} \times \alpha dP = 0$, dalla quale si trae (**H**, n. 9, [6])

$$(K\alpha\boldsymbol{u}) \times dP = 0;$$

questa, essendo valida per almeno tre direzioni non complanari dP, prova che $K\alpha\boldsymbol{u} = 0$.

(*) Il metodo algebrico ordinario richiede *otto* coordinate per " ogni retta della congruenza „ e ne richiederà *nove* " per ogni retta del complesso „.

Digitized by Google

L'omografia α *trasforma un qualsiasi vettore* $\boldsymbol{x}$ *in un vettore normale ad* $\boldsymbol{u}$.

$$\boldsymbol{u} \times \alpha \boldsymbol{x} = 0, \tag{2}$$

perchè, per la (1), $\boldsymbol{x} \times \mathrm{K}\alpha\boldsymbol{u} = 0$.

Inoltre: *l'omografia* $\mathrm{R}\alpha$ *applicata al vettore* $\boldsymbol{u}$ *produce il prodotto di* $\boldsymbol{u}$ *per l'invariante secondo di* α

$$\mathrm{R}\alpha\boldsymbol{u} = (\mathrm{I}_2\alpha)\,\boldsymbol{u}, \tag{3}$$

come risulta subito da (1) e da **H**, n. 12, [2].

La (3) prova ancora che: *se* $\mathrm{I}_2\alpha \neq 0$ *l'omografia* α *è degenere di seconda specie* (**H**, n. 16).

Se non si introducono delle condizioni restrittive riguardo al modo di comportarsi delle rette $P\boldsymbol{u}$ nel campo Σ, non si ottengono altre proprietà notevoli dell'omografia α.

2. Relazioni tra α **e** β. — Fissato ad arbitrio il numero reale r, il punto

$$Q = P + rf(P) = P + r\boldsymbol{u}$$

varia, in generale, col variare di P in Σ in un campo a tre dimensioni.

In ciò che segue ammetteremo che in tutto il campo Σ, o almeno in campi parziali σ, sia soddisfatta la condizione seguente: *variando* P *nel campo a tre dimensioni* σ, *anche infinitesimo, il punto* $Q = P + r\boldsymbol{u}$ *varia in un campo* σ_r *pure a tre dimensioni, e la corrispondenza tra i punti* P *e* Q *di* σ *e* σ_r *è* UNIVOCA e RECIPROCA, *cioè; non solo dato* P *in* σ *esiste un solo punto* Q *di* σ_r, *ma fissato ad arbitrio* Q *in* σ_r *esiste un solo punto* P *di* σ *tale che* $Q = P + r\boldsymbol{u}$.

Si può dunque considerare Q *funzione di* P e contemporaneamente P *funzione di* Q, e quindi il vettore $\boldsymbol{u} = f(P)$ può essere, indifferentemente, considerato funzione di P o di Q (*).

(*) $\boldsymbol{u}$ è funzione di Q ma, in generale, non coincide con $f(Q)$.

Digitized by Google

Si possono dunque, insieme ad α, considerare le omografie

$$\frac{dQ}{dP}, \qquad \frac{dP}{dQ}, \qquad \beta = \frac{d\boldsymbol{u}}{dQ}$$

che restano completamente definite nei campi σ e σ_r.

Le omografie $\frac{dQ}{dP}$, $\frac{dP}{dQ}$ *sono l'una inversa dell'altra. Non sono quindi degeneri, cioè hanno un invariante terzo non nullo. Si esprimono mediante* α, β, r *nel modo seguente:*

$$\frac{dQ}{dP} = 1 + r\alpha \tag{4}$$

$$\frac{dP}{dQ} = 1 - r\beta, \tag{5}$$

come risulta subito da **H**, n. 23, [11] osservando che

$$Q = P + r\boldsymbol{u}, \qquad P = Q - r\boldsymbol{u}$$

e che r è indipendente da P e da Q (*).

È chiaro che per β valgono le (1), (2), (3).

Tra α e β sussistono le notevoli relazioni seguenti:

$$\alpha = \beta(1 + r\alpha) \tag{6}$$

$$\beta = \alpha(1 - r\beta) \tag{7}$$

(*) Per r funzione di P si ha

$$\frac{dQ}{dP} = 1 + r\alpha + \mathrm{H}(\mathrm{grad}\, r, \boldsymbol{u})$$

formula alla quale si dovrà spesso ricorrere nello studio completo delle congruenze e dei complessi.

Si noti che, nella stessa ipotesi, la (6) vale ancora purchè si abbia $\alpha\boldsymbol{u} = 0$ (cfr. n. 3 di questa Nota), senza che valga la (4). Non vi è in ciò alcuna contradizione perchè da $\alpha = \beta(1 + r\alpha)$ e $\alpha = \beta \frac{dQ}{dP}$ si trae

$$\beta \left\{ (1 + r\alpha) - \frac{dQ}{dP} \right\} = 0$$

ma il secondo fattore non è necessariamente zero.

Digitized by Google

$$\alpha\beta = \beta\alpha \tag{8}$$

$$r\alpha\beta = \alpha - \beta \tag{9}$$

$$\begin{cases} 2rI_2\alpha \,.\, I_2\beta = I_1\beta \,.\, I_2\alpha - I_1\alpha \,.\, I_2\beta \\ 2r = \dfrac{I_1\beta}{I_2\beta} - \dfrac{I_1\alpha}{I_2\alpha} \qquad (\text{per } I_2\alpha \,.\, I_2\beta \neq 0) \end{cases} \tag{10}$$

$$I_2(\alpha\beta) = I_2\alpha \,.\, I_2\beta \tag{11}$$

$$I_2\beta = \frac{1}{I_3(1 + r\alpha)}\, I_2\alpha \,. \tag{12}$$

Supposto poi $I_2\alpha = 0$ (e quindi, per la (12), anche $I_2\beta = 0$) si hanno le formule:

$$I_1(\alpha\beta) = I_1\alpha \,.\, I_1\beta \tag{13}$$

$$\begin{cases} rI_1\alpha \,.\, I_1\beta = I_1\alpha \,.\, I_1\beta \\ r = \dfrac{1}{I_1\beta} - \dfrac{1}{I_1\alpha} \qquad (\text{per } I_1\alpha \,.\, I_1\beta \neq 0) \end{cases} \tag{14}$$

$$I_1\beta = \frac{1}{I_3(1 + r\alpha)}\, I_1\alpha \,. \tag{15}$$

Dimostrazione delle formule (6)-(15).

Si ha identicamente, per la (4),

$$\alpha = \frac{du}{dP} = \frac{du}{dQ}\,\frac{dQ}{dP} = \beta(1 + r\alpha)$$

che dimostra la (6). Cambiando in questa α in β, β in α e r in $-r$ si ha la (7); lo stesso si ottiene con calcolo diretto come per la (6).

Combinando linearmente le (6), (7) si hanno subito le (8), (9).

Ricordando che le due omografie $1 + r\alpha$, $1 - r\beta$ sono l'una inversa dell'altra si ha (**H**; n. 2, [8]; n. 4, [2])

$$I_3(1 + r\alpha) \,.\, I_3(1 - r\beta) - 1 = 0 \tag{a}$$

$$I_1(1 + r\alpha) = \frac{I_2(1 - r\beta)}{I_3(1 - r\beta)}, \qquad I_2(1 + r\alpha) = \frac{I_1(1 - r\beta)}{I_3(1 - r\beta)},$$

e da quest'ultime due

$$I_1(1 + r\alpha) \,.\, I_1(1 - r\beta) - I_2(1 + \alpha) \,.\, I_2(1 - r\beta) = 0. \tag{b}$$

Se nelle (*a*), (*b*) sostituiamo agli invarianti di $1 + r\alpha$ e $1 - r\beta$ i loro valori in funzione di r e degli invarianti di α e di β (**H**, n. 2, [2], [6]), ri-

Digitized by Google

cordiamo che $I_3\alpha = I_3\beta = 0$, teniamo conto della (9), e sostituiamo a $I_3(\alpha-\beta)$ il suo valore (**H**, n. 9, [15]) si ha, dopo un calcolo semplice,

$$(a') \qquad r\{I_2\alpha \,.\, I_2\beta + I_2(\alpha\beta)\} + \{I_1\alpha \,.\, I_2\beta - I_1\beta \,.\, I_2\alpha\} = 0$$

$$(b') \qquad r\{I_1\alpha \,.\, I_2\beta + 3I_2(\alpha\beta)\} + 2\{I_1\alpha \,.\, I_2\beta - I_1\beta \,.\, I_2\alpha\} = 0\,,$$

che combinate linearmente dànno le (10), (11).

Moltiplicando le due espressioni già adoperate (**H**, n. 2, [2]) di $I_3(1+r\alpha)$, $I_3(1-r\beta)$ per $I_2\beta$ e $I_2\alpha$ e tenendo conto delle (9), (11) si ha

$$\left.\begin{aligned} x\ I_2\beta &= I_2(\alpha-\beta) + rI_1\alpha \,.\, I_2\beta + I_2\beta \\ \frac{1}{x} I_2\alpha &= I_2(\alpha-\beta) - rI_1\beta \,.\, I_2\alpha + I_2\alpha \end{aligned}\right\} \text{ con } x = I_3(1+r\alpha);$$

sommando e tenendo conto delle (9), (10) si ha

$$(c) \qquad (1-x)\, I_2\beta = \left(\frac{1}{x} - 1\right) I_1\alpha\,.$$

Ma si ha $x = 1$ solo per $r = 0$, cioè $\alpha = \beta$ e in tal caso la (12) è vera. Per $x \neq 1$ si ha la (12) dividendo i due membri della (*c*) per $1 - x$.

Se $I_2\alpha = 0$, per la (12) anche $I_2\beta = 0$, per la (11) $I_2(\alpha\beta) = 0$ e per la (9) $I_2(\alpha-\beta) = 0$. Da questo e dalla nota (**H**, n. 9, [15]) espressione di $I_2(\alpha-\beta)$ risulta la (13).

Da (9) e (13) si ha subito la (14). Da questa, ed osservando che nelle ipotesi fatte $I_3(1+r\alpha) = 1 + rI_1\alpha$ si ha la (15).

3. Il vettore αu. — *Sia P un punto di Σ. Esista un campo piano infinitesimo σ contenuto in Σ e contenente P nel suo interno, ed esista una lunghezza a, finita o infinitesima, tale che: 1° variando M in σ, i punti N distanti, in valore assoluto, da M meno di a e giacenti sulla retta $Mf(M)$ formino un campo continuo σ' a tre dimensioni; 2° fissato ad un arbitrio N in σ' esista un solo punto M di σ tale che N disti da M meno di a e giaccia sulla retta $Mf(M)$. In tali ipotesi si ha:*

$$\alpha u = 0\,.$$

Per ogni punto N di σ' si definisca il vettore $\varphi(N)$ ponendo

$$\varphi(N) = f(M),$$

ove M è il punto di σ considerato nell'enunciato del teorema.

La funzione $\varphi(N)$ è definita in tutto il campo σ' ed è *costante* lungo ogni retta $Mf(M)$.

Digitized by Google

Nel campo σ' si può considerare uno spostamento dN, non nullo, e parallelo ad $f(M)$,

$$(a) \qquad dN = \epsilon f(M)$$

e, per l'osservazione precedente, si ha per il corrispondente spostamento di $\varphi(N)$

$$(b) \qquad d\varphi(N) = 0.$$

Nel campo σ' è individuata l'omografia $\frac{d\varphi(N)}{dN} = \frac{df(M)}{dN}$; questa applicata ai due membri della (a) dà, in virtù della (b),

$$\epsilon \frac{df(M)}{dN} f(M) = 0:$$

e poichè $\epsilon \neq 0$,

$$\frac{df(M)}{dN} f(M) = 0.$$

Ma anche P è un punto di σ' e quindi si ha pure $\alpha u = 0$ (*).

Ammesso che per il punto generico P di Σ valgano le condizioni restrittive indicate nel teorema ora dimostrato, e riportando anche dei risultati già noti, si ha:

l'omografia α, *la sua coniugata* (Kα) *e la sua dilatazione* (Dα) *applicata al vettore* u *dànno il vettore nullo,*

$$(16) \qquad \alpha u = 0, \qquad K\alpha u = 0, \qquad D\alpha u = 0;$$

le omografie α, Kα, Dα *trasformano qualsiasi vettore* x *in un vettore o nullo o normale ad* u,

$$(17) \qquad u \times \alpha x = 0, \qquad u \times K\alpha x = 0, \qquad u \times D\alpha x = 0;$$

il vettore di α *è parallelo ad* u,

$$(18) \qquad u \wedge V\alpha = 0, \qquad \text{ovvero} \qquad V\alpha = (u \times V\alpha)u.$$

(*) Cfr. H, Appendice, § 4, un caso per cui $\alpha u \neq 0$.

Digitized by Google

Inoltre: supposto ancora verificate le condizioni poste nel n. 2 si hanno le formule importanti:

$$(19) \qquad V\beta = \frac{1}{I_3(1 + r\alpha)} V\alpha$$

$$(20) \qquad (I_2\beta)V\alpha = (I_2\alpha)V\beta$$

$$(21) \qquad \text{se } I_2\alpha = 0, \quad \text{allora} \quad (I_1\beta)V\alpha = (I_1\alpha)V\beta.$$

Dimostrazione delle formule (16)-(21).

Sommando o sottraendo le due condizioni $\alpha u = 0$, $K\alpha u = 0$, già dimostrate si ha (**H**, n. 9)

$$D\alpha u = 0, \qquad (V\alpha) \wedge u = 0.$$

e sono così dimostrate le (16), (18). Dalle (16) si ha, qualunque sia il vettore x

$$x \times \alpha u = 0, \qquad x \times K\alpha u = 0, \qquad x \times D\alpha u = 0$$

dalle quali (**H**, n. 9, [6]) risultano le (17).

Ricordando che $1 - r\beta$ è l'inversa di $1 + r\alpha$ si ha (**H**, n. 12, [14])

$$V(1 - r\beta) = -\frac{(1 + r\alpha)V(1 + r\alpha)}{I_3(1 + r\alpha)}$$

dalla quale per (**H**, n. 7, [2]) e (16), (18) risulta subito la (19).

Dalla (19) e dalle (12), (15) si hanno le (20), (21).

Dimostriamo infine che: *se il sistema Pu è una congruenza, questa è normale solamente quando*

$$V\alpha = 0$$

in tutto il campo.

Il punto P descriva una superficie che possa esser scelta come *base* della congruenza. Il punto $Q = P + xu$ descriverà una superficie normale alle rette Pu nel solo caso che, in tutto il campo, si abbia

$$dQ \times u = (dP + x du + dx u) \times u = dP \times u + dx = 0,$$

ovvero, il che equivale,

$$dx = -u \times dP, \qquad u = -\operatorname{grad} x.$$

Digitized by Google

Ma $\boldsymbol{u}$ è il gradiente di un numero solo quando

$$0 = \text{rot}\,\boldsymbol{u} = 2\text{V}\frac{d\boldsymbol{u}}{dP} = 2\,\text{V}\alpha$$

come si voleva dimostrare (*).

4. Direzioni principali. — Si suppongono verificate le condizioni restrittive, indicate nei n, 2, 3, in tutto il campo Σ.

Per ogni omografia β è, come è noto (**H**, n. 7), individuato un sistema di quadriche. Se M è il punto che descrive una quadrica del sistema, e si sceglie Q come centro, allora M soddisfa alla condizione

$$(a) \qquad (M - Q) \times \text{D}\beta(M - Q) = \text{cost}\,,$$

e si ha: *le quadriche* (*a*) *che si ottengono facendo variare Q nella retta* $P\boldsymbol{u}$ *hanno a comune un asse, la retta* $P\boldsymbol{u}$, *e gli altri due giacciono in due piani ortogonali uscenti da* $P\boldsymbol{u}$ *che non variano con Q; sono, cioè, funzioni della retta* $P\boldsymbol{u}$, e possono chiamarsi *piani principali* rispetto alla retta $P\boldsymbol{u}$.

Però *le quadriche* (*a*) *sono cilindri con le generatrici parallele alla retta* $P\boldsymbol{u}$, perchè se M è un punto della quadrica e del

(*) Volendo dimostrare soltanto che la condizione $\text{V}\alpha = 0$ è *necessaria* si può operare così.

Una superficie normale a tutte le rette $P\boldsymbol{u}$ sia descritta dal punto Q. Allora $\boldsymbol{u} \times dQ = \boldsymbol{u} \times \delta Q = 0$ e, in conseguenza

$$\delta\boldsymbol{u} \times dQ = d\boldsymbol{u} \times \delta Q\,.$$

Ricordando che $d\boldsymbol{u} = \beta dQ \ldots$ si ha:

$$dQ \times \beta\delta Q = \delta Q \times \beta dQ = dQ \times \text{K}\beta\delta Q\,,$$
$$dQ \times (\beta - \text{K}\beta)\delta Q = 2dQ \times \text{V}\beta \wedge \delta Q = 0$$
$$(dQ \wedge \delta Q) \times \text{V}\beta = 0\,;$$

ma dQ e δQ sono normali ad $\boldsymbol{u}$, cioè $dQ \wedge \delta Q$ parallelo ad $\boldsymbol{u}$, e quindi $\boldsymbol{u} \times \text{V}\beta = 0$ che combinata con la (18) e (19) dà $\text{V}\beta = 0$, $\text{V}\alpha = 0$.

Allo stesso risultato sono giunto per altra via nella mia nota *Alcune nuove espressioni assolute delle curvature in un punto di una superficie* (Rendic. R. Accademia Lincei, v. XVIII, s. 5ª); cfr. anche nota successiva: *Una dimostrazione assoluta del teorema di Gauss*..... La dimostrazione ora data è più semplice e più chiara.

Digitized by Google

piano normale ad $\boldsymbol{u}$ uscente da Q, si pone $N = M + x\boldsymbol{u}$ e si tien conto delle (16), (17), si ha da (a)

$$(N - Q) \times \mathrm{D}\beta(N - Q) = \text{cost. [la stessa di } (a)\text{]}.$$

Basta dunque, come faremo nel n. 5, considerare le sezioni rette per Q dei cilindri (a).

È però importante dare al teorema prima enunciato la forma seguente che pone in evidenza una nuova relazione tra $\mathrm{D}\alpha$ e $\mathrm{D}\beta$ ed è particolarmente utile per lo studio generale delle congruenze e dei complessi.

Per ogni punto P esistono almeno due direzioni normali ad $\boldsymbol{u} = f(P)$ e ortogonali tra loro, che sono DIREZIONI PRINCIPALI *per le dilatazioni di tutte le omografie $\beta = \frac{d\boldsymbol{u}}{dQ}$ comunque vari il punto Q nella retta $P\boldsymbol{u}$. Inoltre; se i vettori unitari $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, tali che $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ è sistema ortogonale destrogiro, dànno, insieme ad $\boldsymbol{u}$, le direzioni principali di* $\mathrm{D}\alpha$ e $\mathrm{D}\beta$, *ed m, n, m', n' sono i numeri reali tali che*

$$(22)\qquad \begin{cases} \mathrm{D}\alpha\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{v}, & \mathrm{D}\alpha\boldsymbol{w} = n\boldsymbol{w} \\ \mathrm{D}\beta\boldsymbol{v} = m'\boldsymbol{v}, & \mathrm{D}\beta\boldsymbol{w} = n'\boldsymbol{w}, \end{cases}$$

questi numeri m, n, m', n' soddisfano alle condizioni

$$(23)\qquad (m - n)\mathrm{V}\beta = (m' - n')\mathrm{V}\alpha,$$

$$(24)\qquad m + n = \mathrm{I}_1\alpha, \qquad m' + n' + \mathrm{I}_1\beta.$$

Dimostrazione. — Una direzione principale di $\mathrm{D}\alpha$ è, a causa della (16), quella del vettore $\boldsymbol{u}$; ne esistono dunque (almeno) altre due (**H**, n. 5) normali ad $\boldsymbol{u}$. Il sistema ortogonale-destrogiro $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ sia quello delle direzioni principali di $\mathrm{D}\alpha$.

I vettori $\mathrm{D}\alpha\boldsymbol{v}$, $\mathrm{D}\alpha\boldsymbol{w}$, $\mathrm{V}\alpha$ sono paralleli a $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u}$ e sono quindi determinati i numeri m, n, h tali che

$$(a)\qquad \mathrm{D}\alpha\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{v}, \qquad \mathrm{D}\alpha\boldsymbol{w} = n\boldsymbol{w}, \qquad \mathrm{V}\alpha = h\boldsymbol{u}.$$

Ricordando che (**H**, n. [1]) $\alpha = \mathrm{D}\alpha + (\mathrm{V}\alpha)\wedge$ si ha dalle (a)

$$(b)\qquad \alpha = \begin{pmatrix} 0, & m\boldsymbol{v} + h\boldsymbol{w}, & -h\boldsymbol{v} + n\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{u}, & \boldsymbol{v}, & \boldsymbol{w} \end{pmatrix}.$$

Digitized by Google

Per l'omografia β, a causa delle (16), (17) si ha

$$(c) \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0, & m'v + pw, & qv + n'w \\ u, & v, & w \end{pmatrix}.$$

Se ora, mediante (b), (c) calcoliamo l'$\alpha\beta$ e il $\beta\alpha$ di v e w e ricordiamo che $\alpha\beta = \beta\alpha$ si ha

$$(d) \qquad \begin{cases} h(p+q) = 0 \\ (m-n)p = (m'-n')h. \end{cases}$$

Se $V\alpha \neq 0$, cioè $h \neq 0$, allora deve essere $p+q=0$; e posto $p = -q = h'$ la (c) ha la stessa forma di (b), vale a dire

$$D\beta v = m'v, \quad D\beta w = n'w, \quad V\beta = h'u$$

e il teorema è dimostrato, poichè per la seconda delle (d) e per la (18) risulta la (23) e da **H**, n. 2, [4], risultano le (24).

Sia $V\alpha = 0$, cioè $h = 0$. — Se $m \neq n$ la seconda delle (d) dà $p = 0$; ma per la (19), la (c) e (**H**, n. 8, [3]) deve essere $2V\beta = -qu = 0$ e quindi $h = p = q = 0$; in tal caso le (b), (c), dicono che α, β sono dilatazioni aventi a comune le direzioni principali. — Se $m = n$ si possono considerare due casi: $m' = n'$ qualunque sia Q nella retta Pu; esiste almeno un punto Q nel quale $m' \neq n'$. Nel primo caso due direzioni qualunque normali ad u e tra loro sono principali per $D\alpha$ e $D\beta$; nel secondo, presa come omografia α quella nel punto Q per cui $m' \neq n'$ si ricade in un caso già trattato.

Il teorema è dunque vero in generale.

I piani uscenti da Pu e paralleli a v e w sono quelli che abbiamo chiamati *piani principali* per la retta Pu, che contengono due degli assi di tutte le quadriche individuate dalle omografie β (**H**, n. 5, n. 7).

Avendo α e β a comune le direzioni principali risulta (**H**, n. 5) che: *il prodotto di* $D\alpha$ *per* $D\beta$ *è pure una dilatazione.*

Da questo, dalle (16), (18) e applicando la formula generale (**H**, n. 11, [1]) che dà $V(\alpha\beta)$ si ha

$$(25) \qquad 2V(\alpha\beta) = (I_1\alpha)V\beta + (I_1\beta)V\alpha$$

dalla quale per formule già note si trae subito

$$(26) \qquad (2 - rI_1\beta)V\alpha = (2 + rI_1\alpha)V\beta$$

$$(27) \qquad (2 - rI_1\beta)I_2\alpha = (2 + rI_1\alpha)I_2\beta$$

$$(28) \qquad \begin{cases} rI_1\beta \,.\, I_2\alpha = I_2\alpha - I_2\beta + I_2(\alpha - \beta) \\ rI_1\alpha \,.\, I_2\beta = I_2\alpha - I_2\beta - I_2(\alpha - \beta). \end{cases}$$

Digitized by Google

5. Coniche indicatrici. — Valgano ancora le ipotesi fatte al principio del n. 4.

Sia k un numero reale, da fissarsi ad arbitrio.

Il punto M *del piano normale ad* $\boldsymbol{u}$ condotto per il punto generico Q della retta $P\boldsymbol{u}$, e soddisfacente alla condizione

$$(29) \qquad (M-Q) \times \mathrm{D}\beta(M-Q) = k$$

o, il che equivale (**H**, n. 8, [4]),

$$(29') \qquad (M-Q) \times \beta(M-Q) = k$$

descrive una conica (reale o immaginaria a seconda di k) che chiameremo *indicatrice* k *nel punto* Q, e che indicheremo brevemente con la notazione $\Gamma(k, Q)$. Per $k=0$ si ha l'*indicatrice assintotica in* Q.

Se si prende $Q, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ come sistema cartesiano di riferimento e si pone

$$M = Q + x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{w}$$

l'equazione di $\Gamma(k, Q)$ è

$$(29'') \qquad m'x^2 + n'y^2 = k.$$

a) Cominciamo a considerare il caso $\mathrm{I}_2\alpha \neq 0$.

Esiste sulla retta $P\boldsymbol{u}$ *un solo punto* Q *per la cui omografia* β *si ha* $\mathrm{I}_1\beta = 0$ *e tale punto è*

$$P - \frac{\mathrm{I}_1\alpha}{2\mathrm{I}_2\alpha}\boldsymbol{u},$$

come risulta subito dalla (10) (*).

Il punto ora considerato può chiamarsi *punto centrale*, o *centro*, della retta $P\boldsymbol{u}$.

(*) Si può notare che il valore $-\frac{\mathrm{I}_1\alpha}{2\mathrm{I}_2\alpha}$ di r è quello per il quale $\mathrm{I}_3(1+r\alpha)$ è minimo ($\mathrm{I}_2\alpha > 0$) o massimo ($\mathrm{I}_2\alpha < 0$).

Digitized by Google

Non si toglie nulla alla generalità supponendo, come faremo in ciò che segue, che il punto P sia il centro della retta Pu, cioè si abbia $I_1\alpha = 0$ (*).

Dalle (20), (23) risulta che il numero

$$2H = \frac{m - n}{I_2\alpha} = \frac{m' - n'}{I_2\beta} \tag{30}$$

non varia col variare di Q sulla retta Pu; è quindi *una funzione della retta* Pu.

Tenendo presente la (24) si ha subito

$$m' = \frac{1}{2}(I_1\beta + 2HI_2\beta), \qquad n' = \frac{1}{2}(I_1\beta - 2HI_2\beta)$$

e, quindi, dalla (10) e per essere $I_1\alpha = 0$

$$\begin{cases} m' = (r + H)I_2\beta \\ n' = (r - H)I_2\beta, \end{cases} \tag{31}$$

dalle quali risulta subito come varia $\Gamma(k, Q)$ col variare di Q sulla retta Pu.

Nel centro P, $\Gamma(k, P)$ è *iperbole equilatera* i cui assintoti sono le bisettrici delle direzioni principali. — Per i punti Q compresi fra i punti

$$P_1 = P + Hu, \qquad P_2 = P - Hu,$$

(*) Se, in tale ipotesi β e β' sono le omografie relative ai due punti $P + ru$, $P - ru$, *simmetrici rispetto al centro*, allora

$$I_1\beta' = -I_1\beta, \qquad I_2\beta' = I_2\beta, \qquad V\beta' = V\beta.$$

Infatti. Essendo $I_1\alpha = 0$ si ha $I_3(1 + r\alpha) = I_3(1 - r\alpha)$ e quindi dalla (12) $I_2\beta' = I_2\beta$. Da questa e dalla (10), cambiando r in $-r$ si ha $I_1\beta' = -I_1\beta$. Finalmente da (19) si ha $V\beta' = V\beta$.

Da queste relazioni tra β e β' si ricava come si comportano le indicatrici da una parte e dall'altra del centro.

Notiamo ancora che se il sistema di rette è una *congruenza normale* le relazioni tra α, β, β' permettono di ottenere facilmente le proprietà delle *curvature* in punti corrispondenti di due *superfici parallele* (Cfr. Lincei, l. c.).

Digitized by Google

che possono chiamarsi *punti limiti*, le coniche $\Gamma(k, Q)$ sono iperboli che col tendere di Q a P_1 o P_2 degenerano, al limite, in una coppia di rette parallele ad una delle due direzioni principali $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$. — Oltre i punti limiti, $\Gamma(k, Q)$ è ellisse (reale o immaginaria).

Per il confronto delle grandezze degli assi delle coniche $\Gamma(k, Q)$ giova esprimere $I_2\beta$ in funzione di r e di $I_2\alpha$, sempre nell'ipotesi $I_1\alpha = 0$,

$$I_2\beta = \frac{I_2\alpha}{1 + r^2 I_2\alpha} \tag{32}$$

il che si fa facilmente mediante formule note (*).

b) Supponiamo ora $I_2\alpha = 0$ e $I_1\alpha \neq 0$.

In tal caso (dalla (3) e da **H**, n. 16, 17) β è *omografia degenere di prima specie*, cioè esiste un vettore unitario $\boldsymbol{i}$, normale ad $\boldsymbol{u}$ (per la (17)), tale che $\beta\boldsymbol{x}$ è parallelo ad $\boldsymbol{i}$ qualunque sia il vettore $\boldsymbol{x}$.

La (29) diviene allora (**H**, n. 17, [4])

$$\{(M - Q) \times \boldsymbol{i}\}\{(M - Q) \times K\beta\boldsymbol{i}\} = k$$

che, dando per $k = 0$ le due rette uscenti da Q e normali ad $\boldsymbol{i}$ e $K\beta\boldsymbol{i}$, esprime che $\Gamma(k, Q)$ è del *tipo iperbole*.

Dalle (15), (19), (23) risulta che il numero

$$\boldsymbol{H}_1 = \frac{m - n}{I_1\alpha} = \frac{m' - n'}{I_1\beta} \tag{33}$$

(*) Si ha successivamente

$$r^2 I_2\alpha \,.\, I_2\beta = r^2 I_2(\alpha\beta) = I_2(r\alpha\beta) = I_2(\alpha - \beta) = I_2\alpha + I_2\beta + I_1(\alpha\beta) =$$

$$= I_2\alpha + I_2\beta - \frac{I_1\beta}{r} = I_2\alpha + I_2\beta - 2I_2\beta = I_2\alpha - I_2\beta\,.$$

Si osservi pure che variando Q sulla retta $\boldsymbol{Pu}$, le coniche $\Gamma(k, Q)$ stanno sulla superficie del 3° ordine di equazione cartesiana ortogonale

$$(z + \boldsymbol{H})x^2 + (z - \boldsymbol{H})y^2 = k\left(z^2 - \frac{1}{I_2\alpha}\right)$$

essendosi posto

$$M = P + x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{w} + z\boldsymbol{u}.$$

Digitized by Google

non varia col variare di Q sulla retta Pu, cioè è *una funzione della retta* Pu. Si ha subito come per le (31)

$$(34)\qquad \begin{cases} m' = \frac{1}{2}(1 + H_1)\mathrm{I}_1\beta \\ n' = \frac{1}{2}(1 - H_1)\mathrm{I}_1\beta \end{cases}$$

e poichè $\Gamma(k, Q)$ è del tipo iperbole deve essere

$$(35)\qquad H_1^2 \gtrless 1 .$$

Le bisettrici degli assintoti di $\Gamma(k, Q)$ hanno le direzioni u, w degli assi; e poichè queste direzioni non variano col variare di Q sulla retta Pu, da (29″) e da (34) risulta subito che: *le direzioni* i, $\mathrm{K}\beta i$ *non variano col variare di* Q *sulla retta* Pu.

Si hanno così, oltre le direzioni principali v, w, altre due direzioni i, $\mathrm{K}\alpha i$, di importante significato geometrico (*), che non

---

(*) È facile provare che posto

$$\cos\varphi = \frac{1}{H_1},$$

φ è l'angolo che $\mathrm{K}\alpha i$ fa con i e che si ha

$$\mathrm{K}\beta i = H_1(\mathrm{I}_1\beta)\{\cos\varphi\, i + \mathrm{sen}\varphi\, u \wedge i\}$$

$$i = \cos\frac{\varphi}{2}\, v - \mathrm{sen}\,\frac{\varphi}{2}\, w$$

$$v = \cos\frac{\varphi}{2}\, i + \mathrm{sen}\,\frac{\varphi}{2}\, u \wedge i, \qquad w = -\mathrm{sen}\,\frac{\varphi}{2}\, i + \cos\frac{\varphi}{2}\, u \wedge i,$$

$$n' = H_1(\mathrm{I}_1\beta)\cos^2\frac{\varphi}{2}, \qquad n' = -H_1(\mathrm{I}_1\beta)\mathrm{sen}^2\frac{\varphi}{2}.$$

Volendo esprimere in funzione di r e di $\mathrm{I}_1\alpha$ si ha da (14)

$$\mathrm{I}_1\beta = \frac{\mathrm{I}_1\alpha}{1 + r\mathrm{I}_1\alpha}.$$

La superficie che contiene tutte le coniche $\Gamma(k, Q)$ per Q variabile sulla retta Pu è in tal caso una quadrica la cui equazione è

$$(1 + H_1)x^2 + (1 - H_1)y^2 = k\left(z + \frac{1}{\mathrm{I}_1\alpha}\right).$$

Digitized by Google

variano col variare di P sulla retta Pu, sono, cioè, come le direzioni principali, delle *funzioni della retta* Pu.

c) Supponiamo infine, $I_2\alpha = 0$ e $I_1\alpha = 0$.

Esistono, come nel caso *b*), i vettori i, $K\alpha i$ funzioni della retta Pu, ma *sono ortogonali*. Si ha pure (**H**, n. 17, [8]) $V\beta \neq 0$ e quindi

$$V\alpha = V\beta\,,\quad m = m' = -n = -n'$$

vale a dire le coniche $\Gamma(k, Q)$ sono tutte *iperboli equilatere* eguali (giacenti in un cilindro con le generatrici parallele ad u), e, in conseguenza, i vettori i, $K\alpha i$ bisecano le direzioni principali.

6. Punti di minima distanza; parametro distributore; fuochi. — Limitiamoci al caso $I_2\alpha \neq 0$.

Per ogni spostamento infinitesimo dP di P il vettore $u = f(P)$ subisce lo spostamento du che è normale ad u. Detto θ l'angolo che du fa con la direzione principale v si ha

$$(36)\qquad du = \rho(\cos\theta\, v + \operatorname{sen}\theta\, w) \qquad \text{con} \qquad \rho = \operatorname{mod} du.$$

È importante stabilire la relazione tra lo spostamento dP, la terna (*assoluta*) u, v, w, l'omografia α nel punto P e il vettore du. Tale relazione è, posto

$$h = u \times V\alpha\,,$$

espressa dalla formula

$$(37)\quad dP = \epsilon u + \frac{\rho}{I_2\alpha}\{(n\cos\theta + h\operatorname{sen}\theta)v + (m\operatorname{sen}\theta - h\cos\theta)w\}$$

ove ϵ è un infinitesimo, o, sotto altra forma,

$$(37')\quad dP = \epsilon u - \frac{h}{I_2\alpha}u \wedge du + \frac{\rho}{I_2\alpha}\{n\cos\theta v + m\operatorname{sen}\theta w\}.$$

Dimostrazione. — Posto, il che può sempre farsi,

$$dP = \epsilon u + av + bw$$

ed osservando che $\alpha dP = du$ e $\alpha u = 0$, si ha subito dalle (22)

$$mb - hc = \rho\cos\theta\,,\qquad hb + nc = \rho\operatorname{sen}\theta\,,$$

Digitized by Google

dalle quali, per essere $mn + h^2 = I_2\alpha$ (**H**, n. 7, [5]) risulta la (37). La (37′) si ottiene subito osservando che dalla (36) si ha

$$\boldsymbol{u} \wedge d\boldsymbol{u} = \rho(-\operatorname{sen}\theta \boldsymbol{v} + \cos\theta \boldsymbol{w}).$$

Applichiamo queste formule ad alcuni casi particolari.

a) *Se il punto*

$$Q = P + r\boldsymbol{u}$$

è quel punto della retta $P\boldsymbol{u}$ *che ha la minima distanza dalla retta del sistema che passa per il punto* $P + dP$, *allora*

$$(38) \qquad r = -\frac{dP \times d\boldsymbol{u}}{(d\boldsymbol{u})^2} = -\frac{1}{I_2\alpha}\{n\cos^2\theta + m\operatorname{sen}^2\theta\}.$$

Dim. — Nelle ipotesi fatte la retta per Q parallela a dQ è la normale comune alle due rette del sistema uscenti da P e $P + dP$. Deve dunque essere dQ normale ad $\boldsymbol{u}$ e ad $\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{u}$, cioè

$$\boldsymbol{u} \times dQ = 0, \qquad (\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{u}) \times dQ = 0$$

da cui

$$d\boldsymbol{u} \times dQ = 0,$$

cioè lo spostamento dQ, che dipende da dP, è normale a $d\boldsymbol{u}$. Osservando ora che, per r funzione di P,

$$dQ = dP + r\,d\boldsymbol{u} + dr\,\boldsymbol{u}$$

e che $\boldsymbol{u} \times d\boldsymbol{u} = 0$, la condizione precedente dà

$$dP \times d\boldsymbol{u} + r(d\boldsymbol{u})^2 = 0 \quad .$$

da cui risulta subito la prima delle (38). La seconda si ottiene subito dalla prima e dalla (37′) osservando che i prodotti interni di $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{u} \wedge d\boldsymbol{u}$ per $d\boldsymbol{u}$ sono nulli.

Essendo, per ipotesi, $I_2\alpha \neq 0$, α è omografia degenere di seconda specie ((3) e **H**, n. 16) e quindi θ può assumere tutti i valori da 0 a 2π. Se r_1, r_2 sono i valori di r per $\theta = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$ rispettivamente, e r_0 è l'unico valore che assume r per $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (cioè per $d\boldsymbol{u}$ che *biseca le direzioni principali*), si ha da (38)

$$r_1 = -\frac{n}{I_2\alpha}, \qquad r_2 = -\frac{m}{I_2\alpha}, \qquad r_0 = -\frac{I_1\alpha}{2I_2\alpha}$$

Digitized by Google

e ancora

$$r = r_1\cos^2\theta + r_2\mathrm{sen}^2\theta$$

che è la formula di HAMILTON già nota per le congruenze e che risulta valevole anche per i complessi (*).

b) È ora utile considerare il numero

$$(39) \qquad \boldsymbol{K} = \frac{\boldsymbol{u} \times \mathrm{V}\alpha}{\mathrm{I}_2\alpha} = \frac{\boldsymbol{u} \times \mathrm{V}\beta}{\mathrm{I}_2\beta}$$

che, in virtù della (20), non varia col variare di P sulla retta $\boldsymbol{Pu}$ è, cioè, una *funzione della retta* $\boldsymbol{Pu}$ (**).

Per uno spostamento dP di P si consideri il numero

$$(40) \qquad p = -\frac{\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{du} \wedge dP}{(\boldsymbol{du})^2}$$

che può chiamarsi PARAMETRO DISTRIBUTORE *lungo la retta* $\boldsymbol{Pu}$ *e relativo allo spostamento* dP (***).

Da (40) e (37′) si ha subito

$$p = \frac{\boldsymbol{u} \times \mathrm{V}\alpha}{\mathrm{I}_2\alpha} - \frac{m-n}{2\mathrm{I}_2\alpha}\,\mathrm{sen}\,2\theta$$

e quindi per le (30), (39)

$$(41) \qquad p = \boldsymbol{K} - \boldsymbol{H}\,\mathrm{sen}\,2\theta$$

che prova esser p una *funzione della retta* $\boldsymbol{Pu}$ *e della direzione di* $\boldsymbol{du}$.

(*) Basta, infatti, confrontare con i risultati ottenuti nel n. 5 per riconoscere subito che $P + r_1\boldsymbol{u}$, $P + r_2\boldsymbol{u}$ sono i *punti limiti* e $P + r_0\boldsymbol{u}$ è il *centro* della retta $\boldsymbol{Pu}$.

(**) La (20) esprime pure che anche il vettore $\frac{\mathrm{V}\alpha}{\mathrm{I}_2\alpha}$ è una funzione della retta $\boldsymbol{Pu}$. Per lo studio completo delle congruenze e dei complessi può esser utile sostituire questo vettore $\left(\text{o, per } \mathrm{I}_2\alpha = 0, \text{ il vettore } \frac{\mathrm{V}\alpha}{\mathrm{I}_1\alpha}\right)$ al vettore di α.

(***) Per l'analogia che presenta col *parametro distributore* di CHASLES (Cfr. Rendiconti Palermo, vol. XXV, p. 355; *Per l'unificazione delle notazioni vettoriali*).

Se $Q = P + r\boldsymbol{u}$, allora $dQ = dP + r\boldsymbol{du} + dr\boldsymbol{u}$ e si ha subito $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{du} \wedge dP = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{du} \wedge dQ$. Quindi p è una *funzione* della retta $\boldsymbol{Pu}$ e di dP.

Digitized by Google

Se poniamo $\psi = \theta - \frac{\pi}{4}$ si ha

$$p = (K - H)\cos^2\psi + (K + H)\operatorname{sen}^2\psi \quad (*). \tag{41'}$$

c) La minima distanza delle due rette del sistema uscenti da P e $P + dP$ è (**)

$$\frac{dP \times u \wedge (u + du)}{\operatorname{mod}\{u \wedge (u + du)\}} = \frac{u \times du \wedge dP}{\operatorname{mod}(du)} = -p \operatorname{mod}(du).$$

Gli spostamenti dP per i quali questa minima distanza è nulla, sono quelli per i quali $du = 0$ (cioè dP parallelo ad u), o quelli per i quali $p = 0$, cioè per la (41)

$$\operatorname{sen} 2\theta = \frac{K}{H} \quad \text{ovvero} \quad \cos 2\theta = \frac{\sqrt{H^2 - K^2}}{H} \tag{42}$$

e gli spostamenti dP ora considerati esistono solo quando

$$K^2 \leqslant H^2.$$

Supposto P centro della retta Pu, e supposto ancora che il θ definito da una delle (42) esista, allora da (31) e (38) si ha

$$r = H\cos 2\theta = \sqrt{H^2 - K^2}$$

e si ottengono così, tanto per le congruenze come per i complessi, i *fuochi* della retta Pu che si vogliono considerare nelle congruenze.

Torino, Ottobre 1909.

(*) Il parametro distributore è stato considerato, ma per le sole congruenze, da G. Sannia (*Nuova esposizione della Geometria infinitesimale delle congruenze rettilinee*, Annali di Matematica pura e applicata, T. XV, S. III, da p. 95). Dalla (41') l'A. trae una *indicatrice*, analoga a quella di Dupin. Però è importante notare che l'indicatrice di Dupin è una delle coniche $\Gamma(k, Q)$, ed è, quindi, *ente geometrico assoluto*; mentre l'indicatrice di G. Sannia *non è* una delle coniche $\Gamma(k, Q)$, e quindi l'analogia si riferisce ai caratteri formali, non a quelli assoluti.

Gli invarianti H, K, ottenuti dall'A. per via algebrica, equivalgono ai numeri $2K$, $K^2 - H^2$ di questa nota; le due *forme differenziali quadratiche*, la cui considerazione è inutile col metodo assoluto essendo sparite tutte le *otto* coordinate, valgono rispettivamente (du^2), $u \times du \wedge dP$.

(**) *Elementi di calcolo vettoriale*, l. c., p. 41.

Digitized by Google

Sul teorema di Borel [1].

Nota del Prof. CARLO ALBERTO DELL'AGNOLA.

§ 1. — Sia E un insieme qualunque di intervalli della retta. Il teorema di Borel si enuncia:

" Se ogni punto dell'intervallo (a, b) è interno ad un in-
" tervallo almeno del gruppo E, esiste in questo gruppo un
" numero finito di intervalli rispetto ai quali (a, b) gode della
" stessa proprietà ".

Basterà evidentemente dimostrare che scomponendo (a, b) in un numero sufficientemente grande di parti, ciascuna di queste è interamente contenuta in un intervallo di E. Si divida (a, b) in due parti eguali; ciascuna di queste pure in due parti eguali, e così via via, ripetendo l'operazione per ogni nuovo intervallo finchè esso non sia contenuto per intero in un intervallo di E. Si riconosce facilmente che dopo un numero finito di operazioni si arriva ad una scomposizione di (a, b) in parti, ciascuna delle quali è contenuta in un intervallo di E. Supponiamo che ciò non sia. Esiste in questa ipotesi una successione di infiniti intervalli

$$(\alpha_1, \beta_1), \quad (\alpha_2, \beta_2), \quad \ldots\ldots, \quad (\alpha_n, \beta_n), \quad \ldots\ldots$$

ognuno dei quali è contenuto nel precedente: sia x_0 il punto comune a tutti. Esso è interno ad un intervallo c di E, e si può quindi scegliere un interno c_{x_0} di x_0 contenuto in c. D'altra parte se n è abbastanza grande, l'intervallo (α_n, β_n) è contenuto

[1] Vedasi la dimostrazione che il prof. Arzelà propone nella nota: *Sul teorema di Borel*, " Atti della R. Acc. delle Sc. di Bologna ", 1909. Vedasi pure G. Bagnera, *Una nuova dimostrazione di un teorema del sig. Borel*, " Rendiconti del Circolo matematico di Palermo ", settembre-ottobre 1909.

Digitized by Google

in c_{x_0} e per conseguenza in c. Ciò sarebbe in contraddizione con l'ipotesi secondo la quale nessuno degli intervalli (α_n, β_n) è contenuto interamente in un intervallo di E.

§ 2. — Il teorema precedente venne da Young generalizzato come segue:

Sia (μ) un gruppo qualunque di intervalli della retta, G un insieme chiuso dell'intervallo (a, b): " Se ogni punto di G è in- " terno ad un intervallo almeno del gruppo (μ), è possibile de- " terminare un numero finito di intervalli di (μ) aventi la stessa " proprietà ".

La dimostrazione si riconduce tosto alla precedente. Il complementare di G è formato da un numero finito o da una infinità numerabile di intervalli che indicheremo brevemente con (λ). Indichiamo con (ν) il gruppo formato dalla totalità degl'intervalli λ e μ. Ogni punto di (a, b) è interno ad un intervallo di (ν). Esiste dunque (teorema precedente) un numero finito di intervalli ν

$$(1) \qquad \nu_1, \nu_2, \ldots\ldots, \nu_n$$

tali che ogni punto di (a, b) è interno ad uno almeno di essi D'altra parte nessun punto di G è interno ad un intervallo λ. Segue da tutto ciò che nel gruppo (1) vi sono degl'intervalli μ che indicheremo con $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$, e che ogni punto di G è interno ad uno almeno di questi, c. d. d.

Venezia, Agosto 1909.

Digitized by Google

Relazione sulla Memoria del Dott. E. LAURA: *Sopra i moti armonici semplici e smorzati di un mezzo elastico, omogeneo, isotropo.*

Il Dott. Ernesto LAURA si è proposto di studiare un tipo generale di vibrazioni di un mezzo isotropo, le quali si possono dire *armoniche-smorzate*, in quanto dipendono dal tempo per termini di tipo armonico, moltiplicati per un fattore esponenziale, che al crescere del tempo ne riduce indefinitamente l'ampiezza. Nel caso dei moti armonici, le funzioni circolari, contenenti la variabile tempo, sono moltiplicate per certe funzioni delle coordinate spaziali, le quali ne determinano l'ampiezza, e soddisfanno ad una terna di equazioni a derivate parziali, di forma analoga a quelle che sussistono nel caso dell'equilibrio. Nel caso delle vibrazioni smorzate si trovano sempre sovrapposti due sistemi di vibrazioni, le cui ampiezze, funzioni anche in questo caso delle coordinate spaziali, debbono soddisfare a due terne, non indipendenti, di equazioni a derivate parziali. È questo un risultato interessante, che mette in luce la legge generale dei moti armonici-smorzati nei mezzi isotropi.

L'autore si occupa in seguito di molte quistioni speciali relative alla rappresentazione analitica delle componenti del vettore-spostamento, mediante le formole generali di rappresentazione, analoghe a quella celebre di Kirchhoff, che sono state oggetto di molti studi recenti. Ritrova direttamente tali formole pel caso speciale che ha in mira di studiare e se ne serve poi per diverse applicazioni. Fra queste sono notevoli le formole che dànno i valori degli spostamenti in un punto mediante i valori che essi hanno sopra una sfera avente il centro in quel punto, e che possono considerarsi come una estensione del ben noto teorema della media di Gauss nella teoria delle funzioni potenziali.

Digitized by Google

Infine discute intorno all'estensione del principio di Huygens allo spazio infinito.

In complesso il lavoro del Dott. Laura porta un notevole contributo alla teoria dei moti vibratori nei mezzi isotropi, studiandone una categoria fra le più interessanti anche dal punto di vista fisico e suscettibile di importanti applicazioni. Perciò la Commissione ritiene che tale lavoro possa essere favorevolmente accolto nelle *Memorie* Accademiche.

A. Naccari.
C. Somigliana, *relatore*.

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 5 Dicembre 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. ANDREA NACCARI
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: Mosso, Segre, Peano, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Mattirolo, Grassi, Somigliana e Parona che sostituisce il Segretario. — Scusano l'assenza il Presidente Senatore D'Ovidio, il Segretario Senatore Camerano per dovere d'ufficio ed il Socio Salvadori.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° G. Sannia, *Sull'inviluppata media di una congruenza di rette,* dal Socio Segre;

2° *Note di ematologia,* del Socio Foà.

Per la stampa nelle *Memorie* il Socio Mosso presenta un lavoro del Dr. Mario Ponzo, intitolato: *Studio della localizzazione delle sensazioni cutanee di dolore*; ed il Socio Mattirolo un lavoro del prof. E. Martel, col titolo: *Contribuzione alla lichenologia del Piemonte.*

Il Presidente delega a riferire sulla prima memoria i Soci Mosso e Foà, e sulla seconda i Soci Mattirolo e Parona; e presenta per ultimo le *Osservazioni meteorologiche fatte nell'anno 1908 all'Osservatorio della R. Università di Torino,* e calcolate dal Dr. B. Rainaldi.

Digitized by Google

LETTURE

Sull'inviluppata media di una congruenza di rette.

Nota di GUSTAVO SANNIA (Torino).

Introduzione.

1. — Nella Memoria *Nuova esposizione della Geometria infinitesimale delle congruenze rettilinee* (*) e nella recente Nota *Nuove formole utili per lo studio delle congruenze rettilinee* (**) ho posto i fondamenti di una geometria infinitesimale delle congruenze di rette analoga a quella delle superficie, iniziata da GAUSS, che consiste nel ridurre lo studio delle congruenze a quello di una coppia di forme differenziali quadratiche.

In questo lavoro considererò, col RIBAUCOUR, l'*inviluppata media* di una congruenza e darò formole generali per lo studio di essa (§ 3); poi applicherò queste formole alla ricerca di una classe notevole e molto estesa di congruenze.

Intanto colgo l'occasione per ribadire quanto ho affermato nel § 1 della Memoria citata, cioè che le due forme quadratiche introdotte dal KUMMER, e finora adoperate, sono insufficienti. da sole, a rappresentare una congruenza.

A tale scopo osserverò che questa insufficienza è dovuta essenzialmente al fatto che *ad una stessa coppia di forme di Kummer corrispondono infinite congruenze distinte.*

Per convincersene basta porsi in un caso particolare, per esempio nel caso in cui si assumono come parametri interni u, v della congruenza quelli relativi alle *superficie principali*; allora le due forme di KUMMER possono ridursi al tipo:

$$Edu^2 + Gdv^2$$

$$r(Edu^2 - Gdv^2).$$

(*) " Annali di Matematica „, t. XV della serie III, pag. 95 e segg.

(**) " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „, vol. XLIV, 1909.

Digitized by Google

Fissata ad arbitrio la funzione r di u, v (e note E, G) risultano fissate le due forme, e risulta fissata un'equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine, ad ogni soluzione della quale corrisponde una congruenza che ammette come forme di KUMMER le due precedenti (*).

Ed è perciò che son riusciti vani i tentativi fatti per ridurre lo studio delle congruenze allo studio delle due forme di KUMMER. Per esempio, il BURGATTI (**) ha sentito il bisogno di aggregare ad esse certe due funzioni $P(u, v)$, $Q(u, v)$, ed il CIFARELLI (***) di considerare anche una terza forma differenziale quadratica.

2. — Per maggior chiarezza del seguito, riporterò dalla Memoria citata alcune formole fondamentali.

Sieno X, Y, Z i coseni direttori di una retta generica di una congruenza, funzioni di due parametri u, v. Il quadrato dell'angolo ds' di due rette infinitamente vicine $g(u, v)$, $g'(u + du, v + dv)$ ed il loro momento μ sono espressi da due forme quadratiche differenziali

$$(I) \qquad \begin{cases} ds'^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \\ -\mu = Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2, \end{cases}$$

la prima delle quali ha la curvatura $+1$, ed inoltre

$$(1) \qquad \Delta = \sqrt{EG - F^2} > 0 \quad (****).$$

Il parametro distributore p di tutte le rigate della congruenza passanti per g assume un massimo ed un minimo, dei quali consideriamo la somma H (*parametro medio*) ed il pro-

(*) Vedi in BIANCHI, *Lezioni di Geometria Differenziale*, vol. I, § 145.

(**) *Sopra alcune formole fondamentali relative alle congruenze di rette* (" Rendiconti della R. Acc. dei Lincei ", vol. VIII, serie V, 1899).

(***) *Le congruenze* (" Annali di Matematica ", t. II, serie III).

(****) Con ciò escludiamo le congruenze per le quali $EG - F^2 = 0$; in esse le direzioni dei raggi sono al più ∞^1.

Digitized by Google

dotto K (*parametro assoluto*); essi si esprimono mediante i coefficienti delle due forme (I) con le formole

$$(2) \qquad H = \frac{2FD' - ED'' - GD}{EG - F^2}, \qquad K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}.$$

I coefficienti delle due forme (I) non sono indipendenti, ma sono legati dalla relazione (*)

$$(II) \qquad \frac{1}{\Delta}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b_{221}}{\Delta}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{b_{112}}{\Delta}\right)\right\} = H,$$

ove

$$b_{112} = \frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} D + \left(\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\right) D' + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} D'',$$

$$b_{221} = \frac{\partial D''}{\partial u} - \frac{\partial D'}{\partial v} + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} D + \left(\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right) D' - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} D'',$$

i simboli di CHRISTOFFEL $\left\{\begin{matrix}rs\\t\end{matrix}\right\}$ essendo costruiti con i coefficienti della prima forma (I).

Viceversa: *due forme del tipo* (I) (*la prima delle quali definita ed a curvatura* $+1$), *i cui coefficienti sieno legati dalla* (II), *individuano una congruenza di raggi.*

Per costruire la congruenza basta conoscerne la *superficie media* S, luogo dei *punti medii* $Q(x, y, z)$ dei singoli raggi: note X, Y, Z in funzione di u, v, le x, y, z si ottengono con quadrature dalle formole

$$(III) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{D'}{\Delta}\dfrac{\partial X}{\partial u} - \dfrac{D}{\Delta}\dfrac{\partial X}{\partial v} + \dfrac{b_{112}}{\Delta} X, \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \dfrac{D''}{\Delta}\dfrac{\partial X}{\partial u} - \dfrac{D'}{\Delta}\dfrac{\partial X}{\partial v} - \dfrac{b_{221}}{\Delta} X \end{cases}$$

e dalle analoghe in y e z.

(*) Nei lavori citati del BURGATTI e del CIFARELLI si dànno invece *tre* relazioni. Esse furono stabilite per la prima volta dal CESÀRO che le chiamò *le formole di Codazzi nella teoria delle congruenze* (*Lezioni di Geometria intrinseca*, cap. XIV).

Digitized by Google

L'inviluppata media.

3. — *Piano medio* di g è il piano perpendicolare a g nel suo punto medio Q. I piani medii inviluppano una superficie S_0 (non sviluppabile, essendo $\Delta > 0$) che il RIBAUCOUR chiamò *inviluppata media.*

Detta W la distanza del piano medio dall'origine degli assi cartesiani, saranno X, Y, Z, W le *coordinate tangenziali* (WEINGARTEN) del piano medio, tangente ad S_0.

Se dunque si fa della superficie S_0 la rappresentazione sferica di GAUSS, sulla sfera che ha per centro l'origine 0 e per raggio 1, si ha che la prima delle (I) rappresenta il quadrato dell'elemento lineare sferico, ossia è la *terza forma fondamentale* di S_0 (*).

La superficie S_0 sarà completamente individuata quando sarà nota anche la sua *seconda forma fondamentale* (**)

$$D_0 du^2 + 2 D_0' du dv + D_0'' dv^2.$$

Per il calcolo dei coefficienti D_0, D_0', D_0'' adopereremo le formole (***)

$$(4)\quad \begin{cases} -D_0 = \dfrac{\partial^2 W}{\partial u^2} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial W}{\partial u} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial W}{\partial v} + EW, \\ -D_0' = \dfrac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial W}{\partial u} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial W}{\partial v} + FW, \\ -D_0'' = \dfrac{\partial^2 W}{\partial v^2} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial W}{\partial u} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial W}{\partial v} + GW. \end{cases}$$

Si ha

$$(5)\qquad W = Xx + Yy + Zz = \Sigma X x,$$

(*) BIANCHI, loc. cit., vol. I, cap. V.
(**) ID., § 72.
(***) ID., § 81.

Digitized by Google

quindi

$$\frac{\partial W}{\partial u} = \sum X \frac{\partial x}{\partial u} + \sum x \frac{\partial X}{\partial u}, \quad \frac{\partial W}{\partial v} = \sum X \frac{\partial x}{\partial v} + \sum x \frac{\partial X}{\partial v}$$

ossia, per le (III),

$$(6) \qquad \frac{\partial W}{\partial u} = \frac{b_{112}}{\Delta} + \sum x \frac{\partial X}{\partial u}, \quad \frac{\partial W}{\partial v} = -\frac{b_{221}}{\Delta} + \sum x \frac{\partial X}{\partial v};$$

poi

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b_{112}}{\Delta}\right) + \sum \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial u} + \sum x \frac{\partial^2 X}{\partial u^2},$$

quindi, per le (III) e per le formole (*)

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 X}{\partial u^2} = \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial X}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial X}{\partial v} - EX, \\ \dfrac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial X}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial X}{\partial v} - FX, \\ \dfrac{\partial^2 X}{\partial v^2} = \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial X}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial X}{\partial v} - GX, \end{cases}$$

con le analoghe in Y e Z, si ha

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b_{112}}{\Delta}\right) + \frac{ED' - FD}{\Delta} + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \sum x \frac{\partial X}{\partial u} + \\ + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \sum x \frac{\partial X}{\partial v} - E \sum Xx$$

ossia, per le (5) e (6),

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b_{112}}{\Delta}\right) + \frac{ED' - FD}{\Delta} + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left(\frac{\partial W}{\partial u} - \frac{b_{112}}{\Delta}\right) + \\ + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \left(\frac{\partial W}{\partial v} + \frac{b_{221}}{\Delta}\right) - EW.$$

(*) Bianchi, loc. cit., § 72.

Digitized by Google

Analogamente si trova che

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{b_{112}}{\Delta}\right) + \frac{ED'' - FD'}{\Delta} + \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\left(\frac{\partial W}{\partial u} - \frac{b_{112}}{\Delta}\right) +$$

$$+ \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{b_{221}}{\Delta}\right) - FW = -\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b_{221}}{\Delta}\right) +$$

$$+ \frac{FD' - GD}{\Delta} + \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\left(\frac{\partial W}{\partial u} - \frac{b_{112}}{\Delta}\right) + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{b_{221}}{\Delta}\right) - FW,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{b_{22}}{\Delta}\right) + \frac{FD'' - GD'}{\Delta} + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\left(\frac{\partial W}{\partial u} - \frac{b_{112}}{\Delta}\right) +$$

$$+ \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{b_{221}}{\Delta}\right) - GW;$$

quindi, sostituendo nelle (4), si ha infine

$$(8)\quad \begin{cases} -D_0 = \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{b_{112}}{\Delta}\right) + \dfrac{ED' - FD}{\Delta} - \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{b_{112}}{\Delta} + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{b_{221}}{\Delta}, \\ -D_0' = \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{b_{112}}{\Delta}\right) + \dfrac{ED'' - FD'}{\Delta} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{b_{112}}{\Delta} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{b_{221}}{\Delta} = \\ \quad = -\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{b_{221}}{\Delta}\right) + \dfrac{FD' - GD}{\Delta} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{b_{112}}{\Delta} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{b_{221}}{\Delta}, \\ -D_0'' = -\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{b_{221}}{\Delta}\right) + \dfrac{FD'' - GD'}{\Delta} - \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{b_{112}}{\Delta} + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{b_{221}}{\Delta}. \end{cases}$$

I raggi principali di curvatura r_1 ed r_2 di S_0 saranno poi dati dalle formole (*)

$$(9)\quad r_1 + r_2 = \frac{2FD_0' - ED_0'' - GD_0}{EG - F^2}, \qquad r_1 r_2 = \frac{D_0 D_0'' - D_0'^2}{EG - F^2}.$$

Semplice e notevole è l'espressione di $r_1 + r_2$ in funzione dei coefficienti delle due forme (I). Infatti la prima delle (9), per i valori (8), diventa

---

(*) Id., § 70.

Digitized by Google

$$\Delta^2(r_1+r_2) = -F\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{b_{112}}{\Delta}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b_{221}}{\Delta}\right) + G\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{b_{112}}{\Delta}\right) - \right.$$

$$\left. - E\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{b_{221}}{\Delta}\right)\right] + \frac{b_{112}}{\Delta}\left[2F\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} - G\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} - E\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\right] -$$

$$- \frac{b_{221}}{\Delta}\left[2F\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - G\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} - E\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\right];$$

ma si ha identicamente (*)

$$2F\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} - G\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} - E\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = \Delta\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G}{\Delta}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F}{\Delta}\right)\right],$$

$$2F\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - G\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} - E\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} = \Delta\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E}{\Delta}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F}{\Delta}\right)\right],$$

quindi si trova facilmente

$$(10) \qquad r_1 + r_2 = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Gb_{112} + Fb_{221}}{\Delta^2}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{Fb_{112} + Eb_{221}}{\Delta^2}\right)\right].$$

Per il significato geometrico di $r_1 + r_2$, *il secondo membro è un invariante differenziale simultaneo delle due forme* (I).

Il suo annullarsi è condizione necessaria e sufficiente affinchè le (I) *individuino una congruenza la cui inviluppata media sia ad area minima.*

Inviluppata media minima.

4. — Interessanti sono le particolari congruenze ora segnalate. Esse costituiscono una classe estesissima.

Il RIBAUCOUR dimostrò che le congruenze *isotrope* hanno per inviluppata media una superficie ad area minima, ed il MERCATANTI più recentemente (**) ha dimostrato che la stessa proprietà godono le congruenze costituite dalle normali di una *superficie di Bonnet.*

(*) Sono le formole di CODAZZI applicate alla sfera (cfr. BIANCHI, loc. cit., § 56).

(**) *Sulle superficie di Bonnet* (" Giornale di Matematiche ", XLI, 1904).

Digitized by Google

Ma queste congruenze non sono le sole, ossia non esauriscono tutta la classe. In ciò che segue io mi propongo di costruire *la più generale congruenza della classe.* Per quanto precede, basterà che io costruisca tutte le coppie di forme del tipo (I) i cui coefficienti sieno legati, non solo dalla relazione (II), ma anche dall'altra:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Gb_{112}+Fb_{221}}{\Delta^2}\right)=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{Fb_{112}+Eb_{221}}{\Delta^2}\right).$$

Detta φ una conveniente funzione di u, v, possiamo dunque porre

$$\frac{Gb_{112}+Fb_{221}}{\Delta^2}=-\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \qquad \frac{Fb_{112}+Eb_{221}}{\Delta^2}=-\frac{\partial\varphi}{\partial u},$$

da cui

$$(11)\qquad b_{112}=F\frac{\partial\varphi}{\partial u}-E\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \qquad b_{221}=F\frac{\partial\varphi}{\partial v}-G\frac{\partial\varphi}{\partial u};$$

sostituendo nella (II), otteniamo

$$(12)\qquad \frac{1}{\Delta}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u}-F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\Delta}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v}-F\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\Delta}\right)\right\}+H=0$$

ossia

$$\Delta_2\varphi+H=0,$$

ove $\Delta_2\varphi$ è il parametro differenziale secondo di φ costruito rispetto alla prima forma (I) (*).

Se dunque supponiamo fissata l'immagine sferica della congruenza, e quindi fissata la prima forma fondamentale (I), vediamo che la ricerca delle nostre congruenze equivale alla ricerca delle terne di funzioni D, D, D' di u, v che soddisfanno alle (11) e (12), ove φ è una funzione arbitraria di u, v.

5. — Per procedere alla effettiva ricerca, conviene assumere come coordinate interne u, v i parametri u, u_0 delle *linee di lunghezza nulla* sulla sfera.

(*) Bianchi, loc. cit., § 43.

Digitized by Google

È noto (*) che allora le coordinate del punto (X, Y, Z) della sfera sono espresse da

$$(13)\quad X = \frac{u + u_0}{uu_0 + 1}, \qquad Y = i\,\frac{u_0 - u}{uu_0 + 1}, \qquad Z = \frac{uu_0 - 1}{uu_0 + 1}$$

e che l'elemento lineare sferico si riduce a

$$(14)\quad ds'^2 = \frac{4\,du\,du_0}{(uu_0 + 1)^2}.$$

Essendo ora

$$(15)\quad \begin{cases} v = u_0, \qquad E = G = 0, \qquad F = \dfrac{2}{(uu_0 + 1)^2}, \\ \Delta = \dfrac{2i}{(uu_0 + 1)^2}, \qquad H = -\dfrac{2D'}{F}, \end{cases}$$

la (12) si riduce a

$$(16)\quad D' = -\frac{\partial^2 \varphi}{du\,du_0};$$

inoltre i simboli di Christoffel assumono attualmente i valori (**)

$$\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 0, \qquad \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} = -\frac{2u_0}{uu_0 + 1},$$

$$\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} = -\frac{2u}{uu_0 + 1},$$

e però le (3) e le (11) diventano rispettivamente

$$(17)\quad \begin{cases} b_{112} = \dfrac{\partial D}{\partial u_0} - \dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial u^2\,\partial u_0} - \dfrac{2u_0}{uu_0 + 1}\,\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial u_0}, \\ b_{221} = \dfrac{\partial D''}{\partial u} - \dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial u\,\partial u_0^2} - \dfrac{2u}{uu_0 + 1}\,\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial u_0}, \end{cases}$$

$$(18)\quad b_{112} = \frac{2}{(uu_0 + 1)^2}\,\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \qquad b_{221} = -\frac{2}{(uu_0 + 1)^2}\,\frac{\partial \varphi}{\partial r};$$

(*) Bianchi, loc. cit., § 340.
(**) Id., § 43.

Digitized by Google

ne segue che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial u_0} = \dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial u^2 \partial u_0} + \dfrac{2u_0}{uu_0+1} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial u_0} + \dfrac{2}{(uu_0+1)^2} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial D''}{\partial u} = \dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial u \partial u_0^2} + \dfrac{2u}{uu_0+1} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial u_0} + \dfrac{2}{(uu_0+1)^2} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_0}, \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial u_0} = \dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial u^2 \partial u_0} + \dfrac{\partial}{\partial u_0}\left(\dfrac{2u_0}{uu_0+1} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\right), \\ \dfrac{\partial D''}{\partial u} = \dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial u \partial u_0^2} + \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{2u}{uu_0+1} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_0}\right); \end{cases}$$

da cui integrando

$$(19) \qquad \begin{cases} D = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \dfrac{2u_0}{uu_0+1} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} - 2i\alpha(u), \\ D'' = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u_0^2} + \dfrac{2u}{uu_0+1} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_0} + 2i\beta(u_0), \end{cases}$$

ove α e β sono funzioni arbitrarie di u ed u_0 rispettivamente.

Le (16) e (19) risolvono completamente il problema proposto, perchè dànno i coefficienti della seconda forma (I) della congruenza.

Possiamo dunque enunciare il seguente teorema:

Le due forme differenziali quadratiche

$$(A) \qquad \begin{cases} ds'^2 = \dfrac{4du du_0}{(uu_0+1)^2}, \\ -\mu = \left(\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \dfrac{2u_0}{uu_0+1} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} - 2i\alpha\right) du^2 + 2 \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial u_0} du du_0 + \\ + \left(\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u_0^2} + \dfrac{2u}{uu_0+1} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_0} + 2i\beta\right) du_0^2, \end{cases}$$

ove $\varphi(u, u_0)$, $\alpha(u)$, $\beta(u_0)$ *sono funzioni arbitrarie dei loro argomenti complessi, definiscono la più generale congruenza di raggi la cui inviluppata media è una superficie ad area minima.*

Osserviamo che a due funzioni φ che differiscono per una costante corrisponde la medesima forma μ e quindi la stessa

Digitized by Google

congruenza, dunque: *nella funzione* $\varphi(u, u_0)$ *si possono trascurare le costanti additive.*

Il parametro medio (1) della congruenza è, per le (15) e (16),

$$H = -(uu_0+1)^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial u \partial u_0} \tag{20}$$

e dipende solo da φ, mentre che il parametro assoluto

$$K = \frac{1}{4}(uu_0+1)^4(D'^2 - DD''),$$

ove D, D', D'' hanno i valori (16) e (19), dipende anche da α e da β.

6. — Conoscendo i coseni direttori (13) dei raggi della congruenza, per la sua effettiva costruzione basterà conoscerne anche la superficie media, deducibile dalle (III).

Per le (13), (16), (18) e (19) e per le seguenti, deducibili dalle (13),

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{1-u_0^2}{(uu_0+1)^2}, \quad \frac{\partial Y}{\partial u} = -i\frac{1+u_0^2}{(uu_0+1)^2}, \quad \frac{\partial Z}{\partial u} = \frac{2u_0}{(uu_0+1)^2},$$

$$\frac{\partial X}{\partial u_0} = \frac{1-u^2}{(uu_0+1)^2}, \quad \frac{\partial Y}{\partial u_0} = i\frac{1+u^2}{(uu_0+1)^2}, \quad \frac{\partial Z}{\partial u_0} = \frac{2u}{(uu_0+1)^2},$$

le (III) diventano

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = -\dfrac{i}{2}(1-u_0^2)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial u_0} + \dfrac{i}{2}(1-u^2)\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \dfrac{2u_0}{uu_0+1}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - 2i\alpha\right) - \\ \qquad\qquad - i\dfrac{u+u_0}{uu_0+1}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial x}{\partial u_0} = -\dfrac{i}{2}(1-u_0^2)\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u_0^2} + \dfrac{2u}{uu_0+1}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_0} + 2i\beta\right) + \dfrac{i}{2}(1-u^2)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial u_0} + \\ \qquad\qquad + i\dfrac{u+u_0}{uu_0+1}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_0}, \end{cases}$$

Digitized by Google

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial u} = -\dfrac{1}{2}(1+u_0^2)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial u_0} - \dfrac{1}{2}(1+u^2)\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \dfrac{2u_0}{uu_0+1}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - 2i\alpha\right) - \\ \qquad\qquad - \dfrac{u-u_0}{uu_0+1}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial y}{\partial u_0} = -\dfrac{1}{2}(1+u^2)\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u_0^2} + \dfrac{2u}{uu_0+1}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_0} + 2i\beta\right) - \dfrac{1}{2}(1+u^2)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial u_0} + \\ \qquad\qquad + \dfrac{u-u_0}{uu_0+1}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_0}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = -iu_0\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial u_0} + iu\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \dfrac{2u_0}{uu_0+1}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - 2i\alpha\right) - i\dfrac{uu_0-1}{uu_0+1}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial u_0} = -iu_0\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u_0^2} + \dfrac{2u}{uu_0+1}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_0} + 2i\beta\right) + iu\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial u_0} + i\dfrac{uu_0-1}{uu_0+1}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_0} \end{cases}$$

e possono anche scriversi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = -\dfrac{i}{2}(1-u^2)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial u_0} + (1-u^2)\alpha + \dfrac{i}{2}\dfrac{\partial}{\partial u}\left[(1-u^2)\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\right], \\ \dfrac{\partial x}{\partial u_0} = \dfrac{i}{2}(1-u_0^2)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial u_0} + (1-u_0^2)\beta - \dfrac{i}{2}\dfrac{\partial}{\partial u_0}\left[(1-u_0^2)\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_0}\right], \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial u} = -\dfrac{1}{2}(1+u_0^2)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial u_0} + i(1-u^2)\alpha - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial u}\left[(1+u^2)\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\right], \\ \dfrac{\partial y}{\partial u_0} = -\dfrac{1}{2}(1+u^2)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial u_0} - i(1+u_0^2)\beta - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial u_0}\left[(1+u_0^2)\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_0}\right], \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = -iu_0\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial u_0} + 2u\alpha + i\dfrac{\partial}{\partial u}\left(u\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\right), \\ \dfrac{\partial z}{\partial u_0} = iu\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial u_0} + 2u_0\beta - i\dfrac{\partial}{\partial u_0}\left(u_0\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_0}\right). \end{cases}$$

Sotto quest'ultima forma si integrano facilmente.

Quindi: *la superficie media* S *della congruenza* (A) *è definita dalle formole*

Digitized by Google

$$(B)\quad \begin{cases} x = \int(1-u^2)\alpha du + \int(1-u_0^2)\beta du_0 + \frac{i}{2}(1-u^2)\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{i}{2}(1-u^2)\frac{\partial}{\partial} \\ y = i\int(1+u^2)\alpha du - i\int(1+u_0^2)\beta du_0 - \frac{1}{2}(1+u^2)\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{1}{2}(1+u^2)\frac{\partial}{\partial} \\ z = 2\int u\alpha du + 2\int u_0\beta du_0 + iu\frac{\partial\varphi}{\partial u} - iu_0\frac{\partial\varphi}{\partial u_0}. \end{cases}$$

7. — Abbiamo già osservato, al n. 2, che *la* (14) *è la terza forma fondamentale dell'inviluppata media* S_0. Per le (15), (17), (18) e (19), i coefficienti (8) della seconda forma diventano

$$(21)\qquad D_0 = -2i\alpha,\quad D_0' = 0,\quad D_0'' = 2i\beta,$$

quindi *la seconda forma fondamentale di* S_0 *è*

$$-2i\alpha du^2 + 2i\beta du_0^2.$$

Queste due forme sono indipendenti da φ, dunque: *cambiando comunque la funzione* φ *nelle* (A) *e tenendo fisse* α *e* β, *non muta l'inviluppata media* S_0.

Basta quindi cercarla per un caso particolare, per es., per $\varphi = 0$; ma in tal caso le (18) e (20) dànno

$$H = 0,\quad b_{112} = 0,\quad b_{221} = 0,$$

e queste sono le condizioni necessarie e sufficienti affinchè la congruenza (A) sia costituita dalle normali ad una superficie ad area minima la quale ne è pure superficie media (*); dunque l'inviluppata media cercata può ottenersi senz'altro dalle (B), ponendovi $\varphi = 0$.

Quindi: *l'inviluppata media* S_0 *della congruenza* (A) *è definita dalle formole*

$$(C)\quad \begin{cases} x_0 = \int(1-u^2)\alpha du + \int(1-u_0^2)\beta du_0, \\ y_0 = i\int(1+u^2)\alpha du - i\int(1+u_0^2)\beta du_0, \\ z_0 = 2\int u\alpha du + 2\int u_0\beta du_0, \end{cases}$$

ossia dalle ben note formole di Weierstrass.

(*) N. 8 della citata memoria degli *Annali*.

Digitized by Google

Le superficie (B) possono dunque considerarsi come una generalizzazione di queste, nel senso che le superficie minime sono le superficie medie (B) di quelle particolari congruenze della classe (A) che corrispondono al valore zero della funzione arbitraria φ.

Le formole

$$(D)\qquad \begin{cases} \xi = \frac{i}{2}(1-u^2)\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{i}{2}(1-u_0^2)\frac{\partial\varphi}{\partial u_0}, \\ \eta = -\frac{1}{2}(1+u^2)\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{1}{2}(1+u_0^2)\frac{\partial\varphi}{\partial u_0}, \\ \zeta = iu\frac{\partial\varphi}{\partial u} - iu_0\frac{\partial\varphi}{\partial u_0} \end{cases}$$

definiscono una superficie Σ che incontreremo al n. 10.

La superficie media S della congruenza può dedursi da S_0 e da Σ, essendo

$$(22)\qquad x = x_0 + \xi, \qquad y = y_0 + \eta, \qquad z = z_0 + \zeta.$$

Con le formole precedenti resta anche risoluto il problema di *costruire tutte le congruenze che hanno per inviluppata media una superficie minima assegnata.* Perchè data una superficie minima S_0, mediante le formole di WEIERSTRASS (C), son note le funzioni $\alpha(u)$ e $\beta(u_0)$; allora le congruenze richieste son quelle definite dalle due forme (A) o dalla loro superficie media (B), ove solo $\varphi(u, u_0)$ è arbitraria.

8. — Finora non abbiamo fatto quistione di realtà ed abbiamo raccolte tutte le soluzioni del problema, sia reali che immaginarie.

Or fermiamoci particolarmente sulle congruenze reali della classe (A). Osserviamo anzitutto che in esse la inviluppata media S_0 deve essere una superficie minima reale, e quindi, come è noto, nelle formole (C) che la definiscono le funzioni $\alpha(u)$ e $\beta(u_0)$ debbono essere complesse coniugate; ponendo l'indice 0 per indicare la coniugata di una funzione, dovremo assumere $\beta(u_0) = \alpha(u_0)$. Inoltre debbono essere coniugati i cam-

Digitized by Google

mini curvilinei degli integrali di ciascuno dei secondi membri delle (C).

Deve poi essere reale anche la superficie media, quindi le formole (B) che la definiscono non debbono alterarsi cambiandovi i in $-i$; ciò esige che sia

$$(1-u^2)\left[\frac{\partial\varphi(u,u_0)}{\partial u}-\frac{\partial\varphi_0(u_0,u)}{\partial u}\right]-(1-u_0^2)\left[\frac{\partial\varphi(u,u_0)}{\partial u_0}-\frac{\partial\varphi_0(u_0,u)}{\partial u_0}\right]=0,$$

$$(1+u^2)\left[\frac{\partial\varphi(u,u_0)}{\partial u}-\frac{\partial\varphi_0(u_0,u)}{\partial u}\right]+(1+u_0^2)\left[\frac{\partial\varphi(u,u_0)}{\partial u_0}-\frac{\partial\varphi_0(u_0,u)}{\partial u_0}\right]=0,$$

$$u\left[\frac{\partial\varphi(u,u_0)}{\partial u}-\frac{\partial\varphi_0(u_0,u)}{\partial u}\right]-u_0\left[\frac{\partial\varphi(u,u_0)}{\partial u_0}-\frac{\partial\varphi_0(u_0,u)}{\partial u_0}\right]=0,$$

e quindi

$$\frac{\partial\varphi(u,u_0)}{\partial u}=\frac{\partial\varphi(u_0,u)}{\partial u},\qquad \frac{\partial\varphi(u,u_0)}{\partial u_0}=\frac{\partial\varphi_0(u_0,u)}{\partial u_0}$$

ossia

$$\varphi(u,u_0)=\varphi_0(u_0,u)+c,$$

ove c è una costante; ma è chiaro che c è necessariamente immaginaria pura, $c=ic_1$ (c_1 reale), e d'altra parte è lecito cambiar φ in $\varphi+\frac{1}{2}ic_1$ (cfr. n. 5), quindi è lecito supporre

$$\varphi(u,u_0)=\varphi_0(u_0,u).$$

Dunque: *le congruenze reali della classe* (A) *si ottengono assumendo per* $\alpha(u)$ *una funzione arbitraria, ponendo* $\beta=\alpha_0(u_0)$ *ed assumendo per* $\varphi(u,u_0)$ *una funzione che per valori coniugati di* u *ed* u_0 *assuma valori reali, cioè una funzione del tipo*

$$\varphi(u,u_0)=\Phi(u,u_0)+\Phi_0(u_0,u),$$

con Φ *arbitraria.*

Digitized by Google

Le congruenze isotrope.

9. — Le congruenze della classe (A) hanno a comune la prima forma fondamentale, quindi ciascuna di esse sarà caratterizzata dalla seconda forma.

Volendo esaminare le congruenze più notevoli della classe, vediamo anzitutto come si distinguono le isotrope.

Le due forme (I) individuano una congruenza isotropa quando la matrice dei coefficienti

$$\begin{vmatrix} E & F & G \\ D & D' & D'' \end{vmatrix}$$

ha la caratteristica 1 (*); quindi le due forme (A) individuano una congruenza isotropa quando

$$(23)\qquad \begin{cases} D = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \dfrac{2u_0}{uu_0+1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - 2i\alpha = 0\,, \\ D'' = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u_0^2} + \dfrac{2u}{uu_0+1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_0} + 2i\beta = 0\,. \end{cases}$$

Fissate ad arbitrio $\alpha(u)$ e $\beta(u_0)$, possiamo facilmente integrare questo sistema di equazioni in φ. Consideriamo perciò α e β come derivate terze di due funzioni γ e δ, cioè poniamo

$$(24)\qquad \alpha(u) = \gamma'''(u)\,, \qquad \beta(u_0) = \delta'''(u_0),$$

e scriviamo le equazioni (23) sotto la forma

$$(25)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left[(uu_0+1)^2\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\right] - 2i(uu_0+1)^2\gamma''' = 0\,, \\ \dfrac{\partial}{\partial u_0}\left[(uu_0+1)^2\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_0}\right] + 2i(uu_0+1)^2\delta''' = 0\,. \end{cases}$$

(*) N. 18 della memoria degli *Annali*.

Digitized by Google

La prima dà

$$(uu_0 + 1)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} - 2i \int (uu_0 + 1)^2 \Upsilon''' du = 2f(u_0),$$

ove f è una funzione arbitraria di u_0; integrando successivamente per parti, si ha

$$\int (uu_0 + 1)^2 \Upsilon''' du = (uu_0 + 1)^2 \Upsilon'' - 2u_0 (uu_0 + 1) \Upsilon' + 2u_0^2 \Upsilon,$$

quindi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} - 2i\Upsilon'' + 4iu_0 \frac{\partial}{\partial u} \frac{\Upsilon}{uu_0 + 1} = \frac{2f(u_0)}{(uu_0 + 1)^2};$$

da cui, integrando rispetto ad u,

$$\varphi - 2i\Upsilon' + \frac{4iu_0}{uu_0 + 1} \Upsilon = - \frac{2f(u_0)}{u_0 (uu_0 + 1)} + \frac{2f(u_0)}{u_0} + \psi(u_0)$$

ossia

$$\varphi = 2i\Upsilon' + \psi(u_0) + 2 \frac{uf(u_0) - 2iu_0 \Upsilon}{uu_0 + 1}, \tag{26}$$

ove si è introdotta una funzione arbitraria di u_0 della forma

$$\frac{2f(u_0)}{u_0} + \psi(u_0).$$

Derivando rispetto ad u_0, si ha

$$(uu_0 + 1)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_0} = (uu_0 + 1)^2 \psi'(u_0) - 2u^2 f(u_0) + 2u(uu_0 + 1) f'(u_0) - 4i\Upsilon,$$

quindi la seconda delle (25) diventa

$$(uu_0 + 1)^2 [2i\delta''' + \psi''(u_0)] + 2u(uu_0 + 1) [\psi'(u_0) + f''(u_0)] = 0.$$

Affinchè questa sussista qualunque sia u, occorre e basta che sia

$$2i\delta''' + \psi''(u_0) = 0, \qquad \psi'(u_0) + f''(u_0) = 0, \tag{27}$$

Digitized by Google

quindi

$$f'''(u_0) = 2i\delta'''(u_0),$$

da cui

$$f(u_0) = 2i\delta(u_0) + \frac{1}{2} cu_0^2 + c_1 u_0 + c_2,$$

con c, c_1, c_2 costanti; ma si osservi che, data $\beta(u_0)$, la seconda delle (24) dà $\delta(u_0)$ solo a meno di un trinomio del tipo $\frac{1}{2} cu_0^2 + + c_1 u_0 + c_2$, quindi questo si può ritenere incorporato in $2i\delta(u_0)$, e però si può assumere

$$f(u_0) = 2i\delta(u_0);$$

allora la seconda delle (27) dà

$$\psi(u_0) = -2i\delta'(u_0) + c,$$

con c costante; infine, sostituendo in (26) i valori trovati per $f(u_0)$ e $\psi(u_0)$ e sopprimendo una costante additiva in φ (ciò che è lecito, cfr. n. 5), si ha

$$\varphi = 2i\left[\gamma'(u) - \delta'(u_0) - 2\frac{u_0\gamma(u) - u\delta(u_0)}{uu_0 + 1}\right]. \tag{28}$$

È poi facile verificare che

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial u_0} = -\frac{2\varphi}{(uu_0+1)^2} = D',$$

per la (16).

Dunque, tenendo conto delle (23), il teorema generale dà che: *le congruenze isotrope sono caratterizzate dalla (seconda) forma*

$$-\mu = \frac{8i}{(uu_0+1)^2}\left[\delta'(u_0) - \gamma'(u) + 2\frac{u_0\gamma(u) - u\delta(u_0)}{uu_0+1}\right] du\,du_0,$$

ove $\gamma(u)$, $\delta(u_0)$ *sono funzioni arbitrarie.*

La corrispondente inviluppata media è la superficie minima definita dalle (C) che, per le (24), si riducono alle note formole di WEIERSTRASS

Digitized by Google

$$(C')\quad \begin{cases} x_0 = (1-u^2)\gamma''(u) + 2u\gamma'(u) - 2\gamma(u) + (1-u_0^2)\delta''(u_0) + \\ \qquad + 2u_0\delta'(u_0) - 2\delta(u_0), \\ y_0 = i(1+u^2)\gamma''(u) - 2iu\gamma'(u) - 2i\gamma(u) - i(1+u_0^2)\delta''(u_0) + \\ \qquad + 2iu_0\delta'(u_0) + 2i\delta(u_0), \\ z_0 = 2u\gamma''(u) - 2\gamma'(u) + 2u_0\delta''(u_0) - 2\delta'(u_0). \end{cases}$$

Infine si ha dalla (28)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = 2i\left[\gamma''(u) - 2\,\dfrac{u_0\gamma'(u) - \delta(u_0)}{uu_0+1} + 2u_0\,\dfrac{u_0\gamma(u) - u\delta(u_0)}{(uu_0+1)^2}\right], \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_0} = 2i\left[-\delta''(u_0) - 2\,\dfrac{\gamma(u) - u_0\delta'(u_0)}{uu_0+1} + 2u\,\dfrac{u_0\gamma(u) - u\delta(u_0)}{(uu_0+1)^2}\right]. \end{cases}$$

quindi le (D) e le (22) dànno la superficie media della congruenza:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{uu_0+1}\{(u+u_0)[\gamma'(u) + \delta'(u_0)] - 2[\gamma(u) + \delta(u_0)]\}, \\ y = \dfrac{2}{uu_0+1}\{(u-u_0)[\gamma'(u) + \delta'(u_0)] - 2[\gamma(u) - \delta(u_0)]\}, \\ z = \dfrac{2}{uu_0+1}\{(uu_0+1)^2[\gamma'(u) + \delta'(u_0)] - 2[u_0\gamma(u) + u\delta(u_0)]\}. \end{cases}$$

Per ottenere risultati reali occorre e basta assumere

$$\delta(u_0) = \gamma_0(u_0).$$

Piani medii concorrenti in un punto.

10. — L'inviluppata media (C) si riduce ad un punto, nel quale concorrono tutti i piani medii, quando è

$$\alpha(u) = 0, \qquad \beta(u_0) = 0;$$

Digitized by Google

quindi: *le congruenze con i piani medii concorrenti in un punto sono caratterizzate dalla forma*

$$-\mu=\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{2u_0}{uu_0+1}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)du^2+2\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial u_0}\,du\,du_0+$$
$$+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_0^2}+\frac{2u}{uu_0+1}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u_0}\right)du_0^2,$$

ove $\varphi(u, u_0)$ *è una funzione arbitraria; la corrispondente superficie media è la superficie* Σ *definita dalle* (D).

Posto

$$(29)\quad \xi_1=i(1-u^2)\frac{\partial\varphi}{\partial u},\quad \eta_1=-(1+u^2)\frac{\partial\varphi}{\partial u},\quad \zeta_1=2iu\frac{\partial\varphi}{\partial u},$$

$$(30)\quad \xi_2=-i(1-u_0^2)\frac{\partial\varphi}{\partial u_0},\quad \eta_2=-(1+u_0^2)\frac{\partial\varphi}{\partial u_0},\quad \zeta_2=-2iu_0\frac{\partial\varphi}{\partial u_0},$$

le (D) diventano

$$\xi=\frac{\xi_1+\xi_2}{2},\quad \eta=\frac{\eta_1+\eta_2}{2},\quad \zeta=\frac{\zeta_1+\zeta_2}{2}.$$

Or supposto che $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ e $\frac{\partial\varphi}{\partial u_0}$ dipendano rispettivamente da u ed u_0, cioè supposto che sia

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial u_0}\neq 0,$$

i due punti $M_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$, $M_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ descrivono due superficie Σ_1, Σ_2 al variare di u ed u_0: la superficie Σ luogo del punto (ξ, η, ζ) è il luogo del punto medio del segmento M_1M_2.

Che se poi

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial u_0}=0,$$

ciò ancora sussiste, ma le superficie Σ_1 e Σ_2 si riducono a due curve; allora, essendo per la (20) $H=0$, la congruenza è normale (*).

(*) N. 19 della memoria degli *Annali*.

Digitized by Google

Intanto in ogni caso si ha

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = 0, \qquad \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 = 0,$$

ossia le due superficie Σ_1, Σ_2 coincidono con due regioni della sfera di raggio nullo che ha per centro l'origine 0 (o le due curve Σ_1, Σ_2 giacciono su questa sfera).

Dunque: *se la congruenza non è normale, le* (29) *e* (30) *pongono una corrispondenza biunivoca fra due regioni della sfera di raggio nullo che ha per centro l'origine; la superficie media* Σ *della congruenza è il luogo del punto medio del segmento che unisce due punti corrispondenti. Se la congruenza è normale,* Σ *è una superficie di traslazione le cui curve generatrici* (29) *e* (30) *sono due curve di detta sfera.*

Le congruenze reali si hanno assumendo

$$\varphi = \Phi(u, u_0) + \Phi_0(u_0, u)$$

con Φ arbitraria.

11. — Le congruenze costruite nel numero precedente e quelle costituite dalle normali ad una superficie ad area minima (n. 7) possono considerarsi come le congruenze fondamentali della classe (A), in quanto che ogni altra congruenza della classe può dedursi da due di esse. Infatti prese due congruenze qualunque di ciascuno dei due tipi, dalla *composizione* delle loro superficie medie secondo le formole (22) si deduce la superficie media di un'altra generica congruenza della classe (A); inoltre i raggi corrispondenti delle tre congruenze sono paralleli.

Congruenze di parametro medio costante.

12. — Supponendo H costante, l'equazione (20) ha per integrale generale

$$\varphi = -H \log (uu_0 + 1) + f(u) + g(u_0), \tag{31}$$

ove f e φ sono funzioni arbitrarie dei loro argomenti; dunque:

Digitized by Google

Le congruenze (A) *di parametro medio H costante son quelle che corrispondono al valore* (31) *della funzione* φ. *L'inviluppata media comune è la superficie minima* (C); *le loro superficie medie sono definite dalle formole:*

$$(32)\quad \begin{cases} x = x_0 + \frac{i}{2}(1-u^2)f'(u) - \frac{i}{2}(1-u_0^2)g'(u_0) + \frac{i}{2}H(u-u_0), \\ y = y_0 - \frac{1}{2}(1+u^2)f'(u) - \frac{1}{2}(1+u_0^2)g'(u) - \frac{1}{2}H(u+u_0), \\ z = z_0 + iuf'(u) - iu_0 g'(u_0). \end{cases}$$

Si hanno risultati reali, assumendo

$$\beta(u_0) = \alpha_0(u_0), \qquad g(u_0) = f_0(u_0).$$

13. In particolare, *le congruenze normali della classe* (A) *corrispondono alla funzione*

$$\varphi = f(u) + g(u_0).$$

Si può anche dire che esse son caratterizzate dal fatto che la loro seconda forma fondamentale assume la forma *ortogonale*

$$-\mu = \left[f''(u) + \frac{2u_0}{uu_0+1} f'(u) - 2i\alpha(u)\right] du^2 +$$

$$+ \left[g''(u_0) + \frac{2u}{uu_0+1} g'(u_0) + 2i\beta(u_0)\right] du_0^2.$$

Le superficie medie si ottengono dalle (32) ponendovi $H=0$.

Per ottenere le superficie ortogonali ai raggi di una di esse, basta portare su ciascun raggio, a partire dal punto medio (x, y, z), il segmento la cui lunghezza r è definita con quadrature dalle formole (*)

$$\frac{\partial r}{\partial u} = \frac{b_{112}}{\Delta}, \qquad \frac{\partial r}{\partial u_0} = -\frac{b_{221}}{\Delta}.$$

(*) N. 27 della memoria degli *Annali*.

Digitized by Google

Queste, per le (15) e (18) diventano

$$\frac{\partial r}{\partial u} = -i\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \qquad \frac{\partial r}{\partial u_0} = i\frac{\partial \varphi}{\partial u_0}$$

e dànno

$$r = -i[f(u) - g(u_0)],$$

a meno di una costante additiva.

Dunque una superficie ortogonale ai raggi è definita dalle formole

$$x = x - i(f-g)X, \qquad y = y - i(f-g)Y, \qquad z = z - i(f-g)Z$$

le quali, per le (13) e per le (32) (ove si ponga $H=0$), diventano

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{i}{2}(1-u^2)f'(u) - \frac{i}{2}(1-u_0^2)g'(u_0) - \\ \quad - i\frac{u+u_0}{uu_0+1}[f(u) - g(u_0)], \\ y = y_0 - \frac{1}{2}(1+u^2)f'(u) - \frac{1}{2}(1+u_0^2)g'(u_0) + \\ \quad + \frac{u-u_0}{uu_0+1}[f(u) - g(u_0)], \\ z = z_0 + iuf'(u) - iu_0 g'(u_0) - i\frac{uu_0-1}{uu_0+1}[f(u) - g(u_0)]. \end{cases}$$

Queste formole definiscono la più generale superficie che ha per evoluta media una superficie minima assegnata (C).

14. — Ponendo $\alpha=\beta=0$, e quindi per le (C) $x_0=y_0=z_0=0$, si hanno le *superficie di* APPELL, i cui piani medii concorrono in un punto (*).

Infine se si scelgono le funzioni $f(u_0)$ e $g(u_0)$ in guisa che le (32), per $H=0$, definiscano un piano, le (33) dànno la più generale *superficie di Bonnet*. Il MERCATANTI (loc. cit.) ne ha date le formole effettive nell'ipotesi che il piano (32) sia il piano degli assi x e y.

Torino, 9 giugno 1909.

(*) " American Journal of Mathematics ,, X, 1888.

Digitized by Google

Note di ematologia

del Socio Prof. PIO FOÀ

In questo anno ho ripreso alcuni esperimenti intorno all'azione di sieri citotossici e di proteine o tossine bacteriche nel coniglio e nella cavia per rilevare le modificazioni che ne venivano agli organi ematopoetici. Nella mia pubblicazione fatta su questo argomento nel 1906 (1), ebbi sopratutto a rilevare la non stretta specificità esistente nei sieri citotossici ottenuti con diversi organi, onde si potevano produrre le stesse variazioni nella struttura degli organi ematopoetici con sieri non solo provenienti da diversi organi di uno stesso animale, ma anche dagli stessi organi di animali diversi. Predominanti in ogni caso erano gli effetti dell'eritrolisi, ma anche si accompagnava una più o meno intensa leucolisi e conseguente iperleucitosi, cui seguiva una riparazione ora moderata, ora intensa di entrambi gli elementi nel midollo delle ossa. In pari tempo i sieri citotossici in genere determinavano una maggiore attività dei gangli linfatici e della milza in cui si trovavano numerosi gli elementi giovani ricchi di protoplasma basofilo e una discreta quantità di elementi in via di proliferazione mitotica.

Ma le esperienze suddette, se avevano principalmente di mira le possibili variazioni sulla struttura degli organi ematopoetici sotto l'azione dei sieri citotossici, erano rimaste tuttavia incomplete o dubbie nell'interpretazione dei risultati, in merito alla natura degli elementi che si trovavano prevalenti sia nel midollo delle ossa, sia nella milza e nelle ghiandole linfatiche, onde profittando dei notevoli perfezionamenti introdotti ai nostri tempi nella tecnica di preparazione degli elementi del sangue e rispettivamente degli organi ematopoetici, ho assoggettato a nuovo controllo i miei risultati antecedenti, e vi ho aggiunto una maggior copia di esperienze fatte sulla cavia mediante

(1) *Dell'azione di alcuni sieri citotossici sugli organi ematopoetici*, Ricerche sperimentali del Prof. Pio Foà, " Mem. dell'Acc. delle Sc. di Torino „, 1906.

Digitized by Google

sieri mielo o splenotossici, le quali condussero a risultati soddisfacenti.

Per avere dei sieri leucotossici ho ripetuto le iniezioni addominali di emulsioni fresche di midollo delle ossa di coniglio o di cavia, sia rispettivamente in cavie o in conigli, sia in anitre o in polli. Le cavie tollerano meno bene le iniezioni di emulsioni fatte col midollo di un femore di coniglio, anche se fatte alla distanza di 8 giorni di tempo l'una dall'altra, onde spesso muoiono di marasma. Resiste bene, invece, il coniglio alle ripetute iniezioni di midollo tratto dai femori di 2 cavie, coll'intervallo di sette giorni l'uno dall'altro per 5-6 volte e sopportano bene l'iniezione di midollo delle ossa di coniglio le anitre e i polli.

I risultati che si ottengono nel midollo delle ossa colla iniezione di sieri leucotossici preparati come sopra, o sui conigli o sulle cavie, sono abbastanza esattamente confrontabili fra di loro e si possono riassumere in un'intensa eritropoesi accompagnata da una più o meno vivace neoformazione di elementi leucocitici; in una eritrolisi rappresentata dal riempimento dei vasi midollari con un detrito finemente granuloso, o apparentemente omogeneo prodotto dagli stromi disfatti degli eritrociti, mentre accanto ad esso si trovano dei cumuli di eritrociti ancora in parte conservati; infine, in un cumulo di leucociti vecchi riconoscibili dal loro nucleo polimorfo, raggrinzato e sottile, in parte liberi e in parte fagocitati dai megacariociti, i quali abbandonano dopo compiuta la loro funzione un numero più o meno grande di nuclei picnotici, che in parte vanno ad embolizzare alcuni capillari del polmone. La simultanea esistenza di tutti questi particolari, o la prevalenza di uno o dell'altro di essi, o il loro diverso aggruppamento, dipende da circostanze particolari dell'esperimento, quali, ad esempio, l'età dell'animale adoperato, la quantità di siero introdotto, il tempo che si lascia trascorrere dopo l'iniezione, l'attività stessa del siero ottenuto, ecc. ma sostanzialmente si tratta sempre di fenomeni distruttivi seguiti da altri rigenerativi da parte di tutti gli elementi costituenti il midollo delle ossa. È solo quando il siero adoperato è troppo tossico, o in troppo grande quantità che il midollo non solo non produce più elementi delle due serie eritro o leucopoetiche, ma si converte in un midollo gelatinoso a cominciare

Digitized by Google

dagli strati più periferici sin verso i più centrali. Lo stesso siero contenente una debole quantità di sostanza tossica, o introdotto in piccole proporzioni in un dato animale (coniglio, cavie) può determinare una intensa azione rigeneratrice, oppure una anaplasia completa del midollo delle ossa.

In altra serie di esperimenti, l'animale (coniglio) veniva lentamente preparato con estratti di corpi di bacteri (proteine) o coi rispettivi prodotti solubili; così si adoperarono proteine e tossine di bacilli di tifo, di b. difterico, di stafilococco aureo, o di b. Friedländer e questo allo scopo di rilevare le mutazioni nella struttura della midolla delle ossa, della milza e delle ghiandole linfatiche, e insieme controllare queste mutazioni colle preparazioni sui vetrini per meglio specificare la qualità e le proporzioni dei singoli elementi.

Poche esperienze furono ripetute anche con estratti di gangli linfatici di coniglio in cavia per avere sieri linfotossici e col solito caratteristico risultato di un'azione intensamente emolittica ad onta della minima quantità di sangue iniettata, e quindi con intensa eritropoesi midollare compagnata eziandio ad una abbondante leucopoesi. Finalmente ho ripetuto le esperienze coi sieri splenotossici e queste ebbero sopratutto nelle cavie un risultato completo. Ogni 7 giorni veniva iniettato nell'addome di coniglio l'estratto fresco di una o due milze di cavie adulte e normali e l'operazione si ripeteva 5-6 volte. Dell'abbondante quantità di siero avuta dal coniglio preparato, si iniettavano contemporaneamente tre o quattro cavie di 4-500 gr. cominciando da un centimetro cubo di siero nell'addome e arrivando progressivamente fino a 4-5, cosicchè la cavia ricevesse in tutto 7-8 cmc. di siero. Si lasciava a riposo l'animale per 4-5 giorni dopo l'ultima iniezione ricevuta e intanto si seguiva giornalmente l'esame del sangue. Dei risultati generali ottenuti sarà detto più innanzi; qui mi limito ad accennare che dall'esame dei tagli risultava una vivace attività midollare destata dal siero splenotossico; attività estesa a tutti gli elementi eritro e leucopoetici. L'esame del midollo delle ossa e della milza fatto sui vetrini colorati col liquido di Leishmann, o col May-Grünnwald, o con questo combinato col liquido di Giemsa permette di rilevare sopratutto la parte leucopoetica con tale finezza di particolari quale sarebbe impossibile ottenere dall'esame micro-

Digitized by Google

scopico dei tagli, o sugli stessi vetrini colorati con altri metodi. Certo che anche una buona soluzione triacida giova, ma oltrechè è difficile averne una eccellente o fresca, vi sono particolari che risultano meglio coi liquidi coloranti suddetti. Invece, la parte eritropoetica è meno bene rilevabile con questi ultimi, che colla ematossilina-eosina o colla triacida, coi quali mezzi si pongono molto bene in evidenza i normo- e gli eritroblasti piccoli e grandi. Riassumerò ora brevemente quanto mi fu dato rilevare dall'esame degli strisci di midollo delle ossa e di milza nei vari esperimenti da me eseguiti. Comincio colla serie dei midolli di coniglio e di cavie trattati con sieri leucotossici ottenuti per iniezione di estratti di midollo delle ossa di coniglio o in cavie, o in anitre, o in polli, o di midollo delle ossa di cavie in coniglio. La parte precipua dei preparati, fatta astrazione dall'attiva eritropoesi era rappresentata dalla qualità e dalla quantità di elementi della serie leucopoetica. Infatti, riassumendo i caratteri principali di una serie di preparati ottenuti da animali operati con sieri leucotossici, si può dire che essi erano contraddistinti dalla presenza di grossi leucociti a protoplasma munito di fini granuli colorati in rosso o in rossoviolaceo, e con grosso nucleo chiaro appena ripiegato, e quindi tendente ad assumere l'aspetto reniforme. Fra questi elementi altri parecchi si trovano che hanno ancora il protoplasma azzurro ossia basofilo evidente e sono muniti solo in parte di granuli eritrofili e di granuli basofili, mentre il residuo del contorno dell'elemento è azzurro e privo di granuli. Il nucleo di questi elementi è pallido e tuttora sferico o appena ripiegato. Finalmente vi sono numerosi grandi elementi tondeggianti a nucleo pallido e a protoplasma finemente reticolato senza alcuna granulazione, e in cui appena si incomincia ad accumulare qualche granulo eritrofilo. In conclusione i suddescritti preparati dimostrano la grande attività leucopoetica non tanto contraddistinta dal numero degli elementi incolori, o dal numero di figure cariocinetiche indicanti una grande attività formativa, quanto dalla presenza di numerose forme indicanti lo sviluppo iniziale dei leucociti, quali i mieloblasti o le forme che non erano già più nettamente mieloplastiche e non ancora completamente mielocitiche, e infine i mielociti propriamente detti e i leucociti giovani che da essi erano derivati. Si tratta dunque di un midollo

Digitized by Google

giovine somigliante al midollo fetale, indicante la rigenerazione di elementi in riparazione di quelli che col trattamento del siero leucotossico erano andati nei primi giorni abbondantemente distrutti sia nella parte eritropoetica sia in quella leucopoetica.

Un'altra serie di esperienze fu rivolta a ricercare l'azione che sulle cavie gravide esercita un siero di coniglio in cui siasi ripetutamente iniettato nella cavità-peritoneale un estratto fresco di embrioni o di feti di cavia. Si ebbe costantemente l'aborto delle cavie gravide trattate col predetto siero, ma di ciò non intendo occuparmi qui espressamente.

Piuttosto rilevo la reazione che gli organi ematopoetici e sopratutto il midollo delle ossa delle cavie trattate col siero antifetale hanno costantemente presentato. Tali reazioni furono messe a raffronto collo stato del midollo delle ossa nelle cavie adulte normali e nelle cavie gravide non trattate in alcun modo. Il midollo delle ossa delle cavie gravide trattate con siero artificiale ha presentato oltre ad una viva reazione eritropoetica con grandi eritroblasti in cariocinesi, numerosi piccoli eritroblasti e più scarsi normoblasti, una grande attività leucopoetica caratterizzata dalla presenza di molti mieloblasti e di molti mielociti giovani, e insieme da un notevole aumento numerico di leucociti a granuli basofili, e dei leucociti a granuli eosinofili, ma principalmente dei primi in cui la tinta dei granuli era di un violaceo intenso. Questa varietà di leucociti si trova, a dir vero, in quasi ogni preparato di midollo delle ossa di cavia adulta normale, ma in molto minor proporzione che nei preparati cui ho accennato più sopra, ottenute colla colorazione successiva col May-Grünnwald e col Giemsa, tanto che anche a piccolo ingrandimento impressiona la grande quantità di leucociti grandi a grossi granuli uniformi di reazione basofila. Alcune esperienze fatte con sieri antifetali su cavie maschi hanno dimostrato che la reazione midollare è in essi identica a quella ottenuta nelle cavie gravide. Meno interessante è la reazione splenica poichè nella milza si trovano scarsi leucociti basofili, rarissime forme mielocitarie e solo accidentalmente fra numerosi leucociti polimorfi qualche rarissimo normoblasto a nucleo piccolo picnotico. Dalle esperienze eseguite con proteine e con tossine batteriche si ebbero i seguenti risultati: Il midollo di coniglio trattato con proteine di stafilococco aureo, presenta nei

Digitized by Google

preparati su vetrini e colorati coi liquidi di Leishmann, May-Grünnwald e Giemsa, colla triacida e colla ematossilina eosina, un numero grande di giovani leucociti polimorfi a granuli eritrofili; un numero discreto di mielociti in parte ancora a protoplasma basofilo e privo di granuli e diverse forme mieloblastiche. Inoltre un gran numero di eritroblasti grandi e piccoli e un discreto numero di normoblasti a nucleo picnotico. Nei tagli di pezzi fissati in liquido Foà o in formol e colorati colla pironina e verde di metile, o colla ematossilina eosina, o col liquido di Leishmann, o col Mann, si osserva un abbondante addensamento di leucociti polimorfi, una quantità discreta di forme giovani mononucleate a protoplasma basofilo; un'abbondante quantità di eritroblasti, un numero grande di megacariociti in parte giovani a protoplasma molto colorato colla pironina, in parte, invece, a protoplasma rimasto roseo colla pironina e solo avente un orlo di colore più carico alla periferia dell'elemento, il nucleo un po' raggrinzato, fagocitismo discretamente attivo di megacariociti, una quantità di grossi nuclei liberi e intensamente colorati appartenenti ad antichi megacariociti disfatti; grande congestione di tutto il midollo, i vasi sono dilatatissimi e riempiuti in parte di eritrociti, in parte di detrito finemente granuloso derivante da distruzione per lisi di globuli rossi. In questi casi era anche evidente il trasporto embolico di nuclei di megacariociti nel polmone.

Un reperto molto simile al precedente presentavano i vetrini con striscio di midollo delle ossa di coniglio trattate con proteine di B. Friedländer. La leucopoesi era un poco meno attiva che nel caso precedente e il numero dei mieloblasti e dei mielociti giovani un po' più scarso. Invece, era straordinariamente attiva l'eritropoesi con abbondanti eritroblasti grandi e con figure cariocinetiche. Nei tagli si vedevano i vasi del midollo dilatati e riempiti in gran parte di detriti di globuli rossi: abbondante l'eritro e la leucopoesi; abbondanti le forme riccamente fagocitarie di megacariociti, i cui nuclei erano ancora bene conservati.

Un'altra serie d'esperienze comprende conigli e cavie trattate colle proteine di bacilli del tifo, la cui azione necrotizzante sugli organi ematopoetici, e fra questi il midollo delle ossa è ben nota da tempo. Io pure ottenni con dosi di proteine tipiche

Digitized by Google

piuttosto abbondanti dei fatti gravi di necrosi di tutti gli elementi del midollo delle ossa, e dei focolai di necrosi nei gangli linfatici e nella milza, oltre ad una grave nefrite necrotica, ma ho trascurato apposta questi casi ben noti del resto, perchè non rispondevano allo scopo delle ricerche. Io volevo vedere che cosa avveniva del midollo delle ossa dei conigli e delle cavie sotto l'azione di piccole dosi di proteina e di tossina del tifo. Ebbi da entrambe queste preparazioni, cioè, o dalle colture di 5 giorni filtrate, o dalle stesse in cui feci l'estratto acquoso del corpo dei bacilli i medesimi risultati, i quali hanno variato di grado secondo i soggetti, ma sostanzialmente furono caratterizzati da una grande distruzione di sangue, da una debole eritropoesi reattiva, dell'accumulo nel midollo di molti addensati leucociti, con discretamente abbondanti mielociti e scarsi mieloblasti, mortificazione parziale o totale di molti megacariociti debolmente fagocitanti, nuclei liberi in quantità varia secondo i casi. Tutto ciò nel coniglio, e confermano le ricerche di altri autori che dagli esperimenti colla tossina di tifo nei conigli non hanno ricevuto quel midollo mieloblastico che fu trovato nell'uomo. Ciò si è potuto verificare, invece, nelle cavie, fra le quali talune trattate con moderate dosi di proteine di b. tifico, hanno presentato un midollo ricco di mieloblasti e un eritropoesi poco attiva.

La milza di queste cavie diede una molto scarsa reazione, qualche raro mielocito e nessun normoblasto; era pertanto lungi da una vera trasformazione mieloide della polpa.

Finalmente dirò di una lunga serie e più fruttuosa di esperienze fatte coi sieri splenotossici.

Erano sieri di coniglio preparato lentamente con emulsioni di milza di cavia nella cavità addominale; oppure sieri di cavie preparate con emulsioni di milze di cavia, ecc. in conigli. Talvolta anche si adoperarono milze di coniglio per iniezione nel cavo peritoneale di polli e di anitre. Il reperto del midollo delle ossa dei conigli trattati con sieri splenotossici è quello di una vivissima eritropoesi con abbondante leucopesi e con numerosi megacariociti intatti. La milza dei conigli suddetti è spesso ingrossata, polposa e scura, e nei tagli si rileva una pienezza enorme di sangue di tutte le lacune venose. Rimangono intatti i follicoli linfatici che alla loro periferia sopratutto pre-

Digitized by Google

sentano numerose grosse cellule a protoplasma intensamente basofilo, con alcune forme cariocinetiche.

Inoltre, intorno alle trabecole e più ancora intorno alle arterie pennicillari della polpa si trovano abbondanti accumuli di cellule giovani a carattere plasmacellulare. Nella milza è raro trovare dei normoblasti, e si trovano scarsi mielociti. Con poche variazioni in più o in meno le milze dei conigli reagiscono spesso nell'identico modo sia ai sieri splenotossici sia ai sieri linfo e leucotossici. Dall'insieme dei casi si può affermare che i sieri splenotossici esercitano una forte azione emolittica cui segue una pronta e vivissima reazione da parte di tutti gli elementi del midollo e anche da parte dei follicoli della milza e della polpa rispettiva. Però la reazione del coniglio non fa l'impressione che genera la cavia, la quale in pochi giorni trasforma completamente il suo tipo ematologico ed emopoetico. Si tratta di cavie adulte intorno a 500 grammi di peso, indifferentemente se maschio o femmina, trattate con iniezioni quotidiane di siero splenotossico di coniglio, a dosi crescenti, ma sommanti in tutto a 6-7 cmc. Venivano lasciati a riposo dopo il trattamento subito per 4-5 giorni di seguito, ancora per altri 4-5 giorni e intanto si esaminava il sangue. Questo dava segno di rapido impoverimento di globuli e di emoglobina, cosicchè da una media di 5 cavie normali che presentavano 4.200.000 eritrociti e 68 $^0_0$ di emoglobina le cavie preparate diedero in pochi giorni di trattamento una media di 2.800.000 eritrociti e 23 di emoglobina. Il reperto microscopico era caratteristico sopratutto per questi tre dati; molti eritrociti granulosi, policromasia e grande prevalenza di megalociti pallidi; invece, erano rare le forme nucleate e discretamente numerosi i leucociti.

Sacrificate le cavie 4-5 giorni dopo che avevano ricevuta l'ultima iniezione di siero, trovai che esse erano normali nel senso che non presentavano traccie di nessuna malattia pregressa, e di macroscopico il fatto che imponeva di più era il rilevante tumore splenico. In tutto la milza superava persino di 10 volte il peso normale, così da un medio peso della milza di parecchie cavie adulte normali che è di 0,5 gr. si arrivò persino di grammi 5,2 in animali che avevano ricevuto 7 cmc. di siero splenotossico in 4 giorni di seguito, e poi erano rimaste 5 giorni a riposo.

Digitized by Google

La milza era solida, oscura, elastica, ricchissima di polpa color rosso cupo sanguigno; anche il midollo delle ossa di queste cavie era abbondante, congesto, friabilissimo per grande abbondanza di elementi; gli altri organi non presentano nulla di particolare, nè macro, nè microscopimento.

Gli esami su vetrini di polpa splenica e di midollo delle ossa riuscirono molto interessanti. Nel midollo ciò che sopratutto risultava nei preparati colorati col May-Grünnwald e col Giemsa era la copia grande di leucociti e mielociti a grossi granuli basofili. Un po' meno, ma pure abbondanti le eosinofili, poco abbondanti le forme mieloblastiche, ma numerosi i mielociti giovani, cioè forniti di granuli eritrofili disseminati in un protoplasma basofilo. Abbondantissimi gli eritroblasti, normali e abbondanti i megacariociti.

I preparati di polpa splenica fatti per striscio e colorati coi soliti metodi, dimostrano pure una discreta quantità di mielociti basofili ed eritrofili e forme di giovani leucociti e qualche megacariocito, ma in modo sorprendente spicca la grande quantità di eritroblasti grossi e piccoli in attività cariocinetica. Sopratutto nei preparati fatti colla ematossilina ed eosina che sono i più dimostrativi, si scorgono numerosi grandi eritroblasti con grosso nucleo a contenuto reticolato, o con nucleo in cariocinesi. Altri molti eritroblasti piccoli e diversi normoblasti a nucleo picnotico formano tutti insieme una tale prevalenza di elementi eritropoetici da superare l'aspetto che potrebbe presentare un midollo delle ossa grandemente funzionante, il che è tanto più importante in quanto l'attività midollare delle stesse cavie è realmente viva, ma impressiona molto meno dell'attività splenica. Fra gli elementi della polpa splenica si trovano anche dei nuclei picnotici liberi, e si trovano pure raramente dei mononucleati che hanno fagocitato diversi nuclei picnotici di varia grandezza. Anche nei fegati di feto si trovano talvolta delle cellule fagocitiche che contengono molti nuclei picnotici in via di digestione intracellulare, onde io ritengo che uno dei modi in cui si perde il nucleo degli eritroblasti, o meglio dei normoblasti, sia realmente quello della espulsione *in toto* con successivo assorbimento fagocitario dei nuclei liberi da parte di cellule mononucleate. È possibile che questi fatti avvengano in condizioni patologiche, quando, cioè, accanto ad una viva rige-

Digitized by Google

nerazione si produce ancora una regressione rapida di elementi neoformati, ma a me pare fuori di dubbio che i nuclei dei normoblasti possono trovarsi liberi nei preparati e anche inclusi in elementi fagocitosi. I tagli di milza dimostrano la grande ricchezza di elementi nei densi cordoni della polpa intramezzati da lacune congeste in cui si trovano dei cumuli di eritroblasti. Fra gli elementi della polpa si vede qualche raro megacariocito, i follicoli linfatici presentano molti detriti derivanti da distruzione di leufociti e insieme una viva rigenerazione per cariocinesi dai centri germinali. — Riassumendo: i sieri splenotossici esercitano una grande azione emolittica e consecutivamente rigeneratrice degli elementi midollari e splenici, sopratutto per la parte eritropoetica. L'azione dei detti sieri si esercita in modo sorprendente sulle cavie, la cui milza iperplastica entra in un'attività così grande da superare quelle del midollo delle ossa del medesimo animale. Il risultato è costante e s'accompagna alla produzione abbondante di mielociti basofili sia nel midollo, sia nella milza che rappresenta un'esagerazione di ciò che si trova in limiti molto più ristretti nelle cavie adulte normali. In complesso il reperto ottenuto con sieri splenotossici nelle cavie ricorda il reperto classico delle anemie spleniche infantili.

Meno sensibile fu l'aumento di volume della milza in cani trattati con siero di conigli ai quali erano stati ripetutamente iniettati degli estratti freschi di milze normali di cane. Le esperienze di questa natura furono però scarse, e può darsi che i conigli per fornire sieri molto attivi per il cane abbiano bisogno di una più lunga preparazione di quella da me eseguita. Forse anche la struttura della milza del cane così fortemente contrattile influisce sulla non produzione di una rilevante splenomegalia. Nel caso mio, alcuni conigli robusti di 2-3 chilogrammi di peso, vennero iniettati nella cavità peritonale con estratti freschi di milza normale di cane, ogni 6-8 giorni per 4 volte. Il siero di quegli animali agglutinava prontamente i globuli rossi del cane normale, e presto ne seguiva l'emolisi. Iniettato il siero alla dose di 15-20-30 c.c. nella v. pedidia o nella giugulare di un cane di 5 Kg. di peso, produceva rapidamente una notevole diminuzione di eritrociti non accompagnata però da corrispondente abbassamento del valore emoglobinico. Lasciato

Digitized by Google

a riposo l'animale per 4-5 giorni dopo l'ultima iniezione di siero, veniva poi sacrificato, e si trovava ordinariamente che la milza era ingrossata, ma non molto; il peso ne era probabilmente aumentato, poichè superava alquanto la media che si riscontra nelle milze di cani di un dato peso. Così era, ad esempio, di 35-40 gr. in luogo di 20-30 gr., la milza di un cane di 5 Kg., e di 60 gr. la milza di cani di 10 Kg. che di solito è 40-50 gr. È vero però che i cani presentano molte variazioni individuali, onde una sicurezza in proposito non si potrebbe avere che dopo un numero grande di esperienze. La consistenza dell'organo era aumentata, il colore rosso scuro, la polpa abbondante, densissima, compatta, e al microscopio si notavano nei preparati su vetrini molti eritroblasti grandi e piccoli e qualche mielocito; il midollo delle coste era attivissimo, e conteneva anche qualche megaloblasto.

Fu molto notevole in tutti questi esperimenti la presenza nel sangue di numerosi megalociti, e il valore globulare superiore al normale. Riproduco a questo proposito uno dei reperti sulla cavia e sul cane:

Cavia normale 400 gr. — 17. x. 09.

Eritrociti	7.100.000	Valore globulare 0,7.	Si fa un'iniezione di 3 c. c. siero splenotossico nella cavità addominale.
Leucociti	8.000	Simile a quello di molte	
Emoglobina	60	altre cavie normali del nostro laboratorio.	

Id. id. — 18. x. 09.

Eritrociti	3.000.000		
Leucociti	11 000	Valore globulare 1,3.	2ª iniezione 4 c. c. di siero.
Emoglobina	50		

Id. id. — 20. x. 09.

Eritrociti	2.000.000		
Leucociti	4.500	Valore globulare 1,8.	3ª iniez. 4 c. c. di siero toss.
Emoglobina	45		

Id. id. — 23. x. 09.

Eritrociti	3.000.000		
Leucociti	11.500	Valore globulare 1,13.	4ª iniez. 3 c. c. siero toss. (ultima).
Emoglobina	43		

Id. id. — 27. x. 09.

Eritrociti	2.000.000		
Leucociti	12.000	Valore globulare 1,1.	
Emoglobina	35		

Id. id. — 31. x. 09.

Eritrociti	5.000.000		
Leucociti	10.000	Valore globulare 0,72.	
Emoglobina	45		

Digitized by Google

Cane di 5 Kg. di peso. — 22. XI. 09.

Eritrociti	5.000.000		Si fa la 1ª iniez. di 15 c. c. di siero nell'addome.
Leucociti	8.000	Valore globulare 0,9.	
Emoglobina	70		

Id. id. — 23. XI. 09.

Eritrociti	4.500.000		2ª iniez. di 20 c. c. di siero nella v. pedidia.
Leucociti	8.000	Valore globulare 1,1.	
Emoglobina	76		

Id. id. — 24. XI. 09.

Eritrociti	4.200.000		3ª ed ultima iniez. 20 c. c. di siero nella v. giugulare.
Leucociti	8.500	Valore globulare 1,2.	
Emoglobina	72		

Id. id. — 26. XI. 09.

Eritrociti	3.500.000		
Leucociti	15.000	Valore globulare 1,2.	
Emoglobina	60		

Come fu detto più sopra il reperto ematologico ottenuto coi sieri splenotossici era segnalato dalla gran copia di megalociti, i quali erano assai meno copiosi negli animali salassati. L'alto valore globulare e i megalociti davano al reperto ematologico un carattere embrionale, che non si trova, invece, come è noto, nelle anemie postemorragiche, e anche questo è in armonia col reperto che si osserva nelle anemie spleniche infantili e nell'anemia perniciosa progressiva, la cui origine tossico emolittica è generalmente riconosciuta.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 19 Dicembre 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO

PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: SPEZIA, SEGRE, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA, GRASSI, SOMIGLIANA, FUSARI e CAMERANO Segretario.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente.

Scusano l'assenza i Soci NACCARI, SALVADORI, MOSSO, FOÀ, MATTIROLO.

Il Presidente presenta in omaggio alla Classe:

1° il lavoro seguente dsl Socio straniero F. R. HELMERT, *Die Tiefe der Ausgleichsfläche bei der* PRATTschen *Hypothese für das Gleinchgewicht der Erdkruste und der Verlauf der Schwerestörung vom Innern der Kontinente und Ozeane nach den Küsten;*

2° *Stazione preistorica di Coppa Nevigata presso Manfredonia,* del Socio Mosso.

Il Socio JADANZA presenta in omaggio a nome del prof. BOCCARDI, l'*Annuario astronomico per il 1910.*

Il Socio SOMIGLIANA presenta in omaggio la sua nota intitolata: *Sulle deformazioni elastiche non regolari.*

Digitized by Google

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° Prof. G. Scorza, *Sulle varietà di Segre,* dal Socio Segre;

2° G. Charrier, *Azione del calore sugli o-amidoazocomposti,* dal Socio Fileti.

Il Socio Camerano, a nome anche del Socio Fusari, legge la relazione intorno alla Memoria del Dr. E. Zavattari, intitolata: *I muscoli ioidei dei Sauri in rapporto con i muscoli ioidei degli altri vertebrati,* Parte seconda. La relazione favorevole è approvata all'unanimità e con votazione segreta la Classe approva la stampa del lavoro nei volumi accademici.

Il Socio Fusari, a nome dei Soci Mosso e Foà, legge la relazione sul lavoro del Dr. Mario Ponzo: *Studio sulla localizzazione delle sensazioni cutanee di dolore.* La relazione favorevole è approvata ad unanimità e con voti segreti pure ad unanimità è approvata la stampa del lavoro nei volumi delle *Memorie* accademiche.

Il Socio Parona, a nome anche del Socio Mattirolo, legge la relazione sul lavoro del Prof. E. Martel: *Contribuzione alla Lichenologia del Piemonte.* La relazione favorevole è all'unanimità approvata dalla Classe, la quale con votazione unanime segreta approva la stampa nei volumi accademici.

Il Presidente a nome del Socio Naccari presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* il lavoro del Prof. G. Boccardi, intitolato: *Passaggi meridiani del pianeta Marte osservati nell'opposizione del 1910.* Il Presidente delega i Soci Naccari e Jadanza per riferire sopra il detto lavoro.

Digitized by Google

LETTURE

Sulle varietà di Segre.

Nota di G. SCORZA.

In una breve Nota, pubblicata nell'ultimo fascicolo dei " Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo „, ho dimostrato che:

È un S_{i-1}*-cono ogni varietà* V_{r+i}^{n} *di* $S_{\binom{n+r}{r}+i-1}$ *che sia tagliata dagli* $S_{\binom{n+r}{r}-1}$ *del suo spazio in* V_r^n *rappresentate sopra un* S_r *dal sistema di tutte le forme d'ordine* n.

L'osservazione, assai semplice, che soggiace a quella dimostrazione, è suscettibile di applicazioni più larghe; e qui appunto essa vien rivolta a dimostrare un teorema analogo a quello ora enunciato per una importante classe di varietà razionali normali considerate per la prima volta dal Prof. SEGRE (*).

Tali varietà si sono presentate in molte questioni di geometria, ed è facile prevedere che esse si presenteranno ancora in altre importanti ricerche (**); perciò, come ho già fatto altrove in vari casi particolari, io darò ad esse il nome di *varietà di* SEGRE.

(*) SEGRE. *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi*, " Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo „, t. V, 1891.

(**) Così, ad esempio, il Prof. SEGRE, dopo la presentazione di questo lavoro all'Accademia, mi ha gentilmente comunicato che le varietà in discorso gli si son mostrate come essenziali in una ricerca, ancora inedita, di geometria proiettivo-differenziale, da lui compiuta. Se cioè si fissa una posizione dello spazio (lineare) generatore di una varietà, gli spazi tangenti a questa nei punti di quello portano ad una varietà della classe suddetta.

Digitized by Google

1. — Per procedere con tutta chiarezza cominciamo dal ricordare la definizione delle varietà di SEGRE.

Siano dati $n(\geq 2)$ spazi lineari S_{p_1}, S_{p_2}, ..., S_{p_n}, da riguardare, anche se sono sovrapposti, come distinti, e siano $x_0^{(i)}$, $x_1^{(i)}$, ..., $x_{p_i}^{(i)}$ le coordinate (omogenee) di un punto generico di S_{p_i}. Allora, se si pone:

$$(1) \qquad X_{i_1 i_2 \dots i_n} = x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \dots x_{i_n}^{(n)} \qquad \begin{pmatrix} i_j = 0, 1, \dots p_j \\ j = 0, 1, \dots n \end{pmatrix}$$

e si riguardano le $X_{i_1 i_2 \dots i_n}$ come coordinate di un punto in un $S_{(p_1+1)(p_2+1)\dots(p_n+1)-1}$, le (1) potranno considerarsi come le equazioni parametriche di una varietà V di questo spazio in corrispondenza biunivoca *senza eccezioni* con la varietà delle n-ple di punti, $A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$, che si vengono a formare associando un punto qualunque A_1 di S_{p_1}, con un punto qualunque A_2 di S_{p_2}, ... con un punto qualunque A_n di S_{p_n}.

La dimensione di V è, chiaramente, $p_1 + p_2 + \dots + p_n$, e l'ordine, come fu dimostrato dal Prof. SEGRE, vale:

$$\frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n)!}{p_1!\, p_2! \dots\dots p_n!};$$

nell'ipotesi che nessuna delle p sia nulla, noi la diremo *la varietà di* SEGRE *di specie* n *con gli indici* $p_1, p_2, \dots p_n$.

Così la varietà di SEGRE di 2ª specie con gli indici 1, 1 è la quadrica ordinaria; quella di 2ª specie con gli indici 1, 2 è la V_3^3 razionale normale di S_5 luogo di $\infty^1 S_2$; quella di 3ª specie con gli indici 1, 1, 1 coincide con la V_3^6 razionale normale di S_7, rappresentabile sullo spazio ordinario mediante il sistema delle superficie cubiche per tre rette generiche, che si presentò al Prof. ENRIQUES come uno dei tipi di V_3 a curve sezioni ellittiche (*), ecc.

Notisi che se qualcuno dei numeri $p_1, p_2, \dots p_n$ fosse zero la V si ridurrebbe a una varietà di SEGRE di specie inferiore (in particolare, a uno spazio lineare).

(*) SCORZA, *Le varietà a curve sezioni ellittiche*, " Ann. di Matematica ", serie 3ª, t. XV, n. 22.

Digitized by Google

2. — Ciò posto, cominciamo dallo stabilire una rappresentazione di una varietà di SEGRE sopra uno spazio lineare convenientemente esteso e, per non andare incontro ad inutili complicazioni, riferiamoci, per fissar le idee, al caso delle varietà di 3ª specie.

Sia dunque $V_{p_1+p_2+p_3}$ una varietà di SEGRE di 3ª specie, con gli indici p_1, p_2, p_3, e siano:

$$(2) \qquad X_{i_1 i_2 i_3} = x^{(1)}_{i_1} x^{(2)}_{i_2} x^{(3)}_{i_3}$$

$$(i_1 = 0, 1, \dots p_1 ; \quad i_2 = 0, 1, \dots p_2 ; \quad i_3 = 0, 1, \dots p_3)$$

le equazioni parametriche che la determinano.

Tenendo presenti le (2), si vede che la rappresentazione della $V_{p_1+p_2+p_3}$ sopra un $S_{p_1+p_2+p_3}$ può ottenersi nel modo più semplice facendo:

$$x^{(1)}_0 = x^{(2)}_0 = x^{(3)}_0 = t$$

e poi riguardando la t e le rimanenti coordinate:

$$x^{(1)}_1, \ x^{(1)}_2, \ \dots \ x^{(1)}_{p_1} ; \qquad x^{(2)}_1, \ x^{(2)}_2, \ \dots \ x^{(2)}_{p_2} ; \qquad x^{(3)}_1, \ x^{(3)}_2, \ \dots \ x^{(3)}_{p_3}$$

come coordinate proiettive omogenee di un punto in un $S_{p_1+p_2+p_3}$.

In tal modo viene stabilita una corrispondenza generalmente biunivoca tra i punti di $V_{p_1+p_2+p_3}$ e quelli dell'$S_{p_1+p_2+p_3}$ prescelto; di più si vede che, per essa, ai punti di una sezione iperpiana di $V_{p_1+p_2+p_3}$ vengono a corrispondere nello spazio rappresentativo i punti di una forma cubica la cui equazione è del tipo:

$$(3) \qquad A t^3 + \left[\sum_1^{p_1} B^{(1)}_i x^{(1)}_i + \sum_1^{p_2} B^{(2)}_i x^{(2)}_i + \sum_1^{p_3} B^{(3)}_i x^{(3)}_i \right] t^2 +$$

$$+ \left[\sum_{i=1}^{i=p_1} \sum_{j=1}^{j=p_2} C^{1,2}_{i,j} x^{(1)}_i x^{(2)}_j + \sum_{i=1}^{i=p_2} \sum_{j=1}^{j=p_3} C^{2,3}_{i,j} x^{(2)}_i x^{(3)}_j + \sum_{i=1}^{i=p_3} \sum_{j=1}^{j=p_1} C^{3,1}_{i,j} x^{(3)}_i x^{(1)}_j \right] t$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=p_1} \sum_{j=1}^{j=p_2} \sum_{k=1}^{k=p_3} D_{i,j,k} x^{(1)}_i x^{(2)}_j x^{(3)}_k = 0 .$$

Digitized by Google

Viceversa, come è ben chiaro, ai punti di una forma cubica rappresentata da un'equazione di questo tipo [la quale contiene $1 + (p_1 + p_2 + p_3) + (p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1) + p_1p_2p_3 = (p_1 + 1)(p_2 + 1)(p_3 + 1)$ parametri omogenei] vengono a corrispondere i punti di una determinata sezione iperpiana di $V_{p_1+p_2+p_3}$.

La varietà base del sistema lineare (3) è formata dai tre spazi $S_{p_1+p_2-1} \equiv \alpha_3$, $S_{p_2+p_3-1} \equiv \alpha_1$ ed $S_{p_3+p_1-1} \equiv \alpha_2$ dell'iperpiano $t = 0$, che sono ivi rappresentati rispettivamente dalle equazioni:

$$x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = \ldots = x_{p_1}^{(1)} = 0\,; \qquad x_1^{(2)} = x_2^{(2)} = \ldots = x_{p_2}^{(2)} = 0\,;$$
$$x_1^{(3)} = x_2^{(3)} = \ldots = x_{p_3}^{(3)} = 0\,;$$

e, come è facile persuadersi, ogni forma del sistema lineare in discorso ha tre spazi doppi negli spazi secondo cui α_1, α_2 e α_3 si tagliano a due a due.

D'altra parte è pur chiaro che ogni forma cubica dell'$S_{p_1+p_2+p_3}$ rappresentativo, la quale debba passare per α_1, α_2, α_3 e avere tre spazi doppi in quelli secondo cui α_1, α_2 e α_3 si tagliano a due a due, ha una equazione del tipo (3); dunque:

Ogni varietà di SEGRE *di 3ª specie con gli indici* p_1, p_2, p_3 *può rappresentarsi biunivocamente sopra un* $S_{p_1+p_2+p_3}$ *mediante il sistema completo delle forme cubiche che passano per tre spazi generici* α_1, α_2, α_3, *di un iperpiano, con le dimensioni rispettive* $p_2 + p_3 - 1$, $p_3 + p_1 - 1$, $p_1 + p_2 - 1$ *e hanno tre spazi doppi negli* S_{p_1-1}, S_{p_2-1}, S_{p_3-1} *secondo cui* α_1, α_2 *e* α_3 *si tagliano a due a due.*

Il fatto che il sistema di forme cubiche di cui si parla in questo teorema è completo, corrisponde, com'è ben noto, all'altro che la $V_{p_1+p_2+p_3}$ è normale, e di ciò sarebbe facile procurarsi una dimostrazione diretta ricordando le prime proprietà geometriche delle varietà di SEGRE; ma crediamo inutile di fermarci su questo proposito.

3. — Piuttosto, osserveremo, poichè questo ha per noi importanza fondamentale, che nel sistema lineare (3) è contenuto parzialmente il sistema di tutti gli iperpiani dell'$S_{p_1+p_2+p_3}$ rappresentativo, che il *resto* di questo sistema rispetto al primo

Digitized by Google

è dato dall'iperpiano $t = 0$ contato due volte, e che, per conseguenza, la rappresentazione considerata può riguardarsi come ottenuta per proiezione della $V_{p_1+p_2+p_3}$ da un certo $S_{(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)-(p_1+p_2+p_3)-2}$ sopra un conveniente $S_{p_1+p_2+p_3}$.

Se, per comodità, diciamo ω il centro di proiezione si vede che lo spazio ω è quello secondo cui si intersecano gl'iperpiani dello spazio della $V_{p_1+p_2+p_3}$ rappresentati dalle equazioni:

$$X_{000} = 0\,, \qquad X_{i_1 00} = 0, \qquad X_{0 i_2 0} = 0\,, \qquad X_{00 i_3} = 0$$

$$(i_1 = 1, 2, \ldots p_1\,; \quad i_2 = 1, 2, \ldots p_2\,; \quad i_3 = 1, 2, \ldots p_3)$$

e come spazio rappresentativo si può assumere quello *opposto* ad ω nella *piramide fondamentale* dello spazio della $V_{p_1+p_2+p_3}$.

Ora si osservi:

α) che lo spazio ω seca la $V_{p_1+p_2+p_3}$ secondo una varietà Φ di dimensione $p_1 + p_2 + p_3 - 2$ spezzata in tre varietà di SEGRE Φ_1, Φ_2, Φ_3; essendo Φ_1 la varietà generata nel solito modo dagli iperpiani:

$$x_0^{(2)} = 0\,, \qquad x_0^{(3)} = 0$$

di S_{p_2} ed S_{p_3} insieme con S_{p_1}; Φ_2 la varietà generata dagli iperpiani:

$$x_0^{(3)} = 0\,; \qquad x_0^{(1)} = 0$$

di S_{p_3} ed S_{p_1} insieme con S_{p_2} e Φ_3 la varietà generata dagli iperpiani:

$$x_0^{(1)} = 0\,, \qquad x_0^{(2)} = 0$$

di S_{p_1} ed S_{p_2} insieme con S_{p_3} (*);

β) che Φ *appartiene* ad ω (ciò che risulta o da una verifica analitica diretta, o da una semplice osservazione geometrica fondata sul fatto che $V_{p_1+p_2+p_3}$ è normale);

(*) Notisi che se qualcuno degli indici p_1, p_2, p_3 è uguale all'unità, qualcuna delle Φ_1, Φ_2, Φ_3 risulterà di specie inferiore a 3.

Digitized by Google

sentano numerose grosse cellule a protoplasma intensamente basofilo, con alcune forme cariocinetiche.

Inoltre, intorno alle trabecole e più ancora intorno alle arterie pennicillari della polpa si trovano abbondanti accumuli di cellule giovani a carattere plasmacellulare. Nella milza è raro trovare dei normoblasti, e si trovano scarsi mielociti. Con poche variazioni in più o in meno le milze dei conigli reagiscono spesso nell'identico modo sia ai sieri splenotossici sia ai sieri linfo e leucotossici. Dall'insieme dei casi si può affermare che i sieri splenotossici esercitano una forte azione emolittica cui segue una pronta e vivissima reazione da parte di tutti gli elementi del midollo e anche da parte dei follicoli della milza e della polpa rispettiva. Però la reazione del coniglio non fa l'impressione che genera la cavia, la quale in pochi giorni trasforma completamente il suo tipo ematologico ed emopoetico. Si tratta di cavie adulte intorno a 500 grammi di peso, indifferentemente se maschio o femmina, trattate con iniezioni quotidiane di siero splenotossico di coniglio, a dosi crescenti, ma sommanti in tutto a 6-7 cmc. Venivano lasciati a riposo dopo il trattamento subito per 4-5 giorni di seguito, ancora per altri 4-5 giorni e intanto si esaminava il sangue. Questo dava segno di rapido impoverimento di globuli e di emoglobina, cosicchè da una media di 5 cavie normali che presentavano 4.200.000 eritrociti e 68 % di emoglobina le cavie preparate diedero in pochi giorni di trattamento una media di 2.800.000 eritrociti e 23 di emoglobina. Il reperto microscopico era caratteristico sopratutto per questi tre dati; molti eritrociti granulosi, policromasia e grande prevalenza di megalociti pallidi; invece, erano rare le forme nucleate e discretamente numerosi i leucociti.

Sacrificate le cavie 4-5 giorni dopo che avevano ricevuta l'ultima iniezione di siero, trovai che esse erano normali nel senso che non presentavano traccie di nessuna malattia pregressa, e di macroscopico il fatto che imponeva di più era il rilevante tumore splenico. In tutto la milza superava persino di 10 volte il peso normale, così da un medio peso della milza di parecchie cavie adulte normali che è di 0,5 gr. si arrivò persino di grammi 5,2 in animali che avevano ricevuto 7 cmc. di siero splenotossico in 4 giorni di seguito, e poi erano rimaste 5 giorni a riposo.

Digitized by Google

La milza era solida, oscura, elastica, ricchissima di polpa color rosso cupo sanguigno; anche il midollo delle ossa di queste cavie era abbondante, congesto, friabilissimo per grande abbondanza di elementi; gli altri organi non presentano nulla di particolare, nè macro, nè microscopimento.

Gli esami su vetrini di polpa splenica e di midollo delle ossa riuscirono molto interessanti. Nel midollo ciò che sopratutto risultava nei preparati colorati col May-Grünnwald e col Giemsa era la copia grande di leucociti e mielociti a grossi granuli basofili. Un po' meno, ma pure abbondanti le eosinofili, poco abbondanti le forme mieloblastiche, ma numerosi i mielociti giovani, cioè forniti di granuli eritrofili disseminati in un protoplasma basofilo. Abbondantissimi gli eritroblasti, normali e abbondanti i megacariociti.

I preparati di polpa splenica fatti per striscio e colorati coi soliti metodi, dimostrano pure una discreta quantità di mielociti basofili ed eritrofili e forme di giovani leucociti e qualche megacariocito, ma in modo sorprendente spicca la grande quantità di eritroblasti grossi e piccoli in attività cariocinetica. Sopratutto nei preparati fatti colla ematossilina ed eosina che sono i più dimostrativi, si scorgono numerosi grandi eritroblasti con grosso nucleo a contenuto reticolato, o con nucleo in cariocinesi. Altri molti eritroblasti piccoli e diversi normoblasti a nucleo picnotico formano tutti insieme una tale prevalenza di elementi eritropoetici da superare l'aspetto che potrebbe presentare un midollo delle ossa grandemente funzionante, il che è tanto più importante in quanto l'attività midollare delle stesse cavie è realmente viva, ma impressiona molto meno dell'attività splenica. Fra gli elementi della polpa splenica si trovano anche dei nuclei picnotici liberi, e si trovano pure raramente dei mononucleati che hanno fagocitato diversi nuclei picnotici di varia grandezza. Anche nei fegati di feto si trovano talvolta delle cellule fagocitiche che contengono molti nuclei picnotici in via di digestione intracellulare, onde io ritengo che uno dei modi in cui si perde il nucleo degli eritroblasti, o meglio dei normoblasti, sia realmente quello della espulsione *in toto* con successivo assorbimento fagocitario dei nuclei liberi da parte di cellule mononucleate. È possibile che questi fatti avvengano in condizioni patologiche, quando, cioè, accanto ad una viva rige-

Digitized by Google

nerazione si produce ancora una regressione rapida di elementi neoformati, ma a me pare fuori di dubbio che i nuclei dei normoblasti possono trovarsi liberi nei preparati e anche inclusi in elementi fagocitosi. I tagli di milza dimostrano la grande ricchezza di elementi nei densi cordoni della polpa intramezzati da lacune congeste in cui si trovano dei cumuli di eritroblasti. Fra gli elementi della polpa si vede qualche raro megacariocito, i follicoli linfatici presentano molti detriti derivanti da distruzione di leufociti e insieme una viva rigenerazione per cariocinesi dai centri germinali. — Riassumendo: i sieri splenotossici esercitano una grande azione emolittica e consecutivamente rigeneratrice degli elementi midollari e splenici, sopratutto per la parte eritropoetica. L'azione dei detti sieri si esercita in modo sorprendente sulle cavie, la cui milza iperplastica entra in un'attività così grande da superare quelle del midollo delle ossa del medesimo animale. Il risultato è costante e s'accompagna alla produzione abbondante di mielociti basofili sia nel midollo, sia nella milza che rappresenta un'esagerazione di ciò che si trova in limiti molto più ristretti nelle cavie adulte normali. In complesso il reperto ottenuto con sieri splenotossici nelle cavie ricorda il reperto classico delle anemie spleniche infantili.

Meno sensibile fu l'aumento di volume della milza in cani trattati con siero di conigli ai quali erano stati ripetutamente iniettati degli estratti freschi di milze normali di cane. Le esperienze di questa natura furono però scarse, e può darsi che i conigli per fornire sieri molto attivi per il cane abbiano bisogno di una più lunga preparazione di quella da me eseguita. Forse anche la struttura della milza del cane così fortemente contrattile influisce sulla non produzione di una rilevante splenomegalia. Nel caso mio, alcuni conigli robusti di 2-3 chilogrammi di peso, vennero iniettati nella cavità peritonale con estratti freschi di milza normale di cane, ogni 6-8 giorni per 4 volte. Il siero di quegli animali agglutinava prontamente i globuli rossi del cane normale, e presto ne seguiva l'emolisi. Iniettato il siero alla dose di 15-20-30 c.c. nella v. pedidia o nella giugulare di un cane di 5 Kg. di peso, produceva rapidamente una notevole diminuzione di eritrociti non accompagnata però da corrispondente abbassamento del valore emoglobinico. Lasciato

Digitized by Google

a riposo l'animale per 4-5 giorni dopo l'ultima iniezione di siero, veniva poi sacrificato, e si trovava ordinariamente che la milza era ingrossata, ma non molto; il peso ne era probabilmente aumentato, poichè superava alquanto la media che si riscontra nelle milze di cani di un dato peso. Così era, ad esempio, di 35-40 gr. in luogo di 20-30 gr., la milza di un cane di 5 Kg., e di 60 gr. la milza di cani di 10 Kg. che di solito è 40-50 gr. È vero però che i cani presentano molte variazioni individuali, onde una sicurezza in proposito non si potrebbe avere che dopo un numero grande di esperienze. La consistenza dell'organo era aumentata, il colore rosso scuro, la polpa abbondante, densissima, compatta, e al microscopio si notavano nei preparati su vetrini molti eritroblasti grandi e piccoli e qualche mielocito; il midollo delle coste era attivissimo, e conteneva anche qualche megaloblasto.

Fu molto notevole in tutti questi esperimenti la presenza nel sangue di numerosi megalociti, e il valore globulare superiore al normale. Riproduco a questo proposito uno dei reperti sulla cavia e sul cane:

Cavia normale 400 gr. — 17. x. 09.

Eritrociti	7.100.000	Valore globulare 0,7.	Si fa un'iniezione di 3 c. c. siero splenotossico nella cavità addominale.
Leucociti	8.000	Simile a quello di molte altre cavie normali del nostro laboratorio.	
Emoglobina	60		

Id. id. — 18. x. 09.

Eritrociti	3.000.000		
Leucociti	11 000	Valore globulare 1,3.	2ª iniezione 4 c. c. di siero.
Emoglobina	50		

Id. id. — 20. x. 09.

Eritrociti	2.000.000		
Leucociti	4.500	Valore globulare 1,8.	3ª iniez. 4 c. c. di siero toss.
Emoglobina	45		

Id. id. — 23. x. 09.

Eritrociti	3.000.000		
Leucociti	11.500	Valore globulare 1,13.	4ª iniez. 3 c. c. siero toss. (ultima).
Emoglobina	43		

Id. id. — 27. x. 09.

Eritrociti	2.000.000	
Leucociti	12.000	Valore globulare 1,1.
Emoglobina	35	

Id. id. — 31. x. 09.

Eritrociti	5.000.000	
Leucociti	10.000	Valore globulare 0,72.
Emoglobina	45	

Digitized by Google

Cane di 5 Kg. di peso. — 22. XI. 09.

Eritrociti	5.000.000		
Leucociti	8.000	Valore globulare 0,9.	Si fa la 1ª iniez. di 15 c. c. di siero nell'addome.
Emoglobina	70		

Id. id. — 23. XI. 09.

Eritrociti	4.500.000		
Leucociti	8.000	Valore globulare 1,1.	2ª iniez. di 20 c. c. di siero nella v. pedidia.
Emoglobina	76		

Id. id. — 24. XI. 09.

Eritrociti	4.200.000		
Leucociti	8.500	Valore globulare 1,2.	3ª ed ultima iniez. 20 c. c. di siero nella v. giugulare.
Emoglobina	72		

Id. id. — 26. XI. 09.

Eritrociti	3.500.000		
Leucociti	15.000	Valore globulare 1,2.	
Emoglobina	60		

Come fu detto più sopra il reperto ematologico ottenuto coi sieri splenotossici era segnalato dalla gran copia di megalociti, i quali erano assai meno copiosi negli animali salassati. L'alto valore globulare e i megalociti davano al reperto ematologico un carattere embrionale, che non si trova, invece, come è noto, nelle anemie postemorragiche, e anche questo è in armonia col reperto che si osserva nelle anemie spleniche infantili e nell'anemia perniciosa progressiva, la cui origine tossico emolittica è generalmente riconosciuta.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 19 Dicembre 1909.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO

PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: SPEZIA, SEGRE, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA, GRASSI, SOMIGLIANA, FUSARI e CAMERANO Segretario.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente.

Scusano l'assenza i Soci NACCARI, SALVADORI, MOSSO, FOÀ, MATTIROLO.

Il Presidente presenta in omaggio alla Classe:

1° il lavoro seguente dsl Socio straniero F. R. HELMERT, *Die Tiefe der Ausgleichsfläche bei der* PRATTschen *Hypothese für das Gleinchgewicht der Erdkruste und der Verlauf der Schwerestörung vom Innern der Kontinente und Ozeane nach den Küsten;*

2° *Stazione preistorica di Coppa Nevigata presso Manfredonia,* del Socio Mosso.

Il Socio JADANZA presenta in omaggio a nome del prof. BOCCARDI, l'*Annuario astronomico per il 1910.*

Il Socio SOMIGLIANA presenta in omaggio la sua nota intitolata: *Sulle deformazioni elastiche non regolari.*

Digitized by Google

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° Prof. G. Scorza, *Sulle varietà di Segre,* dal Socio Segre;

2° G. Charrier, *Azione del calore sugli o-amidoazocomposti,* dal Socio Fileti.

Il Socio Camerano, a nome anche del Socio Fusari, legge la relazione intorno alla Memoria del Dr. E. Zavattari, intitolata: *I muscoli ioidei dei Sauri in rapporto con i muscoli ioidei degli altri vertebrati,* Parte seconda. La relazione favorevole è approvata all'unanimità e con votazione segreta la Classe approva la stampa del lavoro nei volumi accademici.

Il Socio Fusari, a nome dei Soci Mosso e Foà, legge la relazione sul lavoro del Dr. Mario Ponzo: *Studio sulla localizzazione delle sensazioni cutanee di dolore.* La relazione favorevole è approvata ad unanimità e con voti segreti pure ad unanimità è approvata la stampa del lavoro nei volumi delle *Memorie* accademiche.

Il Socio Parona, a nome anche del Socio Mattirolo, legge la relazione sul lavoro del Prof. E. Martel: *Contribuzione alla Lichenologia del Piemonte.* La relazione favorevole è all'unanimità approvata dalla Classe, la quale con votazione unanime segreta approva la stampa nei volumi accademici.

Il Presidente a nome del Socio Naccari presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* il lavoro del Prof. G. Boccardi, intitolato: *Passaggi meridiani del pianeta Marte osservati nell'opposizione del 1910.* Il Presidente delega i Soci Naccari e Jadanza per riferire sopra il detto lavoro.

Digitized by Google

LETTURE

Sulle varietà di Segre.

Nota di G. SCORZA.

In una breve Nota, pubblicata nell'ultimo fascicolo dei " Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo „, ho dimostrato che:

È un S_{i-1}*-cono ogni varietà* $V_{r+i}^{n r}$ *di* $S_{\binom{n+r}{r}+i-1}$ *che sia tagliata dagli* $S_{\binom{n+r}{r}-1}$ *del suo spazio in* $V_r^{n r}$ *rappresentate sopra un* S_r *dal sistema di tutte le forme d'ordine* n.

L'osservazione, assai semplice, che soggiace a quella dimostrazione, è suscettibile di applicazioni più larghe; e qui appunto essa vien rivolta a dimostrare un teorema analogo a quello ora enunciato per una importante classe di varietà razionali normali considerate per la prima volta dal Prof. SEGRE (*).

Tali varietà si sono presentate in molte questioni di geometria, ed è facile prevedere che esse si presenteranno ancora in altre importanti ricerche (**); perciò, come ho già fatto altrove in vari casi particolari, io darò ad esse il nome di *varietà di* SEGRE.

(*) SEGRE. *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi*, " Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo „, t. V, 1891.

(**) Così, ad esempio, il Prof. SEGRE, dopo la presentazione di questo lavoro all'Accademia, mi ha gentilmente comunicato che le varietà in discorso gli si son mostrate come essenziali in una ricerca, ancora inedita, di geometria proiettivo-differenziale, da lui compiuta. Se cioè si fissa una posizione dello spazio (lineare) generatore di una varietà, gli spazi tangenti a questa nei punti di quello portano ad una varietà della classe suddetta.

Digitized by Google

1. — Per procedere con tutta chiarezza cominciamo dal ricordare la definizione delle varietà di SEGRE.

Siano dati $n(\geq 2)$ spazi lineari S_{p_1}, S_{p_2}, ..., S_{p_n}, da riguardare, anche se sono sovrapposti, come distinti, e siano $x_0^{(i)}$, $x_1^{(i)}$, ..., $x_{p_i}^{(i)}$ le coordinate (omogenee) di un punto generico di S_{p_i}. Allora, se si pone:

$$(1) \qquad X_{i_1 i_2 \dots i_n} = x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \dots x_{i_n}^{(n)} \qquad \begin{pmatrix} i_j = 0, 1, \dots p_j \\ j = 0, 1, \dots n \end{pmatrix}$$

e si riguardano le $X_{i_1 i_2 \dots i_n}$ come coordinate di un punto in un $S_{(p_1+1)(p_2+1)\dots(p_n+1)-1}$, le (1) potranno considerarsi come le equazioni parametriche di una varietà V di questo spazio in corrispondenza biunivoca *senza eccezioni* con la varietà delle n-ple di punti, $A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$, che si vengono a formare associando un punto qualunque A_1 di S_{p_1}, con un punto qualunque A_2 di S_{p_2}, ... con un punto qualunque A_n di S_{p_n}.

La dimensione di V è, chiaramente, $p_1 + p_2 + \dots + p_n$, e l'ordine, come fu dimostrato dal Prof. SEGRE, vale:

$$\frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n)!}{p_1!\, p_2! \dots\dots p_n!};$$

nell'ipotesi che nessuna delle p sia nulla, noi la diremo *la varietà di* SEGRE *di specie* n *con gli indici* $p_1, p_2, \dots p_n$.

Così la varietà di SEGRE di 2ª specie con gli indici 1, 1 è la quadrica ordinaria; quella di 2ª specie con gli indici 1, 2 è la V_3^3 razionale normale di S_5 luogo di $\infty^1 S_2$; quella di 3ª specie con gli indici 1, 1, 1 coincide con la V_3^6, razionale normale di S_7, rappresentabile sullo spazio ordinario mediante il sistema delle superficie cubiche per tre rette generiche, che si presentò al Prof. ENRIQUES come uno dei tipi di V_3 a curve sezioni ellittiche (*), ecc.

Notisi che se qualcuno dei numeri $p_1, p_2, \dots p_n$ fosse zero la V si ridurrebbe a una varietà di SEGRE di specie inferiore (in particolare, a uno spazio lineare).

(*) SCORZA, *Le varietà a curve sezioni ellittiche*, " Ann. di Matematica ,, serie 3ª, t. XV, n. 22.

Digitized by Google

2. — Ciò posto, cominciamo dallo stabilire una rappresentazione di una varietà di SEGRE sopra uno spazio lineare convenientemente esteso e, per non andare incontro ad inutili complicazioni, riferiamoci, per fissar le idee, al caso delle varietà di 3ª specie.

Sia dunque $V_{p_1+p_2+p_3}$ una varietà di SEGRE di 3ª specie, con gli indici p_1, p_2, p_3, e siano:

$$X_{i_1 i_2 i_3} = x^{(1)}_{i_1} x^{(2)}_{i_2} x^{(3)}_{i_3} \tag{2}$$

$$(i_1 = 0, 1, \dots p_1 ; \quad i_2 = 0, 1, \dots p_2 ; \quad i_3 = 0, 1, \dots p_3)$$

le equazioni parametriche che la determinano.

Tenendo presenti le (2), si vede che la rappresentazione della $V_{p_1+p_2+p_3}$ sopra un $S_{p_1+p_2+p_3}$ può ottenersi nel modo più semplice facendo:

$$x^{(1)}_0 = x^{(2)}_0 = x^{(3)}_0 = t$$

e poi riguardando la t e le rimanenti coordinate:

$$x^{(1)}_1, \ x^{(1)}_2, \ \dots \ x^{(1)}_{p_1} ; \qquad x^{(2)}_1, \ x^{(2)}_2, \ \dots \ x^{(2)}_{p_2} ; \qquad x^{(3)}_1, \ x^{(3)}_2, \ \dots \ x^{(3)}_{p_3}$$

come coordinate proiettive omogenee di un punto in un $S_{p_1+p_2+p_3}$.

In tal modo viene stabilita una corrispondenza generalmente biunivoca tra i punti di $V_{p_1+p_2+p_3}$ e quelli dell'$S_{p_1+p_2+p_3}$ prescelto; di più si vede che, per essa, ai punti di una sezione iperpiana di $V_{p_1+p_2+p_3}$ vengono a corrispondere nello spazio rappresentativo i punti di una forma cubica la cui equazione è del tipo:

$$A t^3 + \left[\sum_1^{p_1} B^{(1)}_i x^{(1)}_i + \sum_1^{p_2} B^{(2)}_i x^{(2)}_i + \sum_1^{p_3} B^{(3)}_i x^{(3)}_i \right] t^2 + \tag{3}$$

$$+ \left[\sum_{i=1}^{i=p_1} \sum_{j=1}^{j=p_2} C^{1,2}_{i,j} x^{(1)}_i x^{(2)}_j + \sum_{i=1}^{i=p_2} \sum_{j=1}^{j=p_3} C^{2,3}_{i,j} x^{(2)}_i x^{(3)}_j + \sum_{i=1}^{i=p_3} \sum_{j=1}^{j=p_1} C^{3,1}_{i,j} x^{(3)}_i x^{(1)}_j \right] t$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=p_1} \sum_{j=1}^{j=p_2} \sum_{k=1}^{k=p_3} D_{i,j,k} x^{(1)}_i x^{(2)}_j x^{(3)}_k = 0 .$$

Digitized by Google

Viceversa, come è ben chiaro, ai punti di una forma cubica rappresentata da un'equazione di questo tipo [la quale contiene $1 + (p_1 + p_2 + p_3) + (p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1) + p_1p_2p_3 = (p_1 + 1)(p_2 + 1)(p_3 + 1)$ parametri omogenei] vengono a corrispondere i punti di una determinata sezione iperpiana di $V_{p_1+p_2+p_3}$.

La varietà base del sistema lineare (3) è formata dai tre spazi $S_{p_1+p_2-1} \equiv \alpha_3$, $S_{p_2+p_3-1} \equiv \alpha_1$ ed $S_{p_3+p_1-1} \equiv \alpha_2$ dell'iperpiano $t = 0$, che sono ivi rappresentati rispettivamente dalle equazioni:

$$x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = \ldots = x_{p_1}^{(1)} = 0 ; \qquad x_1^{(2)} = x_2^{(2)} = \ldots = x_{p_2}^{(2)} = 0 ;$$
$$x_1^{(3)} = x_2^{(3)} = \ldots = x_{p_3}^{(3)} = 0 ;$$

e, come è facile persuadersi, ogni forma del sistema lineare in discorso ha tre spazi doppi negli spazi secondo cui α_1, α_2 e α_3 si tagliano a due a due.

D'altra parte è pur chiaro che ogni forma cubica dell'$S_{p_1+p_2+p_3}$ rappresentativo, la quale debba passare per α_1, α_2, α_3 e avere tre spazi doppi in quelli secondo cui α_1, α_2 e α_3 si tagliano a due a due, ha una equazione del tipo (3); dunque:

Ogni varietà di SEGRE *di 3ª specie con gli indici* p_1, p_2, p_3 *può rappresentarsi biunivocamente sopra un* $S_{p_1+p_2+p_3}$ *mediante il sistema completo delle forme cubiche che passano per tre spazi generici* α_1, α_2, α_3, *di un iperpiano, con le dimensioni rispettive* $p_2 + p_3 - 1$, $p_3 + p_1 - 1$, $p_1 + p_2 - 1$ *e hanno tre spazi doppi negli* S_{p_1-1}, S_{p_2-1}, S_{p_3-1} *secondo cui* α_1, α_2 *e* α_3 *si tagliano a due a due.*

Il fatto che il sistema di forme cubiche di cui si parla in questo teorema è completo, corrisponde, com'è ben noto, all'altro che la $V_{p_1+p_2+p_3}$ è normale, e di ciò sarebbe facile procurarsi una dimostrazione diretta ricordando le prime proprietà geometriche delle varietà di SEGRE; ma crediamo inutile di fermarci su questo proposito.

3. — Piuttosto, osserveremo, poichè questo ha per noi importanza fondamentale, che nel sistema lineare (3) è contenuto parzialmente il sistema di tutti gli iperpiani dell'$S_{p_1+p_2+p_3}$ rappresentativo, che il *resto* di questo sistema rispetto al primo

Digitized by Google

è dato dall'iperpiano $t = 0$ contato due volte, e che, per conseguenza, la rappresentazione considerata può riguardarsi come ottenuta per proiezione della $V_{p_1+p_2+p_3}$ da un certo $S_{(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)-(p_1+p_2+p_3)-2}$ sopra un conveniente $S_{p_1+p_2+p_3}$.

Se, per comodità, diciamo ω il centro di proiezione si vede che lo spazio ω è quello secondo cui si intersecano gl'iperpiani dello spazio della $V_{p_1+p_2+p_3}$ rappresentati dalle equazioni:

$$X_{000} = 0\,, \qquad X_{i_1 00} = 0, \qquad X_{0 i_2 0} = 0\,, \qquad X_{00 i_3} = 0$$

$$(i_1 = 1, 2, \ldots p_1\,; \quad i_2 = 1, 2, \ldots p_2\,; \quad i_3 = 1, 2, \ldots p_3)$$

e come spazio rappresentativo si può assumere quello *opposto* ad ω nella *piramide fondamentale* dello spazio della $V_{p_1+p_2+p_3}$.

Ora si osservi:

α) che lo spazio ω seca la $V_{p_1+p_2+p_3}$ secondo una varietà Φ di dimensione $p_1 + p_2 + p_3 - 2$ spezzata in tre varietà di SEGRE Φ_1, Φ_2, Φ_3; essendo Φ_1 la varietà generata nel solito modo dagli iperpiani:

$$x_0^{(2)} = 0\,, \qquad x_0^{(3)} = 0$$

di S_{p_2} ed S_{p_3} insieme con S_{p_1}; Φ_2 la varietà generata dagli iperpiani:

$$x_0^{(3)} = 0\,; \qquad x_0^{(1)} = 0$$

di S_{p_3} ed S_{p_1} insieme con S_{p_2} e Φ_3 la varietà generata dagli iperpiani:

$$x_0^{(1)} = 0\,, \qquad x_0^{(2)} = 0$$

di S_{p_1} ed S_{p_2} insieme con S_{p_3} (*);

β) che Φ *appartiene* ad ω (ciò che risulta o da una verifica analitica diretta, o da una semplice osservazione geometrica fondata sul fatto che $V_{p_1+p_2+p_3}$ è normale);

(*) Notisi che se qualcuno degli indici p_1, p_2, p_3 è uguale all'unità, qualcuna delle Φ_1, Φ_2, Φ_3 risulterà di specie inferiore a 3.

Digitized by Google

γ) che Φ_1, Φ_2, Φ_3 si tagliano nella varietà di SEGRE generata dagli iperpiani:

$$x_0^{(1)} = 0\,, \qquad x_0^{(2)} = 0\,, \qquad x_0^{(3)} = 0$$

di S_{p_1}, S_{p_2} ed S_{p_3};

δ) che la sezione di $V_{p_1+p_2+p_3}$ con l'iperpiano $X_{000} = 0$ si spezza in tre varietà di SEGRE delle quali ve n'è sempre due che passano per Φ_1, Φ_2 o Φ_3; e quindi l'iperpiano $X_{000} = 0$ *tocca* $V_{p_1+p_2+p_3}$ in tutti i punti di Φ.

4. — Le cose dette nei n^i 2 e 3 a proposito delle varietà di 3ª specie si estendono senza fatica a quelle di specie n; e si trova così il seguente teorema generale:

Sia $V_{p_1+p_2+\ldots+p_n}$ *una varietà di* SEGRE *di specie* n *generata dagli spazi lineari* S_{p_1}, S_{p_2}, ... S_{p_n}. *Sia inoltre* S_{p_i-1} *un iperpiano scelto comunque nello spazio* S_{p_i} (i = 1, 2 ... n) *e si chiamino:* $\Phi_{h,k}$ *la varietà di* SEGRE *generata da* S_{p_h-1} *ed* S_{p_k-1} *insieme con gli spazi che restano dai dati* S_{p_i} *dopo averne esclusi* S_{p_h} *ed* S_{p_k}, *e* Φ *la varietà che risulta dalla somma di tutte le* $\Phi_{h,k}$ *facendo percorrere ad* (h, k) *la serie di tutte le combinazioni binarie degli indici* 1, 2, ... n.

Allora Φ *appartiene ad uno spazio* ω *di dimensione*

$$(p_1 + 1)(p_2 + 1) \ldots (p_n + 1) - (p_1 + p_2 + \ldots p_n) - 2;$$

la proiezione di $V_{p_1+p_2+\ldots+p_n}$ *da* ω *sopra un* $S_{p_1+p_2+\ldots+p_n}$ *risulta generalmente biunivoca e le sezioni iperpiane di* $V_{p_1+p_2+\ldots+p_n}$ *si riflettono nel sistema lineare completo delle forme d'ordine* n *di* $S_{p_1+p_2+\ldots+p_n}$ *che passano, semplicemente, per certi* n *spazi* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ *situati in un iperpiano dello spazio rappresentativo e aventi, ordinatamente, le dimensioni:*

$$p_2 + p_3 + \ldots + p_n - 1\,; \quad p_1 + p_3 + p_4 + \ldots + p_n - 1\,; \quad \ldots;$$
$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} - 1\,;$$

doppiamente per gli spazi secondo cui $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ *si tagliano a due a due; tre volte per gli spazi secondo cui* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ *si tagliano a tre a tre;* (n − 1) *volte per quelli secondo cui* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ *si tagliano ad* n − 1 *ad* n − 1.

Digitized by Google

L'iperpiano che contiene $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ *è poi la traccia, sullo spazio rappresentativo, dell'iperpiano dello spazio ambiente che tocca* $V_{p_1+p_2+\ldots+p_n}$ *in tutti i punti di* Φ (*).

5. — Prima di procedere innanzi è utile fermarsi un momento sopra alcune osservazioni relative agli spazi lineari contenuti nella $V_{p_1+p_2+\ldots+p_n}$.

Sia in primo luogo r una retta situata sulla $V_{p_1+p_2+\ldots+p_n}$ ed R un punto di r; sia poi $A_1 A_2 \ldots A_n$ l'n-pla di punti estratta da $S_{p_1}, S_{p_2}, \ldots S_{p_n}$ che ha per immagine R; è chiaro che al variare di R su r, degli n punti $A_1, A_2, \ldots A_n$, $n-1$ restano fissi.

(*) È degno di nota, e per la sua semplicità e per le conseguenze a cui dà luogo, il caso particolare delle varietà di 2ª specie; le quali, se hanno gli indici p_1 e p_2, sono rappresentabili sopra un $S_{p_1+p_2}$ mediante il sistema di tutte le quadriche che passano per un S_{p_1-1} e per un S_{p_2-1} generici.

Così la V_4^6 di S_8 con due schiere doppiamente infinite di piani è rappresentabile sopra un S_4 mediante il sistema delle quadriche per due rette (donde segue, tenendo presente quel che è osservato al n° 60 del mio lavoro già citato degli "Annali di Matematica", che la nota V_4^3 di S_5 studiata già dal sig. Perazzo si può rappresentare sopra un S_4 mediante il sistema delle quadriche per due rette e per tre punti); la V_5^{10} di S_{11}, con $\infty^2 S_3$ e $\infty^3 S_2$, si può rappresentare sopra un S_5 mediante il sistema delle quadriche per una retta e per un piano, ecc.

Da questa rappresentazione della V_5^{10} (che è ottenuta mediante proiezione dall'S_5 di una V_3^3 della V_5^{10}, luogo di $\infty^1 S_2$) possiamo trarre un'utile conseguenza. Infatti per essa una sezione iperpiana generica, V_4^{10}, della V_5^{10} (e, per evitare equivoci, si osservi che, per un facile computo di costanti, non è tale una sezione iperpiana contenente una V_3^3 luogo di $\infty^1 S_2$) viene riferita punto per punto a una V_4^3 dell'S_5 rappresentativo e su questa V_4^3 il sistema lineare delle sezioni iperpiane di V_4^{10} vien rappresentato da un sistema lineare di V_3^4 con una varietà base formata da una retta e da un piano.

Ne segue, effettuando una proiezione stereografica da un punto di questa retta o di questo piano, che la V_4^{10} è rappresentabile punto per punto sopra un S_4 per modo che le sezioni iperpiane siano rappresentate da un sistema lineare di forme cubiche.

Così ai teoremi enunciati nell'Introduzione e nel n° 25 della mia Nota: *Sulle varietà a quattro dimensioni di* S_r $(r > 9)$ *i cui* S_4 *tangenti si tagliano a due a due* ("Rendic. del Circ. Matem. di Palermo", t. XXVII, 1909), può darsi un aspetto più semplice.

Digitized by Google

E infatti, se anche due soli di essi, per es. A_{n-1} e A_n, assumessero ∞^1 posizioni distinte, una sezione iperpiana di $V_{p_1+p_2+\ldots+p_n}$ che, come quella rappresentata dall'equazione:

$$X_{000\ldots0} = 0,$$

si spezzi in n varietà di SEGRE, taglierebbe r in più di un punto.

Segue che, dei punti $A_1 \ldots A_n$, $n-1$ restano fissi al muoversi di R su r e l'n^{mo} descrive una retta.

Ora uno spazio lineare contiene per intero una retta appena ne contiene due punti; dunque i soli spazi lineari contenuti in $V_{p_1+p_2+\ldots+p_n}$ sono quelli che si ottengono fissando un punto in $n-1$ degli spazi S_{p_i}, per es. S_{p_1}, S_{p_2}, ... $S_{p_{n-1}}$, e poi considerando le n-ple formate riunendo codesti $n-1$ punti a un punto variabile in uno spazio lineare contenuto in (o coincid. con) S_{p_n}. Indicando con $|\Sigma_{p_h}|$ il sistema di $\infty^{p_1+\ldots+p_{h-1}+p_{h+1}+\ldots+p_n}$ spazi ad h dimensioni di $V_{p_1+p_2+\ldots+p_n}$ che si ottengono fissando nel modo ora detto una $(n-1)$-pla di punti in S_{p_1}, S_{p_2}, ... $S_{p_{h-1}}$, $S_{p_{h+1}}$, ... S_{p_n} e poi aggregandola a tutti i punti di S_{p_h}, possiamo dire che:

Gli spazi lineari contenuti in $V_{p_1+p_2+\ldots+p_n}$ *sono tutti e soli quelli degli* n *sistemi* $|\Sigma_{p_i}|$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ *e quelli ad essi subordinati.*

Notisi in secondo luogo che la varietà di SEGRE indicata più sopra con $\Phi_{h,k}$ si comporta in modo ben diverso rispetto agli spazi del sistema $|\Sigma_{p_i}|$ secondo che $i = h, k$ oppure $i \neq h$ e k.

Infatti se $i = h$ o k, un S_{p_i} di $|\Sigma_{p_i}|$ o non ha alcun punto comune con $\Phi_{h,k}$ o la taglia secondo un S_{p_i-1} appartenente al sistema $|S_{p_i-1}|$, avente per $\Phi_{h,k}$ significato analogo a quello che $|\Sigma_{p_i}|$ ha per la data $V_{p_1+p_2+\ldots+p_n}$; mentre se $i \neq h$ e k, un S_{p_i} di $|\Sigma_{p_i}|$ o non ha alcun punto comune con $\Phi_{h,k}$ o vi giace per intero ed è un S_{p_i} di un suo $|S_{p_i}|$.

Aggiungasi che se una varietà di SEGRE $\Psi_{h,k}$ della stessa specie e con gli stessi indici di $\Phi_{h,k}$ è situata su $V_{p_1+p_2+\ldots+p_n}$ e si comporta rispetto ai sistemi $|\Sigma_{p_i}|$ allo stesso modo di $\Phi_{h,k}$, necessariamente $\Psi_{h,k}$ coincide con una varietà del tipo di quelle indicate con $\Phi_{h,k}$.

Digitized by Google

E infatti, supposto, per fissar le idee, $h<k$, sia $A_1 \dots A_h \dots A_k \dots A_n$ l'n-pla immagine del punto A di $\Psi_{h,k}$. Poichè $\Psi_{h,k}$ contiene per intero un S_{p_i} di $|\Sigma_{p_i}|$ per $i \neq k$ e h appena ne contenga un punto, è chiaro che corrispondono a punti di $\Phi_{h,k}$ tutte le n-ple le quali si deducono da $A_1, \dots, A_n$ tenendo fermi tutti i punti $A_1, \dots, A_n$ tranne A_i e facendo variare comunque A_i nel relativo S_{p_i}. Allo stesso modo si vede che si riflettono in punti di $\Psi_{h,k}$ tutte le n-ple che si deducono da $A_1, A_2, \dots, A_n$ tenendo fermi tutti i punti $A_1, \dots, A_n$ ad eccezione di A_h (o A_k) e facendo descrivere ad A_h (o A_k) un certo iperpiano del relativo S_{p_h} (od S_{p_k}). Ora questo iperpiano di S_{p_h} (od S_{p_k}) è indipendente dalla scelta dell'n-pla $A_1, A_2, \dots, A_n$ fra quelle che corrispondono a punti di $\Psi_{h,k}$.

Per persuadersene si torni a considerare l'n-pla $A_1, \dots, A_{h-1}$, $A_h, A_{h+1}, \dots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, \dots, A_n$, e si osservi che se si tengon fermi tutti i suoi punti tranne A_h e si fa variare A_h in un certo iperpiano di S_{p_h} si ottiene un S_{p_h-1} appartenente al sistema $|S_{p_h-1}|$ di $\Psi_{h,k}$ analogo a quello che abbiamo indicato nello stesso modo per $\Psi_{h,k}$. Se si suppone di far questa operazione per ogni n-pla ricavata dalla precedente, sostituendo ad A_i ($i \neq h$ e k) un punto qualunque B_i del relativo S_{p_i} si otterranno, in corrispondenza al punto A_k, $\infty^{p_1+\dots+p_{h-1}+p_{h+1}+\dots+p_{k-1}+p_{k+1}+\dots+p_n}$ S_{p_h-1} del sistema $|S_{p_h-1}|$. Ma allora basta tener presente la dimensione della varietà di S_{p_h-1} costituita da questo sistema $|S_{p_h-1}|$ per concludere che A_k non può assumere in S_{p_k} che ∞^{p_k-1} posizioni distinte e che, per conseguenza, quei tali iperpiani di S_{p_h} ed S_{p_k} sono fissi.

Segue che la $\Psi_{h,k}$ è una varietà del tipo di quelle che abbiamo indicato con $\Phi_{h,k}$.

6. — Ed ora supponiamo che una $V_{p_1+p_2+\dots+p_n+1}$ dell'ordine $\frac{(p_1+p_2+\dots+p_n)!}{p_1!\,p_2!\dots p_n!}$ di $S_{(p_1+1)(p_2+1)\dots(p_n+1)}$ sia secata da ogni iperpiano del suo spazio in una varietà di SEGRE di specie n con gli indici $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Dico che, *eccettuato il caso in cui* $n=2$ *e* $p_1=p_2=1$, $V_{p_1+p_2+\dots+p_n+1}$ è un cono proiettante dal suo vertice una siffatta varietà di SEGRE.

Digitized by Google

Infatti, consideriamo una sezione iperpiana Π di $V_{p_1+p_2+\ldots+p_n+1}$ e una sua *varietà* Φ, Φ_0, appartenente a uno spazio ω; poi consideriamo un iperpiano τ che ruoti intorno ad ω in maniera continua. Per ogni posizione di τ si avrà una sezione di $V_{p_1+p_2+\ldots+p_n+1}$ coi relativi sistemi $|\Sigma_{p_i}|$; e, come la sezione si può ottenere da Π per variazione continua, così questi sistemi si potranno dedurre per variazione continua da quelli di Π. Segue facilmente (ricordando che Φ_0 è una somma di varietà del tipo indicato più sopra con $\Phi_{h,k}$) che Φ_0 si comporta rispetto ai sistemi di Π come rispetto ai sistemi di qualsiasi altra sezione ottenuta per mezzo dell'iperpiano τ: e che, per conseguenza, Φ_0 è una varietà Φ per ogni sezione iperpiana uscente da ω.

Ciò posto, proiettiamo $V_{p_1+p_2+\ldots+p_n+1}$ da ω sopra un $S_{p_1+\ldots+p_n+1}$ dello spazio ambiente, che non tagli ω; la proiezione risulterà generalmente biunivoca, le sezioni iperpiane passanti per Φ_0 si rifletteranno negli iperpiani dello spazio rappresentativo e il sistema di tutte le sezioni iperpiane di $V_{p_1+p_2+\ldots+p_n+1}$ si rifletterà in un sistema completo di forme d'ordine n di dimensione $(p_1+1)(p_2+1)\ldots(p_n+1)$ che segnerà sopra ogni iperpiano dello spazio rappresentativo un sistema lineare di forme d'ordine n, $(p_1+1)(p_2+1)\ldots(p_n+1)-1$ volte infinito, avente per varietà base n spazi lineari σ_1', σ_2', ... σ_n' (situati in un $S_{(p_1+1)(p_2+1)\ldots(p_n+1)-2}$), di cui l'$i^{mo}$ avrà per dimensione $p_1+p_2+\ldots+p_{i-1}+p_{i+1}+\ldots+p_n-1$.

Eccettuato il caso di $n=2$ e $p_1=p_2=1$, questa somma è sempre non inferiore ad 1 (*), quindi, eccettuato codesto caso, la varietà base del sistema rappresentativo $|K|$ della $V_{p_1+p_2+\ldots+p_n+1}$ sarà formata da n spazi lineari α_1, α_2, ... α_n, di cui l'i^{mo} avrà la dimensione $p_1+p_2+\ldots+p_{i-1}+p_{i+1}+\ldots+p_n$; inoltre α_1, α_2, ... α_n apparterranno a un iperpiano, σ, che contato $n-1$ volte costituirà il *resto* rispetto a $|K|$ del sistema degli iperpiani dello spazio rappresentativo.

Dal fatto che gli spazi α_1, α_2, ... α_n stanno in un iperpiano (cioè in un $S_{p_1+p_2+\ldots+p_n}$) si deduce che essi hanno un

(*) Si rammenti che ognuno degli indici $p_1, p_2, \ldots, p_n$ è sempre ≥ 1.

Digitized by Google

punto comune O (*), e questo punto sarà $(n-1)$-plo per ogni forma del sistema $|K|$, poichè l'intersezione di $n-1$ degli spazi α_1, α_2, ... α_n risulta tutta $(n-1)$-pla per le forme di $|K|$.

Gli spazi secondo cui α_1, α_2, ... α_n si tagliano ad $n-1$ ad $n-1$ sono degli S_{p_1}, S_{p_2}, ... S_{p_n}; un punto che appartenga a uno di questi S_{p_i} è punto $(n-1)$-plo per le forme di $|K|$ e il cono ivi osculatore a una qualunque delle forme $|K|$ è un cono d'ordine $n-1$ avente per vertice appunto l'S_{p_i} considerato; dunque il cono osculatore in O alle forme di $|K|$, dovendo avere per vertice uno spazio che contenga S_{p_1}, S_{p_2}, ... S_{p_n}, sarà l'iperpiano σ contato $(n-1)$ volte.

Ma allora, poichè $|K|$ è un sistema lineare di monoidi col cono osculatore fisso nel punto $(n-1)$-plo O segue subito che $V_{p_1+p_2+\ldots+p_n+1}$ è un cono; c. d. d.

Il caso di $n=2$, $p_1=p_2=1$ sfugge al ragionamento fatto; e ciò è ben naturale, perchè quando $n=2$ e $p_1=p_2=1$ anche il teorema cessa d'esser vero.

Possiamo pertanto enunciare il seguente teorema:

Se una $V_{p_1+p_2+\ldots+p_n+1}$ *di* $S_{(p_1+1)(p_2+1)\ldots(p_n+1)}$ $\left[\text{*dell' ordine* } \frac{(p_1+p_2+\ldots+p_n)!}{p_1!\,p_2!\ldots p_n!}\right]$ *è secata da ogni iperpiano in una varietà di* SEGRE *di specie* n *con gli indici* p_1, p_2, ... p_n,

a) *essa è un cono proiettante dal suo vertice una siffatta varietà di* SEGRE, *oppure*

b) $n=2$ *e* $p_1=p_2=1$, *e allora essa è la quadrica generale dello spazio a quattro dimensioni* (**).

A questo teorema può darsi agevolmente una forma più generale considerando le $V_{p_1+p_2+\ldots+p_n+i}$ di $S_{(p_1+1)(p_2+1)\ldots(p_n+1)+i-1}$ che da ogni $S_{(p_1+1)\ldots(p_n+1)-1}$ dello spazio ambiente siano secate in varietà di SEGRE di specie n con gli indici p_1, p_2, ... p_n. Queste o sono degli S_{i-1}-coni o sono delle quadriche (e allora $n=2$ e $p_1=p_2=1$).

(*) E non più che un punto, poichè α_1', α_2', ..., α_n' non hanno punti comuni.

(**) Alcuni casi particolari di questo teorema si trovano stabiliti ai numeri 47 e 61 del mio già citato lavoro degli " Annali di Matematica ".

Digitized by Google

7. — Digressione. — In una prima redazione di questa Nota (settembre 1909), il teorema del n° 6 era dimostrato in maniera analoga a quella adoperata qui, ma il ragionamento si presentava più complicato in taluni suoi particolari, perchè la rappresentazione di una $V_{p_1+p_2+\ldots+p_n}$ sopra un $S_{p_1+p_2+\ldots+p_n}$ che ivi si utilizzava non era di costruzione così semplice come quella a cui si fa ricorso nei n^i 2, 3 e 4. Quest'ultima (caso particolare dell'altra) mi fu cortesemente suggerita dal Prof. SEGRE (cui mi è grato rivolgere ancora una volta i più cordiali ringraziamenti): ed essa ha reso più spedita l'esposizione in tutte le sue parti. In ogni modo, poichè il teorema di cui mi servivo prima non sembra del tutto privo d'interesse, credo che metta conto di fermarsi qui un momento ad enunciarlo.

Sia $V_{p_1+p_2+\ldots+p_n}$ una varietà di SEGRE di specie n definita mediante le equazioni parametriche (1) e, supposto che ognuno degli indici p_1, p_2, ... p_n sia non inferiore a $n-2$, consideriamo nell'S_{p_1}, nell'S_{p_2}, ... e nell'S_{p_n} che han dato origine alla $V_{p_1+p_2+\ldots+p_n}$, n sistemi lineari d'iperpiani $n-2$ volte infiniti, riferiti proiettivamente fra di loro.

Senza venir meno alla generalità, noi possiamo supporre che tali sistemi siano definiti dalle equazioni:

$$(4)\qquad \begin{cases} \lambda_0 x_0^{(1)} + \lambda_1 x_1^{(1)} + \ldots + \lambda_{n-2} x_{n-2}^{(1)} = 0 \\ \lambda_0 x_0^{(2)} + \lambda_1 x_1^{(2)} + \ldots + \lambda_{n-2} x_{n-2}^{(2)} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_0 x_0^{(n)} + \lambda_1 x_1^{(n)} + \ldots + \lambda_{n-2} x_{n-2}^{(n)} = 0 \end{cases}$$

e che gli iperpiani corrispondenti siano quelli forniti dalle (4) quando per le λ si pongano in tutte gli stessi valori (non tutti nulli).

Ciò posto si consideri la $V_{p_1+p_2+\ldots+p_n-2}$ di $V_{p_1+p_2+\ldots+p_n}$ che si ottiene considerando, entro la varietà delle n-ple di punti estratte da S_{p_1}, S_{p_2}, ... S_{p_n}, quella formata dalle n-ple di punti A_1, A_2, ... A_n per le quali accade che i punti A_1, A_2, A_{n-1} e A_n si trovano ordinatamente in iperpiani di S_{p_1}, S_{p_2}, ... S_{p_n} che si corrispondano fra loro nelle proiettività stabilite dalle (2).

Digitized by Google

Ebbene, si può dimostrare che tale $V_{p_1+p_2+\ldots+p_n-2}$ appartiene ad uno spazio ω la cui dimensione è data da:

$$(p_1+1)(p_2+1)\ldots(p_n+1)-(p_1+p_2+\ldots+p_n)-2;$$

e che la proiezione di $V_{p_1+p_2+\ldots+p_n}$ da ω sopra un $S_{p_1+p_2+\ldots+p_n}$ risulta generalmente biunivoca. Le immagini delle sezioni iperpiane sono poi forme d'ordine n passanti per n spazi *generici* α_1, α_2, ... α_n di cui l'i^{mo} ha per dimensione:

$$p_1+p_2+\ldots+p_{i-1}+p_{i+1}+\ldots+p_n-1;$$

e il *resto* del sistema degli iperpiani dello spazio rappresentativo rispetto a quello di codeste immagini è *una* forma d'ordine $n-1$ passante per α_1, α_2, ... α_n.

Più sopra, si è supposto, per maggiore semplicità, che nessuno degli indici p_1, p_2, ... p_n fosse inferiore ad $n-2$; ma le cose dette, con leggere modificazioni, continuano a sussistere anche quando una tale ipotesi non sia verificata.

Palermo, 9 dicembre 1909.

Azione del calore sugli o-amidoazocomposti.

Nota di G. CHARRIER.

È noto che agli o-amidoazocomposti si possono assegnare le due formole tautomere

la prima delle quali dà ragione del loro comportamento verso l'acido nitroso (1), mentre la seconda, che è quella di idrazoni di o-chinonimidi, si accorda meglio col modo di comportarsi dei

(1) Zincke e Lawson, B. *17*, 80 (1884). — Nölting e Witt, B. *19*, 1452 (1886).

Digitized by Google

composti stessi all'ossidazione e verso le aldeidi, l'isocianato di fenile, il cloruro di tionile, i seufoli aromatici, il cloruro di carbonile, il tetrametildiamidobenzidrol, ecc. (1).

Io ho ora osservato che gli o-amidoazocomposti, scaldati verso i 300°, si decompongono in triazolo, amina primaria e o-diamina

$$3\,Ar\begin{cases}NH_2\\ N{=}N.Ar'\end{cases} = 2\,Ar\begin{cases}N\\ |\\ N\end{cases}N.Ar' + Ar'{-}NH_2 + Ar\begin{cases}NH_2\\ NH_2\end{cases}$$

e questa reazione si spiega meglio colla prima delle due formole tautomere, perchè si può immaginare che consista nell'ossidazione di due molecole di un amidocorpo per mezzo di una di un azoderivato ed è analoga a quella osservata da Walther (2) fra l'amido-azobenzolo e la fenilidrazina e da Ponzio e Charrier (3) fra gli acilazoarili e la stessa fenilidrazina.

Toluolazo-p-toluidina $C_6H_3\begin{cases}[1]\,CH_3\\ [3]\,N{=}N{-}[1]C_6H_4[4]CH_3\\ [4]NH_2\end{cases}$

Riscaldando la toluolazo-p-toluidina verso 300°, essa si decompone in modo quasi tumultuoso e dal prodotto della reazione si possono ottenere, per distillazione, le tre seguenti porzioni:

I^a da 195° a 220°, costituita in massima parte da p-toluidina.

II^a da 260° a 270°, contenente 3, 4-toluilendiamina.

III^a sopra 360°, costituita da p-toluilen-n-p-toliltriazolo.

Dalla prima porzione si ottiene per ulteriore distillazione frazionata p-toluidina, fusibile a 45° e bollente a 198°.

gr. 0,1739 di sostanza fornirono cc. 20 di azoto ($H_o = 723{,}6$ $t = 12°$), ossia gr.. 0,022709.

(1) Goldschmidt e Rosell, B. *23*, 497 (1890). — Goldschmidt e Poltzer, B. *24*, 100 (1891). — Michaelis e Erdmann, B. *28*, 2192 (1895). — Busch, B. *32*, 2959 (1899). — Möhlau e Heinze, B. *34*, 881 (1901).

(2) Journ. für prakt. Chem. [2] *52*, 142 (1895).

(3) G. Chim. *39*, I, 561 (1909).

Digitized by Google

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per C_7H_9N
Azoto	13,05	13,08

Essa fu caratterizzata scaldandola con acido acetico, anidride acetica e acetato sodico e trasformandola così in p-acetotoluide, fusibile a 153°.

Dalla seconda frazione si ottiene, per ripetute distillazioni, una porzione bollente a 265°, che è costituita da 3, 4-toluilendiamina, fusibile a 87-88°.

gr. 0,1032 di sostanza fornirono cc. 20,8 di azoto ($H_o = 737,7$ $t = 20°$), ossia gr. 0,023285.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_7H_{10}N_2$
Azoto	22,56	22,95

Per controllo si trattò secondo Nölting e Witt (1) con acetato sodico e anidride acetica, si lavò il prodotto con etere freddo, lo si cristallizzò dall'acqua bollente, e si ottenne così l'etenil derivato $CH_3\text{-}C_6H_3\langle^{NH}_{N}\rangle C\text{-}CH_3$, fusibile a 202-203° (2).

gr. 0,1092 di sostanza fornirono cc. 19 di azoto ($H_0 = 731,53$ $t = 21°$), ossia gr. 0,020996.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_9H_{10}N_2$
Azoto	19,22	19,17

Il p-toluilen-n-p-toliltriazolo, che distilla sopra 360° e costituisce la terza frazione, è lievemente colorato in giallo-bruno. Per ottenerlo perfettamente puro si cristallizza dall'alcool mediante aggiunta di carbone animale, quindi dalla benzina, e poi ancora dall'alcool, da cui si ottiene fusibile a 125-126°.

---

(1) B. *17*, 81 (1884).

(2) Hobrecker, B. *5*, 920 (1872). — Niementowsky, B. *30*, 3064 (1897).

Digitized by Google

I. gr. 0,1386 di sostanza fornirono gr. 0,3822 di anidride carbonica e gr. 0,0770 di acqua.

II. gr. 0,1299 di sostanza fornirono gr. 0,3592 di anidride carbonica e gr. 0,0705 di acqua.

III. gr. 0,1510 di sostanza fornirono cc. 25,3 di azoto ($H_0 = 729{,}53$ $t = 20°$), ossia gr. 0,027880.

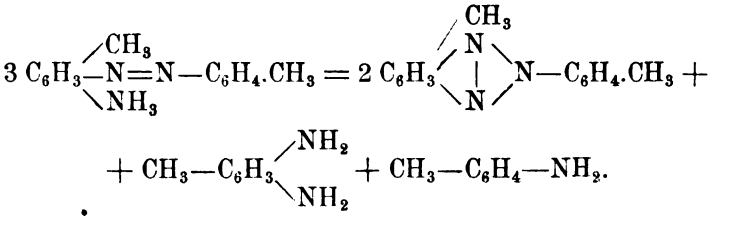
IV. gr. 0,1056 di sostanza fornirono cc. 18 di azoto ($H_0 = 732{,}65$ $t = 20°$), ossia gr. 0,019982.

Cioè su cento parti:

	trovato				calcolato per $C_{14}H_{13}N_3$
	I	II	III	IV	
Carbonio	75,20	75,36	—	—	75,33
Idrogeno	6,17	6,00	—	—	5,83
Azoto	—	—	18,46	18,92	18,83

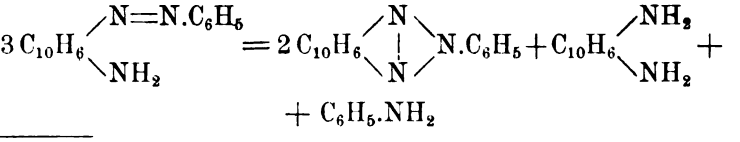
Il toluilen-n-p-toliltriazolo venne per la prima volta ottenuto da Zincke per ossidazione della toluolazo-p-toluidina con acido cromico in soluzione acetica (1).

Da quanto sopra è esposto risulta che la toluolazo-p-toluidina si decompone, per l'azione del calore, secondo l'equazione:



Benzolazo-β-naftilamina $C_{10}H_6\begin{cases}[\alpha]N{=}N.C_6H_5\\[\beta]NH_2\end{cases}$

Questo composto, riscaldato verso 300°, si decompone secondo l'equazione seguente:



(1) B. *18*, 3143 (1885).

Digitized by Google

Distillando il prodotto della reazione, passò l'anilina che fu analizzata e, a maggior conferma, trasformata in acetanilide.

gr. 0,1809 di sostanza fornirono cc. 23,8 di azoto ($H_0 = 730,94$ $t = 16°$) ossia gr. 0,026849.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per C_7H_7N
Azoto	14,84	15,05

Il residuo della distillazione, che consiste in una miscela di 1, 2-naftilendiamina e di naftilen-n-fenil-triazol, si versa ancor fuso in poco alcool, con che il triazolo, che vi è pochissimo solubile a freddo, si separa sotto forma di massa cristallina bruna e nell'alcool rimane sciolta la naftilendiamina.

Questa si può facilmente ottenere precipitandone dalla soluzione alcoolica con acido cloridrico sciolto in etere, il cloridrato, sciogliendolo in acqua, riprecipitandolo con acido cloridrico fumante, e decomponendolo con ammoniaca, avendo cura di raffreddare in ghiaccio: cristallizzata dall'acqua la naftilendiamina si ottiene sotto forma di splendide lamelle lucenti bianche, fondenti a 95° (1).

gr. 0,1141 di sostanza fornirono cc. 17,5 di azoto ($H_0 = 730,6$ $t = 12°$), ossia gr. 0,020053.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{10}H_{10}N_2$
Azoto	17,57	17,72

Ne fu anche analizzato il solfato, che essendo pochissimo solubile, si precipitò in forma di pagliette bianche aggiungendo acido solforico diluito alla soluzione acquosa della base.

gr. 0,1236 di sostanza fornirono gr. 0,0701 di $BaSO_4$, corrispondenti a gr. 0,029449 di H_2SO_4.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $(C_{10}H_6N_2H_4)_2H_2SO_4$
H_2SO_4	23,82	23,67

(1) Bamberger e Schieffelin, B. *22*, 1376 (1889).

Digitized by Google

Con anidride acetica e acetato sodico in soluz. acetica ottenni dalla naftilendiamina il diacetil derivato $C_{10}H_6\begin{matrix}NH\text{-}COCH_3\\NH\text{-}COCH_3\end{matrix}$, che cristallizza dall'alcool in forma di aghetti bianchi, lucenti, fusibili a 324°.

I. gr. 0,1582 di sostanza fornirono gr. 0,4048 di anidride carbonica e gr. 0,0900 di acqua.

II. gr. 0,1331 di sostanza fornirono cc. 13,5 di azoto ($H_0 = 729,47$ $t = 13°$), ossia gr. 0,015389.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{14}H_{14}N_2O_2$
	I	II	
Carbonio	69,55	—	69,42
Idrogeno	6,31	—	5,78
Azoto	—	11,56	11,57

Il naftilenfeniltriazolo, separato dalla naftilendiamina, come avanti è detto, si purifica cristallizzandolo una volta dall'alcool in presenza di carbone animale, poi dalla benzina e infine ancora dall'alcool; si ottiene così sotto forma di microscopici aghetti bianchissimi, fondenti tra 107,5° e 108°.

I. gr. 0,1176 di sostanza fornirono gr. 0,3389 di anidride carbonica e gr. 0,0480 di acqua.

II. gr. 0,1890 di sostanza fornirono gr. 0,5432 di anidride carbonica e gr. 0,0842 di acqua.

III. gr. 0,1417 di sostanza diedero cc. 21,5 di azoto ($H_0 = 727,94$ $t = 16°$), ossia gr. 0,024154.

IV. gr. 0,1056 di sostanza fornirono cc. 16,1 di azoto ($H_0 = 715,73$ $t = 11°$), ossia gr. 0,018154.

Cioè su cento parti:

	trovato				calcolato per $C_{16}H_{11}N_3$
	I	II	III	IV	
Carbonio	78,59	78,38	—	—	78,36
Idrogeno	4,53	4,94	—	—	4,49
Azoto	—	—	17,04	17,19	17,14

Anche questo triazolo fu ottenuto per la prima volta da

Digitized by Google

Zincke per azione dell'acido cromico in soluzione acetica sulla benzolazo-β-naftilamina.

Toluolazo-β-naftilamina $C_{10}H_6\begin{cases}[\alpha]\,N{=}N{-}[4]C_6H_4{-}[1]CH_3\\[\beta]\,NH_2\end{cases}$

La p-tolilazo-β-naftilamina, finora sconosciuta, si prepara, analogamente all'ortoderivato, facendo agire il cloruro di p-tolildiazonio su una soluzione alcoolica di β-naftilamina: si separa una massa cristallina rossa, che si cristallizza dall'alcool.

È poco solubile nella ligroina, molto nell'etere, nel cloroformio, nel solfuro di carbonio, nell'acetone e nell'acido acetico; nell'acido solforico concentrato si scioglie con colorazione rosso-violetta intensa. Il suo miglior solvente è l'alcool, nel quale è molto solubile a caldo e poco a freddo: da esso si separa in magnifici aghi rossi, fondenti a 113° senza decomposizione.

I. gr. 0,1362 di sostanza fornirono gr. 0,3906 di anidride carbonica e gr. 0,0762 di acqua.

II. gr. 0,2568 di sostanza fornirono cc. 36,2 di azoto ($H_0 = 730{,}83$ $t = 16°$), ossia gr. 0,040606.

III. gr. 0,1960 di sostanza fornirono cc. 28 di azoto ($H_0 = 722{,}95$ $t = 16°$), ossia gr. 0,031238.

Cioè su cento parti:

	trovato			calcolato per $C_{17}H_{15}N_3$
	I	II	III	
Carbonio	78,21	—	—	78,16
Idrogeno	6,21	—	—	5,74
Azoto	—	15,81	15,93	16,09

Se si riscalda questo composto verso 300°, avviene la seguente decomposizione analoga a quella osservata nei casi precedenti:

$$3\,C_{10}H_6\begin{cases}N{=}N.C_6H_4.CH_3\\NH_2\end{cases} = 2\,C_{10}H_6\begin{cases}N\\|\\N\end{cases}\!\!>N.C_6H_4.CH_3 +$$

$$+\,C_{10}H_6\begin{cases}NH_2\\NH_2\end{cases} + C_6H_4\begin{cases}CH_3\\NH_2\end{cases}$$

Digitized by Google

Distillando il prodotto della reazione, si ha una frazione a 190-210°, che è costituita da p-toluidina; infatti ridistillata bolle quasi completamente a 198°, e costituisce una massa bianca cristallina fusibile a 45°.

Gr. 0,1306 di sostanza fornirono cc. 15 di azoto ($H_0 = 723,60$ $t = 12°$), ossia gr. 0,017032.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per C_7H_9N
Azoto	13,04	13,08

Con acetato sodico e anidride acetica in soluzione in acido acetico glaciale, si trasforma in aceto-p-toluide, fusibile a 153°.

Per separare la 1, 2-naftilendiamina dal naftilen-n-p-tolil-triazolo fu anche qui versato il residuo rimasto nel pallone e ancor fuso, nell'alcool: si precipitò il triazolo, che vi è poco solubile, e rimase sciolta la diamina, che venne analizzata allo stato di solfato.

I. gr. 0,2366 di sostanza fornirono gr. 0,1339 di solfato di bario, corrispondenti a gr. 0,056251 di acido solforico.

II. gr. 0,2288 di sostanza fornirono gr. 0,1263 di solfato di bario, corrispondenti a gr. 0,053058 di acido solforico.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $(C_{10}H_6N_2H_4)_2H_2SO_4$
	I	II	
H_2SO_4	23,35	23,62	23,67

Il naftilen-n-p-toliltriazolo, separato dalla naftilendiamina, fu cristallizzato dall'alcool in presenza di carbone animale, poi dalla benzina e infine di nuovo dall'alcool, dal quale solvente si separa in forma di finissimi aghi bianchi, fondenti tra 148° e 149°.

I. gr. 0, 1154 di sostanza fornirono gr. 0,3340 di anidride carbonica e gr. 0,0544 di acqua.

II. gr. 0,1792 di sostanza fornirono gr. 0,5143 di anidride carbonica e gr. 0,0860 di acqua.

Digitized by Google

III. gr. 0,1115 di sostanza fornirono cc. 16,1 di azoto ($H_0 = 717{,}73$ $t = 16°$), ossia gr. 0,017881.

IV. gr. 0,1778 di sostanza fornirono cc. 26 di azoto ($H_0 = 728{,}71$ $t = 16°$), ossia gr. 0,029241.

Cioè su cento parti:

	trovato				calcolato per $C_{17}H_{13}N_3$
	I	II	III	IV	
Carbonio	78,93	78,41	—	—	78,76
Idrogeno	5,22	5,33	—	—	5,01
Azoto	—	—	16,03	16,44	16,21

Il naftilen-n-p-toliltriazolo, non ancora descritto, è solubile nella benzina e nella ligroina, meno nell'alcool, molto nell'acido acetico. Nel benzolo e nel solfuro di carbonio si scioglie anche molto a freddo.

Nell'acido solforico concentrato si scioglie con colorazione verde-bruna, e riprecipita per diluizione inalterato. Resiste all'azione del cloruro stannoso e acido cloridrico; il sodio in presenza di alcool lo riduce in modo appena apprezzabile.

Torino. Istituto Chimico della R. Università.
Dicembre 1909.

Relazione intorno alla Memoria del Dottor E. ZAVATTARI intitolata: *I muscoli ioidei dei Sauri in rapporto con i muscoli ioidei degli altri Vertebrati.* Parte seconda.

Il Dott. E. ZAVATTARI presentò all'Accademia la prima parte del suo lavoro nell'anno scorso ed esso ebbe l'onore di essere pubblicato nel volume delle *Memorie* accademiche. Nella seconda parte, che egli ora presenta e che è affidata al nostro esame, espone le conclusioni che si possono trarre dalle precedenti sue ricerche e che si possono dedurre circa l'interpretazione ed al significato dei muscoli ioidei dei Sauri in rapporto con gli stessi muscoli negli altri Vertebrati.

La Memoria è divisa in due capitoli. Nel primo l'A. fa una sintesi completa delle attuali conoscenze che si hanno in-

Digitized by Google

torno ai muscoli ioidei dei Vertebrati, riassumendo poi per ciascuna classe tutti i dati che esistono nelle sparse e numerose pubblicazioni sull'argomento. Notevole è in questa parte della Memoria la grande copia delle notizie utilmente così riunite in un corpo solo e la critica acuta e diligente che l'A. ne fa.

Nel secondo capitolo l'A. considera ciascun muscolo ioideo attraverso a tutto il gruppo dei Vertebrati giungendo all'uomo e mette in evidenza le condizioni speciali ad ogni classe e le modificazioni subìte nella evoluzione delle varie forme. È in particolar modo interessante il contributo che l'A. porta allo studio del muscolo digastrico dei mammiferi, oggetto tutt'ora di molte controversie. Egli fa notare l'importanza di un muscolo stato precedentemente trascurato nei Sauri, dove la sua presenza è quasi costante, vale a dire il muscolo *cervicomandibolare* l'A. considera questo muscolo come il rappresentante e il precursore nei Vertebrati inferiori del muscolo digastrico dei mammiferi.

Il lavoro del dott. E. Zavattari è molto accurato e ricco di dati descrittivi nuovi ed interessanti sopra un difficile punto della miologia comparata dei Vertebrati. La vostra Commissione ne propone la lettura alla Classe, e qualora questa lo approvi, la stampa nei volumi delle *Memorie* accademiche.

Prof. R. Fusari,
L. Camerano, *relatore.*

Relazione intorno al lavoro del Dr. Mario Ponzo: *Studio della localizzazione delle sensazioni cutanee di dolore.*

Col presente lavoro il Dottor M. Ponzo si è proposto di studiare esaurientemente la questione della localizzazione delle sensazioni di dolore pungenti. Questo importante argomento psicologico, propostogli dal Prof. Kiesow, che prese egli stesso parte alle esperienze, non fu trattato precedentemente da alcun altro ricercatore. Si trovano alcuni cenni solo in un lavoro di Szabadföldi e in un opera del Wundt.

L'autore ha sottoposto ad un largo e minuto esame 25 regioni del corpo umano e dai dati ricavati e riportati nelle preziose tabelle, ne ha ricavato l'errore medio di localizzazione che

Digitized by Google

si commette in ciascuna di queste. Speciale attenzione il Dott. Ponzo ha poi rivolto alle direzioni nelle quali vengono commessi gli errori. Nell'ultima parte del suo lavoro egli confronta gli errori di localizzazione delle sensazioni di dolore con quelli che l'autore ha in altro lavoro determinato, delle sensazioni tattili. Dal confronto ne risulta falsa la diffusa credenza che in generale le sensazioni di dolore vengano localizzate male o meno bene delle sensazioni tattili.

I sottoscritti propongono che questo lavoro del Dott. M. Ponzo sia pubblicato nelle *Memorie* dell'Accademia.

Prof. Pio Foà,
A. Mosso, *relatore*.

Relazione intorno alla Memoria presentata dal Prof. E. Martel che ha per titolo: *Contribuzione alla Lichenologia del Piemonte.*

Il lavoro del Prof. Martel consiste in un Catalogo di Licheni che l'A. potè procurarsi da varie parti della nostra regione, le località delle quali sono accuratamente indicate.

Il catalogo è preceduto da una esposizione dello stato della sistematica lichenologica nel Piemonte dal finire del XVIII Secolo sino ai giorni nostri.

Da siffatta esposizione risulta, che gli studi intrapresi e continuati dal 1785 al 1837 per opera di quegli eminenti scienziati che furono Allioni, Bellardi, Balbis, Re, Colla rimasero interrotti sino al 1869, epoca in cui apparve il *Catalogo dei Licheni di Val Sesia* di Baglietto e del compianto abate Carestia.

Eccezion fatta di alcune noterelle poco importanti, i lavori di sistematica lichenologica piemontese cessarono completamente dopo la pubblicazione di quel Catalogo.

Il numero delle specie esaminate e talora descritte dai vari autori accennati è relativamente considerevole, qualora si pensi alla limitazione della superficie da essi sottomessa alle loro ricerche.

Lichenologicamente essi studiarono solo i dintorni di Torino e di Novara e le Valli alpine di Susa e della Sesia.

Digitized by Google

Spinto dal desiderio di allargare la zona delle ricerche e di arricchire il catalogo delle specie dei Licheni Piemontesi il MARTEL oltre a materiali ricavati dalle Valli già studiate, se ne procurò anche dalla *Valle d'Aosta*, dalle Valli ad essa laterali — da quelle della *Stura di Lanzo* e della *Chiusella*. — Alcuni Licheni egli ebbe anche dal *territorio monregalese*.

Il numero delle specie esaminate e notate in questa Memoria sale all'incirca a *250*, e di queste non poche figurano per la prima volta su Cataloghi piemontesi e due di esse anzi sono nuove per la Flora lichenologica generale italiana.

I risultati qui raccolti lasciano nutrire la speranza che il Prof. Martel possa estendere sempre più le sue ricerche onde raggiungere lo scopo che egli si è prefisso di darci una completa idea della vegetazione lichenica del Piemonte.

Il lavoro è condotto con diligenza ed è tale da confortarci a proporvi il suo accoglimento nei volumi delle *Memorie* accademiche.

C. F. PARONA,
O. MATTIROLO, *relatore*.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 2 Gennaio 1910.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: NACCARI, direttore della Classe, SALVADORI, SEGRE, PEANO, JADANZA, FOÀ, GUIDI, FILETI, PARONA, FUSARI e CAMERANO, Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Socio MATTIROLO scusa la sua assenza.

Il Presidente comunica alla Classe che è pervenuto dal Club Alpino Italiano l'annunzio della improvvisa morte del Comm. Avv. Antonio GROBER, Presidente del Club stesso. Il Presidente crede interpretare i sentimenti della Classe inviando le più vive condoglianze alla famiglia, al Club Alpino ed al Consiglio Provinciale di Novara di cui egli era membro da molti anni.

Il Socio JADANZA, a nome anche del Socio NACCARI, legge la relazione intorno alla memoria del Prof. G. BOCCARDI, intitolata: *Passaggi meridiani del pianeta Marte osservati in Torino nella opposizione del 1909.* La relazione favorevole viene approvata all'unanimità e pure con votazione segreta alla unanimità ne è approvata la stampa nei volumi delle *Memorie* accademiche.

Digitized by Google

LETTURE

Relazione intorno alla Memoria del Prof. Giovanni Boccardi, intitolata: *Passaggi meridiani del pianeta Marte osservati nella opposizione del 1909.*

Le determinazioni delle coordinate celesti e del diametro del pianeta Marte quando esso si trova a poca distanza dalla terra sono di una grande importanza. Il Prof. Boccardi ha determinato l'ascensione retta del centro ed il diametro di detto pianeta durante l'opposizione del 1909 mediante i passaggi dei suoi lembi al meridiano.

Ordinariamente le ascensioni rette di Marte si ottengono col metodo differenziale, paragonando cioè i suoi passaggi a quelli di una o due stelle di coordinate vicine. Nello intento di raggiungere maggiore precisione il Boccardi ha osservato un gruppo di stelle disposte in modo che Marte si trovasse nel mezzo della serie, per ascensione retta e declinazione entro $\pm 40^m$ e $\pm 3^o$.

La posizione quasi equatoriale del pianeta ha permesso di adottare per correzione dell'orologio la media di quelle risultanti dalle singole stelle, avendo avuto cura di ridurre le costanti strumentali a 2″ a 3″. Per tal modo ha ottenuto divergenze *Osservazione-Calcolo* quasi costanti da un giorno all'altro nell'istesso periodo di 15 o più giorni. Tali divergenze concordano benissimo con quelle ottenute all'Osservatorio di Nizza Marittima dove è stato adoperato un istrumento di gran lunga migliore del circolo meridiano di Reichenbach dell'Osservatorio di Torino. Esse possono fornire dati di fatto per ritoccare la teoria del pianeta.

Il Prof. Boccardi, oltre aver messo in luce le notevoli correzioni di cui hanno bisogno le ascensioni rette di alcune stelle la cui posizione era ritenuta sicura, ha istituito una serie di

Digitized by Google

esperienze per eliminare la così detta *equazione di splendore* nelle osservazioni dei passaggi di stelle di diversa grandezza.

Il valore ottenuto pel diametro di Marte si avvicina molto a quello determinato con delicate misure eliometriche.

Per le accurate osservazioni e per i molti ed assai plausibili accorgimenti adoperati per dare ai risultati un alto grado di precisione, la Commissione è di parere che la Memoria del Prof. Boccardi possa essere pubblicata nei volumi Accadèmici.

A. Naccari,
N. Jadanza, *relatore*.

Digitized by Google

Adunanza del 16 Gennaio 1910.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: NACCARI, Direttore della Classe, SALVADORI, MOSSO, SPEZIA, SEGRE, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, MATTIROLO, GRASSI, SOMIGLIANA, FUSARI e PARONA che funge da Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Segretario Senatore CAMERANO.

Si legge e si approva l'atto verbale della seduta precedente.

Il Presidente comunica, che la famiglia NEWCOMB ringrazia per le condoglianze inviate in occasione della morte del nostro Socio corrispondente Simone NEWCOMB, e che pure scrisse ringraziando la signora GROBER per le condoglianze inviatele per la morte del compianto suo marito Presidente del Club Alpino italiano.

Il Presidente presenta poi come omaggio dell'autore, Socio straniero Prof. F. R. HELMERT, l'opuscolo: *Die Sechzenhte Allgemeine Konferenz der Internationalen Erdmessung zu London-Cambridge, September 1909.*

Il Socio MATTIROLO offre copia del suo lavoro: *Prove di coltivazione dell'Helianti (" Heliantus decapetalus „ Linn.) detto Scorzonera d'America.*

Il Socio FUSARI presenta in omaggio due sue pubblicazioni: *Su di un'anomalia arteriosa della midolla spinale nell'uomo; Antonio Zincone (Cenni commemorativi)*, e le note seguenti:

A. BOVERO, *Sull'epoca della comparsa delle glandole uterine;*

A. C. BRUNI, *Stato attuale della dottrina dell'istogenesi delle fibre connettive ed elastiche;*

A. CIVALLERI, *L'Ipofisi faringea nell'uomo;*

D. BAIARDI e R. FUSARI, *Discorsi commemorativi, " Giovanni De Lorenzi „.*

Il Socio GRASSI presenta in omaggio la seconda edizione del volume secondo del suo *Corso di Elettrotecnica.*

Presentano in fine per la stampa negli *Atti*:

il Socio GUIDI un lavoro dell'Ing. Gustavo COLONNETTI, *Sulla trattazione grafica della trave continua a momento d'inerzia variabile;*

il Socio FILETI un lavoro del dott. G. PONZIO, *Sulla sostituibilità del nitrogruppo.*

Digitized by Google

LETTURE

Sulla trattazione grafica della trave continua.

Nota dell'Ing. GUSTAVO COLONNETTI.

(Con una Tavola).

1. — Ogni campata di trave continua può idealmente considerarsi come isolata dalle campate adiacenti, purchè ai suoi due estremi si intendano applicate determinate sollecitazioni rispettivamente equivalenti alle azioni che, sulla campata considerata, esercitano le due campate contigue.

Resa così indipendente dal resto della costruzione, la campata in questione va trattata come una trave elastica semplicemente appoggiata agli estremi e sollecitata, in generale, da due diverse categorie di forze: i carichi su di essa direttamente agenti, e le sollecitazioni di estremità testè definite. Per brevità adotteremo la lettera $\mathfrak{U}$ per indicare il primo sistema di forze, la $\mathfrak{P}$ per rappresentare le sollecitazioni del secondo sistema.

Ad entrambe queste categorie di forze corrispondono certe deformazioni elastiche della trave le quali possono sempre determinarsi, in funzione delle sollecitazioni che le producono, mediante i noti procedimenti della teoria dei solidi elastici cimentati a flessione.

In virtù del ben noto principio della sovrapposizione degli effetti, io considererò, nella presente trattazione, le deformazioni effettive della campata generica di una trave continua, come somma algebrica delle deformazioni che la campata stessa, supposta isolata, come sopra si è detto, subirebbe per effetto delle due categorie di sollecitazioni, agenti separatamente ed indipendentemente l'una dall'altra.

E precisamente mi servirò del metodo grafico di Mohr per ricercare le inclinazioni che l'asse geometrico della campata in questione assumerebbe in corrispondenza dei suoi due estremi semplicemente appoggiati, per effetto dei carichi $\mathfrak{U}$ sulla campata stessa direttamente applicati; basta a questo fine ricordare che la curva elastica può sempre costruirsi come curva funi-

Digitized by Google

colare del diagramma delle curvature considerato come diagramma di carico.

Ricorrerò invece alla teoria analitica delle travi inflesse per determinare quali inclinazioni assumerebbe l'asse geometrico stesso, negli stessi suoi estremi, per effetto delle sole sollecitazioni $\mathfrak{P}$ relative alla continuità; basterà a questo scopo osservare che, detto $\mathfrak{M}$ il momento flettente in una sezione generica a distanze x ed x' rispettivamente dagli estremi sinistro e destro supposti semplicemente appoggiati in A ed in B (fig. 1), le inclinazioni α e β delle due tangenti negli estremi stessi alla linea elastica, sulla corda AB, sono espresse in valor assoluto da

$$\alpha = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{\mathfrak{M}x'}{EJ}\,dx'$$

e da

$$\beta = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{\mathfrak{M}x}{EJ}\,dx$$

J ed E essendo, al solito, rispettivamente il momento d'inerzia della sezione generica considerata, ed il modulo di elasticità del materiale di cui la trave è costituita. Supposta pertanto la trave assoggettata alla sola categoria $\mathfrak{P}$ di sollecitazioni e detti $\mathfrak{M}_A$ ed $\mathfrak{M}_B$ i momenti flettenti relativi rispettivamente alle sezioni estreme A e B, il momento $\mathfrak{M}$ nella sezione generica considerata vale:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_A\frac{x'}{l} + \mathfrak{M}_B\frac{x}{l}$$

ed è da riguardarsi come positivo o negativo secondo che nel punto considerato la linea elastica rivolge la sua concavità verso l'alto ovvero verso il basso.

Sostituendo si trova:

$$\alpha = \frac{\mathfrak{M}_A}{l^2}\int_0^l \frac{x'^2}{EJ}\,dx' + \frac{\mathfrak{M}_B}{l^2}\int_0^l \frac{xx'}{EJ}\,dx'$$

$$\beta = \frac{\mathfrak{M}_A}{l^2}\int_0^l \frac{x'x}{EJ}\,dx + \frac{\mathfrak{M}_B}{l^2}\int_0^l \frac{x^2}{EJ}\,dx\,.$$

2. — Ciò premesso, si prenda in considerazione una qualunque terna di appoggi consecutivi della trave, e si indichi

Digitized by Google

con ϵ_r (fig. 2) la tangente trigonometrica dell'angolo formato dalle due corde $C_{r-1}C_r$, C_rC_{r+1}, ossia la differenza fra l'inclinazione all'orizzontale della campata che segue e l'inclinazione della campata che precede l'appoggio C_r (*).

Si indichino poi con γ_r' e γ_r'' i valori assoluti delle inclinazioni delle due tangenti in C_r alle linee elastiche delle campate l_{r-1} ed l_r, sulle corde relative, supposte al solito tali campate provvisoriamente indipendenti fra loro e dalle adiacenti e deformate per effetto dei soli carichi $\mathfrak{U}$ ad esse direttamente applicati.

È evidente allora che, nel ristabilire la continuità primitiva sull'appoggio C_r, ossia nell'applicare alle due campate in questione le sollecitazioni $\mathfrak{P}$ relative alla continuità, debbono svilupparsi, in corrispondenza dei due estremi di trave ivi affacciati, due momenti flettenti eguali ed opposti.

Ed è ancora manifesto che compiuta questa operazione su tutti gli appoggi, l'asse geometrico della trave deve avere in ogni suo punto una tangente unica e ben determinata.

Ne segue che i due estremi di campate affacciati in C_r debbono, per effetto dei momenti che si vengono sviluppando in corrispondenza delle sezioni estreme delle campate stesse, ruotare attorno all'appoggio comune per modo che i loro assi geometrici vi assumano un'unica direzione, che intenderemo determinata dalla sua inclinazione γ_r sulla corda $C_{r-1}C_r$ della campata immediatamente precedente l'appoggio.

Le due rotazioni in questione β_{r-1} ed α_r dovranno adunque soddisfare alle condizioni:

$$\gamma_r = -\gamma_r' - \beta_{r-1}$$

$$\gamma_r = \epsilon_r + \gamma_r'' + \alpha_r$$

dalle quali eliminando γ_r si ricava:

$$\beta_{r-1} + \alpha_r = -(\gamma_r' + \gamma_r'' + \epsilon_r).$$

(*) Si ha

$$\epsilon_r = \frac{y_{r-1} - y_r}{l_r} - \frac{y_r - y_{r-1}}{l_{r-1}}$$

essendo y_r la quota dell'appoggio C_r riferita ad una data orizzontale di base, e contata positivamente verso il basso, ed l_r la distanza orizzontale tra gli appoggi C_r e C_{r+1}.

Digitized by Google

Sostituendo alle rotazioni β_{r-1} ed α_r le loro espressioni in funzione dei momenti incogniti $\mathfrak{M}_{r-1}$, $\mathfrak{M}_r$, $\mathfrak{M}_{r+1}$ sugli appoggi C_{r-1}, C_r, C_{r+1} si trova la relazione:

$$\mathfrak{M}_{r-1} \cdot \frac{1}{l^2_{r-1}} \int_0^{l_{r-1}} \frac{x'_{r-1} x_{r-1}}{EJ} dx_{r-1} + \mathfrak{M}_r \cdot \left[\frac{1}{l^2_{r-1}} \int_0^{l_{r-1}} \frac{x^2_{r-1}}{EJ} dx_{r-1} + \frac{1}{l^2_r} \int_0^{l_r} \frac{x'^2_r}{EJ} dx'_r \right]$$

$$+ \mathfrak{M}_{r+1} \cdot \frac{1}{l^2_r} \int_0^{l_r} \frac{x_r x'_r}{EJ} dx'_r = - (\varphi_r' + \varphi_r'' + \epsilon_r)$$

la quale non differisce da quella a tutti nota sotto il nome di *teorema dei tre momenti*, se non per la particolare forma sotto cui viene qui espresso il termine noto. Detto J_0 un determinato valore arbitrariamente scelto del momento d'inerzia variabile J, porremo d'or innanzi per brevità:

$$\theta_r = \frac{1}{l^2_r} \int_0^{l_r} \frac{J_0}{J} x_r x'_r dx'_r = \frac{1}{l^2_r} \int_0^{l_r} \frac{J_0}{J} x'_r x_r dx_r$$

$$\eta_r = \frac{1}{l^2_r} \int_0^{l_r} \frac{J_0}{J} x^2_r dx_r$$

$$\eta'_r = \frac{1}{l^2_r} \int_0^{l_r} \frac{J_0}{J} x'^2_r dx'_r$$

con che l'equazione dei tre momenti assume la forma caratteristica:

$$\theta_{r-1} \mathfrak{M}_{r-1} + (\eta_{r-1} + \eta'_r) \mathfrak{M}_r + \theta_r \mathfrak{M}_{r+1} = - E J_0 (\varphi_r' + \varphi_r'' + \epsilon_r)$$

la quale si presta assai bene al calcolo grafico.

3. — Disegnata infatti per una campata qualunque la linea le cui ordinate rappresentano in una data scala i valori del rapporto $\frac{J_0}{J}$ (fig. 3), è facile convincersi che il coefficiente θ relativo a quella campata altro non è che il momento centrifugo dell'area, da essa linea racchiusa, rispetto alla verticale degli appoggi che limitano la campata stessa, ridotto alle basi 1, l, l.

I coefficienti η ed η' coincidono poi rispettivamente coi momenti d'inerzia di quell'area rispetto alle verticali dell'appoggio sinistro e dell'appoggio destro, ridotti alla stessa base.

Digitized by Google

Queste grandezze possono adunque essere in ogni caso calcolate per via grafica mediante il sussidio di pochi poligoni funicolari, ogniqualvolta la legge di variazione del momento d'inerzia J non sia tale da suggerire qualche semplificazione ulteriore, ovvero da consigliare, quale più spedito, il calcolo analitico (*).

Calcolati, in un modo o nell'altro, i coefficienti (ed il calcolo basterà farlo per ogni trave una volta per tutte, perchè essi non dipendono dalle condizioni di carico, ma soltanto dalla forma e dimensioni della trave), si procederà al calcolo del termine noto, termine che verrà qui considerato come composto di due parti ben distinte, funzione l'una dei carichi applicati, l'altra dipendente soltanto dai supposti dislivelli degli appoggi.

Tracciato pertanto il diagramma semplice delle curvature, la cui ordinata generica χ (fig. 4) si ottiene moltiplicando l'ordinata corrispondente della superficie semplice dei momenti per $\frac{J_0}{J}$, se ne costruisca la curva funicolare e su di essa si proiettino verticalmente i singoli appoggi $\dots C_{r-1}$, C_r, $C_{r+1} \dots$ rispettivamente nei punti $\dots C'_{r-1}$, C'_r, $C'_{r+1} \dots$

Condotte poi le corde $C'_{r-1}C'_r$, $C'_rC'_{r+1}$ e simili, ogni arco di curva funicolare può considerarsi come linea elastica del corrispondente tronco di trave, purchè lo si consideri come riferito alla corda che lo sottende.

Da ciò segue immediatamente che le inclinazioni delle due corde $C'_{r-1}C'_r$ e $C'_rC'_{r+1}$ sulla direzione della curva funicolare in C'_r saranno rispettivamente eguali a γ'_r ed a γ''_r moltiplicati pel rapporto di affinità:

$$\xi = \frac{EJ_0}{bH} : \lambda$$

(*) In particolare per $J = J_0 = costante$ si trova

$$\theta = \frac{l}{6} \qquad \eta = \eta' = \frac{l}{3}$$

epperò l'equazione dei tre momenti diventa, com'era da prevedersi:

$$l_{r-1}\mathfrak{M}_{r-1} + 2(l_{r-1} + l_r)\mathfrak{M}_r + l_r\mathfrak{M}_{r+1} = -6EJ(\gamma'_r + \gamma''_r + \epsilon_r).$$

Digitized by Google

se con H si indica la distanza polare relativa al diagramma dei momenti flettenti, con b la base di riduzione adottata per le aree del diagramma delle curvature, ed infine con λ la distanza polare prescelta per la costruzione della nuova linea funicolare.

L'inclinazione della corda $C'_{r-1}C'_r$ sulla $C'_r C'_{r+1}$ sarà adunque eguale a

$$\xi(\gamma_r' + \gamma_r'') = \frac{EJ_0}{bH\lambda}(\gamma_r' + \gamma_r'')$$

epperò il segmento ω_r, intercetto sulla retta delle forze dalle due parallele condotte pel polo P a quelle due corde, sarà misurato da

$$\xi(\gamma_r' + \gamma_r'')\lambda = \frac{EJ_0}{bH}(\gamma_r' + \gamma_r'')$$

cioè potrà venire utilizzato per rappresentare il termine $EJ_0(\gamma_r' + \gamma_r'')$ purchè lo si intenda letto nella scala $\frac{1}{bH}$.

Il secondo membro dell'equazione dei tre momenti sarà dunque rappresentato dalla somma del segmento ω_r e di un altro segmento ω_r', il quale nella stessa scala misuri il termine $EJ_0\epsilon_r$.

Dovrà dunque essere:

$$\omega_r' = \frac{EJ_0}{bH}\epsilon_r = \frac{EJ_0}{bH}\left(\frac{y_{r+1} - y_r}{l_r} - \frac{y_r - y_{r-1}}{l_{r-1}}\right).$$

Questa relazione mostra come ω_r' possa anche ottenersi con un procedimento grafico affatto analogo al precedente.

Rappresentati infatti in disegno i singoli appoggi ... C_{r-1}, C_r, C_{r+1} ... nelle loro posizioni relative (fig. 2), eventualmente anche usando una scala per le altezze eguale a ζ volte quella adottata per le lunghezze, si conducano per un punto P' arbitrario le parallele alle rette congiungenti $C_{r-1}C_r$, C_rC_{r+1} e simili, fino ad intersecare una verticale situata a distanza λ' dal centro P'.

I segmenti:

$$\zeta\epsilon_r \cdot \lambda'$$

Digitized by Google

su quella verticale intercetti da due raggi consecutivi, coincideranno cogli ω_r' cercati se

$$\zeta\lambda' = \frac{EJ_0}{bH}$$

cioè se

$$\lambda' = \frac{EJ_0}{bH\zeta}.$$

4. — I momenti incogniti $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots \mathfrak{M}_n$ sono dunque determinati dal sistema di n equazioni:

$$\begin{aligned}
&(\eta_1 + \eta'_1)\mathfrak{M}_1 + \theta_1 \mathfrak{M}_2 = -\omega_1 - \omega'_1 \\
&\theta_1 \mathfrak{M}_1 + (\eta_1 + \eta'_2)\mathfrak{M}_2 + \theta_2 \mathfrak{M}_3 = -\omega_2 - \omega'_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\theta_{n-2}\mathfrak{M}_{n-2} + (\eta_{n-2} + \eta'_{n-1})\mathfrak{M}_{n-1} + \theta_{n-1}\mathfrak{M}_n = -\omega_{n-1} - \omega'_{n-1} \\
&\theta_{n-1}\mathfrak{M}_{n-1} + (\eta_{n-1} + \eta'_n)\mathfrak{M}_n = -\omega_n - \omega'_n
\end{aligned}$$

le cui costanti sono tutte rappresentate da segmenti ormai noti.

Se perciò alle n equazioni si sostituiscono altrettanti diagrammi ad esse corrispondenti, la ricerca dei valori delle incognite $\mathfrak{M}$ potrà eseguirsi mediante i noti procedimenti del calcolo grafico (*).

Sarebbe qui fuor di luogo una trattazione completa di questo argomento. Mi limiterò perciò ad accennare come, rappresentata l'equazione generica dei tre momenti mediante uno schema del tipo di quello della fig. 5, i valori dei momenti incogniti $\mathfrak{M}$ (che in esso schema compaiono come inclinazioni di quelle direzioni le quali si prestano a chiudere lo schema stesso unitamente a tutti gli altri suoi analoghi), possono essere determinati mediante due soli tentativi applicando al caso speciale il metodo di falsa posizione proposto dal Massau (**) per la

(*) M. D'Ocagne, *Calcul graphique et nomographie*. Paris, 1908.

(**) J. Massau, *Note sur la résolution graphique des équations du premier degré*, " Ann. de l'Assoc. des Ingén. sortis des écoles spéciales de Gand „, 1889.

Digitized by Google

risoluzione grafica del sistema generale di n equazioni lineari ad n incognite.

È poi interessante osservare che i segmenti OM_{r-1}, OM_r, OM_{r+1} della fig. 5 rappresentano le incognite $\mathfrak{M}_{r-1}$, $\mathfrak{M}_r$, $\mathfrak{M}_{r+1}$ cercate, nella ordinaria scala dei momenti $\frac{1}{H}$ se la distanza $\delta = OF$ soddisfa alla condizione:

$$1 \cdot \frac{1}{H} = \frac{1}{bH} \cdot \delta$$

cioè se

$$\delta = b.$$

È adunque lecito concludere che la scelta, precedentemente fatta in modo arbitrario, della scala delle lunghezze, di quella dei momenti e della distanza polare λ, non ha influenza alcuna sulla grandezza della distanza δ, per determinare la quale basta conoscere la base b usata per la riduzione delle aree del diagramma delle curvature.

5. — Ordinariamente nella pratica il problema della trave continua si presenta in condizioni tali che il procedimento di calcolo qui indicato può venire notevolmente semplificato.

Così, per esempio, ogni condizione di simmetria nella forma della trave si traduce in una riduzione corrispondente del numero dei poligoni della fig. 3.

La costanza del momento d'inerzia J elimina addirittura quella ricerca e fa coincidere il diagramma delle curvature della fig. 4 colla superficie semplice dei momenti.

L'assenza di dislivelli e di cedimenti degli appoggi annulla tutti i termini ω', epperò rende inutile ogni ricerca ad essi relativa.

Viceversa, questa ricerca può esser fatta da sola ed indipendentemente da quella dei termini ω ogniqualvolta, supposta la costruzione completamente scarica, si intende procedere alla ricerca dei soli sforzi derivanti da dati spostamenti verticali degli appoggi sovrabbondanti.

Senonchè sarebbe inopportuno il voler qui ulteriormente soffermarsi su questi casi particolari. In altro scritto più consono al carattere di un periodico tecnico, io mi riservo di ri-

Digitized by Google

tornare su questo argomento per indicare, con qualche esempio, come le ricerche qui esposte possano prestarsi alla risoluzione di alcuni tra i problemi che più frequentemente si presentano all'ingegnere nella pratica (*).

Torino. Gennaio 1910.

Sulla sostituibilità del nitrogruppo.

Nota di G. PONZIO.

È noto che nei derivati del benzolo il nitrogruppo il quale si trova in posizione *orto* rispetto ad un altro gruppo negativo può facilmente venir sostituto (1) da altri gruppi, come $-NH_2$, $-NHC_6H_5$, ecc.

Così, p. es., l'o-dinitrobenzolo dà con ammoniaca l'o-nitranilina (2):

$$C_6H_4\begin{matrix}NO_2\ (1)\\NO_2\ (2)\end{matrix} \xrightarrow{NH_3} C_6H_4\begin{matrix}NH_2\ (1)\\NO_2\ (2)\end{matrix}$$

con anilina dà nitrodifenilamina (3):

$$C_6H_4\begin{matrix}NO_2\ (1)\\NO_2\ (2)\end{matrix} \xrightarrow{C_6H_5NH_2} C_6H_5.NH.C_6H_4.NO_2$$

(*) Cfr. " Il Politecnico ,, 1910.

(1) Questa proprietà è comunemente detta nella letteratura chimica *mobilità* o *labilità* del nitrogruppo, il quale diventa perciò *mobile* o *labile*. L'espressione è impropria e non ho creduto di adottarla; essa sarebbe invece molto indicata per significare la trasposizione intramolecolare da me recentemente studiata (*Gazz. Chim. 39*, II, 535 e 546 (1909)) e che consiste nel passaggio di un nitrogruppo da un atomo di carbonio alifatico al nucleo benzolico.

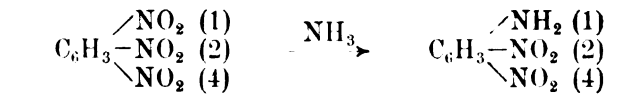
Invece di *sostituibilità* si potrebbe dire *reattività* come ha fatto recentemente G. Senter nel suo lavoro " Reactivity of the Halogens in Organic Compounds „ (*Journ. Chem. Soc. 95*, 1827 (1909)).

(2) Laubenheimer; *Berichte 11*, 1155 (1878).

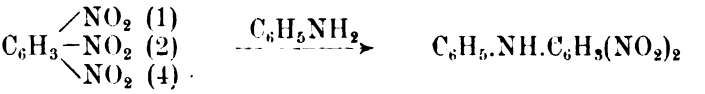
(3) D. R. P. N° 72253, Kl. 22. *Friedländer* III, 46.

Digitized by Google

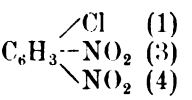
Allo stesso modo il trinitrobenzolo 1, 2, 4 dà con ammoniaca l'1, 2, 4-dinitranilina (1):



con anilina dà dinitrodifenilamina (loc. cit):

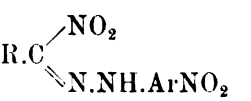


Così pure è sostituibile il nitrogruppo in posizione 3 dell'1-cloro-3, 4-dinitrobenzolo:

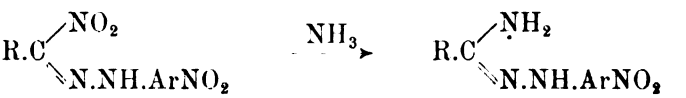


ecc., ecc.

Ora, malgrado la grande differenza di costituzione fra gli ortodinitroderivati del benzolo sopra citati ed i nitroidrazoni delle arilnitroformaldeidi:



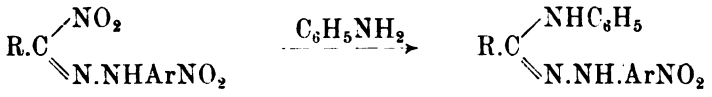
esiste, fra le due serie di composti, una curiosa analogia di comportamento. Ed in realtà, per es., come ho detto prima, mentre l'o-dinitrobenzolo si lascia sostituire un gruppo NO_2 con un gruppo NH_2 dall'ammoniaca, e col gruppo $-NHC_6H_5$ dall'anilina, anche i nitroidrazoni delle arilnitroformaldeidi sono trasformati dall'ammoniaca in idrazidine:



(1) Hepp: *Annalen* 215, 362 (1882).

Digitized by Google

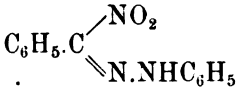
come ho già dimostrato in altre mie Note (1), e dall'anilina nei fenilderivati delle stesse idrazidine, come ora riferirò:



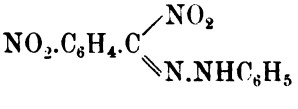
In altre parole, *il nitrogruppo legato all'atomo di carbonio alifatico* (2) *dei nitroidrazoni della arilnitroformaldeidi è sostituibile,* come *è sostituibile il nitrogruppo dei derivati del benzolo che si trova in posizione orto per rispetto ad un altro gruppo negativo.*

Nel caso da me ora trovato la posizione del nitrogruppo nel nucleo benzolico del residuo idrazonico non ha che pochissima influenza sull'andamento della reazione coll'ammoniaca: gli ortoderivati reagiscono soltanto un pò più lentamente dei paraderivati; per contro, come era facile prevedere, il nitrogruppo legato all'atomo di carbonio alifatico non può essere sostituito quando è solo nella molecola, cioè quando, p. es., si tratta di semplici idrazoni.

Infatti l'esperienza mi ha dimostrato che il fenilidrazone della fenilnitroformaldeide:



non reagisce coll'ammoniaca alcoolica, come non reagisce neppure il fenilidrazone della m-nitrofenilnitroformaldeide:



il che significa che non basta che nella molecola vi siano due nitrogruppi, ma occorre che uno di essi sia legato al residuo idrazonico perchè l'altro diventi sostituibile.

---

(1) *Gazz. Chim.* 40, I, (1910).

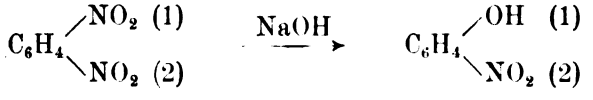
(2) Che sia realmente il nitrogruppo legato all'atomo di carbonio alifatico quello sostituibile col gruppo $-NH_2$ e non quello legato al nucleo benzolico, e che si formino idrazidine e non amidoidrazoni, l'ho già dimostrato nelle mie Note precedenti (loc. cit.) colla formazione dei triazoli e delle acilarilidrazine.

Digitized by Google

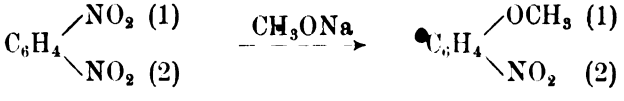
I nitroidrazoni delle arilnitroformaldeidi non sono altro che gli isomeri dei sali di arildiazonio dei dinitroidrocarburi primari e si formano da questi in seguito ad una trasposizione intramolecolare per la quale un nitrogruppo si stacca dall'atomo di carbonio alifatico e passa al nucleo benzolico (1):

ed è interessante osservare come sia precisamente il nitrogruppo che rimane unito all'atomo di carbonio alifatico quello che diventa sostituibile, mentre diventa stabile quello che se ne stacca e passa al nucleo benzolico.

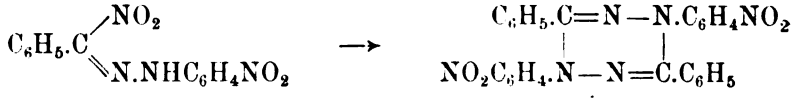
L'analogia fra gli o-dinitroderivati del benzolo ed i nitroidrazoni delle arilnitroformaldeidi, così evidente nel comportamento verso l'ammoniaca e l'anilina, cessa però quando si esamini il comportamento verso gli idrati e gli alcoolati alcalini: anche in questi casi un gruppo NO_2 è eliminato, ma mentre, p. es., l'o-dinitrobenzolo dà con idrato sodico l'o-nitrofenolo (2):



e con metilato sodico dà o-nitroanisolo (3):



il p-nitrofenilidrazone della fenilnitroformaldeide dà sempre di-p-dinitrotetrafeniltetrazolina (4):



(1) *Gazz. Chim. 39*, II, 535 (1909).

(2) Laubenheimer: *Berichte 9*, 1828 (1876).

(3) Lobry de Bruyn: *Rec. Trav. Chim. 13*, 124 (1894).

(4) Bamberger e Grob: *Berichte 34*, 532 (1901) e Ponzio, *Gazz. Chim. 39*, II, 538 (1909).

Digitized by Google

Benzenil-fenil-p-nitrofenilidrazidina $C_6H_5.C(NHC_6H_5)=N.NHC_6H_4NO_2$

Si ottiene riscaldando con anilina il p-nitrofenildrazone della fenilnitroformaldeide $C_6H_5.C(NO_2)=N.NHC_6H_4NO_2$ sospeso in poco alcool assoluto. Quando non vi è più sostanza indisciolta si versa il liquido bruno in acqua acidulata con acido acetico e si cristallizza il prodotto solido dal benzolo.

La *benzenil-fenil-p-nitrofenilidrazidina* $C_6H_5.C(NHC_6H_5)=N.NHC_6H_4NO_2$ si presenta in aghi bruni a riflessi verdi fusibili a 180° 81°. È solubile a caldo e poco a freddo in benzolo, alcool, cloroformio; poco solubile nell'etere; insolubile in ligroina.

I. Gr. 0,2330 di sostanza fornirono gr. 0,5850 di anidride carbonica e gr. 0,1057 di acqua.

II. Gr. 0,0957 di sostanza fornirono cc. 14,3 di azoto ($H_0 = 736{,}099$ $t = 16°$), ossia gr. 0,016206.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per
	I	II	$C_{19}H_{16}N_4O_2$
Carbonio	68,47	—	68,67
Idrogeno	5,04	—	4,81
Azoto	—	16,93	16,86

Benzenil-fenil-o-cloro-p-nitrofenilidrazidina $C_6H_5.C(NHC_6H_5)=N.NH.C_6H_3(Cl)(NO_2)$ Si forma per riscaldamento dell'o-cloro-p-nitrofenilidrazone della fenilnitroformaldeide $C_6H_5.C(NO_2)=N.NH.C_6H_3(Cl)(NO_2)$ con alcool assoluto ed anilina.

Digitized by Google

Cristallizzato dalla ligroina si presenta in aghi rossi, fusibili a 162°.

Gr. 0,0966 di sostanza fornirono cc. 12,7 di azoto ($H_0 = 735{,}815$ $t = 10°$), ossia gr. 0,014785.

Cioè su cento parti:

	trovato	calc. per $C_{19}H_{15}N_4ClO_2$
Azoto	15,30	15,28

È solubile a freddo nell'etere; discretamente a caldo nel benzolo: poco a caldo e pochissimo a freddo in alcool e ligroina.

Torino. Istituto Chimico della R. Università.
Gennaio 1910.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

Digitized by Google

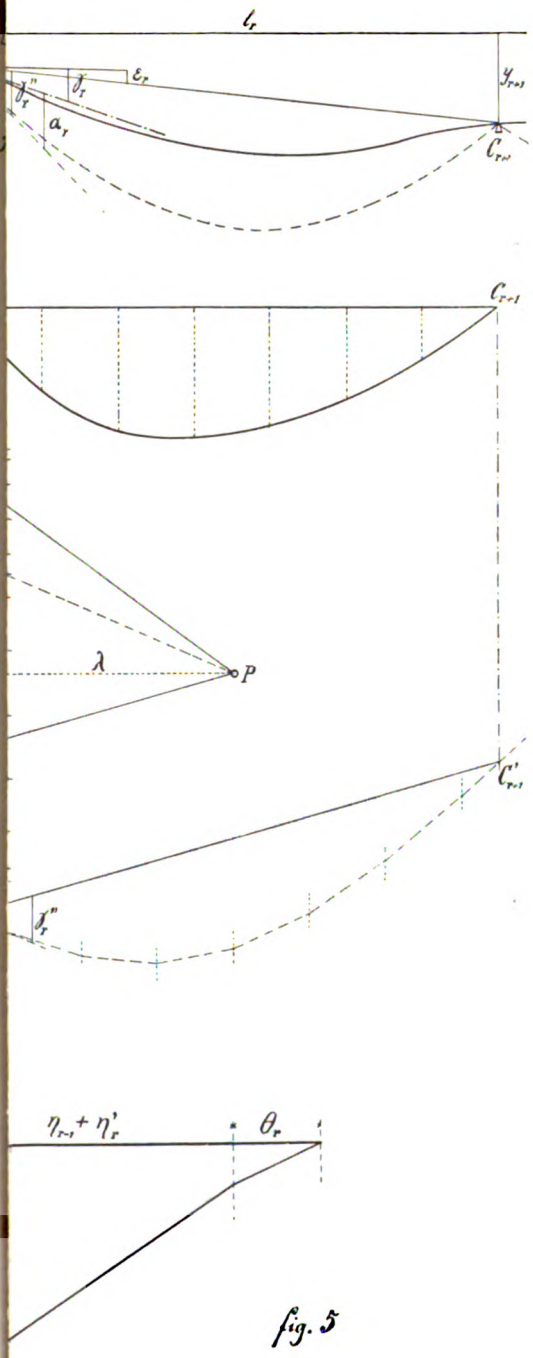


fig. 5

Digitized by Google

13

sil

(H

be

Digitized by Google

PREMII DI FONDAZIONE GAUTIERI

L'Accademia Reale delle Scienze di Torino conferirà nel 1910 un premio di fondazione Gautieri all'opera di Storia politica e civile in senso lato, che sarà giudicata migliore fra quelle pubblicate negli anni 1907-1909. Il premio sarà di L. 2500, e sarà assegnato ad autore italiano (esclusi i membri nazionali residenti e non residenti dell'Accademia) e per opere scritte in italiano.

Gli autori, che desiderano richiamare sulle loro pubblicazioni l'attenzione dell'Accademia, possono inviarle a questa. Essa però non farà restituzione delle opere ricevute.

Digitized by Google

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 30 Gennaio 1910.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: NACCARI, Direttore della Classe. SEGRE, PEANO, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, GRASSI, SOMIGLIANA, FUSARI e PARONA che sostituisce il Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Segretario Senatore CAMERANO.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Socio GUIDI presenta in omaggio la sua memoria: *Prove comparative su travi in betone armato con tondini o con quadretti tipo Jonson* (Estr. da " Il Cemento „, N. 23, An. 1909).

Si presentano per la stampa negli *Atti* i seguenti lavori:

dal Socio PARONA, a nome del Socio CAMERANO: Dr. Serafino DEZANI, *Contributo allo studio della Pepsina*;

dal Socio JADANZA: G. CICCONETTI, *Latitudine astronomica della Specola geodetica della R. Università di Napoli, determinata nel 1909*:

dal Socio PEANO: Tommaso BOGGIO, *Dimostrazione assoluta delle equazioni classiche dell'Idrodinamica*;

dal Socio GUIDI: M. PANETTI, *Teoria e calcolo delle molle discoidali.*

Digitized by Google

LETTURE

Contributo allo studio della Pepsina.

Nota del Dott. SERAFINO DEZANI.

Le cognizioni che noi possediamo sulla natura chimica degli enzimi sono a tutt'oggi sovente rudimentali, quasi sempre incomplete. Le cause di questo fatto si devono forse ricercare nelle grandi difficoltà che s'incontrano nello studio di simili sostanze — potendosi ben di rado averne le quantità necessarie per le opportune ricerche a propria disposizione — e nella mancanza di un criterio, direi, chimico sulla loro purezza. Specialmente poi sulla natura chimica della pepsina le opinioni degli autori sono assai discordi. Alcuni — Brücke (1), Sundberg (2), Hoppenheimer (3) — negano recisamente a questo enzima la natura albuminoidea. Essi si fondano sul fatto di avere potuto ottenere soluzioni dell'enzima, le quali, pur essendo dotate di forte attività proteolitica, non davano più reazione alcuna degli albuminoidi. Sundberg da queste soluzioni per aggiunta di alcool ebbe un precipitato il quale conteneva azoto. Anche l'Hoppenheimer sostiene di aver isolato la pepsina allo stato solido e di averne preparate soluzioni anche concentrate, le quali tuttavia non rispondevano in modo alcuno alle reazioni dei composti proteici: il preparato da lui ottenuto conteneva poche ceneri ed un carboidrato. Mancano però altri dati analitici in proposito e, quello che più importa, dati sull'attività dei prodotti ottenuti, poichè — a mio avviso — la maggiore o minore attività di un fermento è l'unico indice per giudicare della sua

(1) Brücke, *Vorlesungen über Physiologie*. Wien, 1875.
(2) Hoppe Seyler's Zeitschr., IX, p. 319.
(3) Hoppenheimer, *Die Fermente und ihre Wirkungen*. Leipzig, 1900.

Digitized by Google

purezza. Contro questa ipotesi si schierano risolutamente il Gautier (1), la Schoumow (2), il Nencki (3) ed il Pekelharing (4). Per questi autori è fuori dubbio che la pepsina sia una sostanza di natura proteica e che essa appartenga anzi alla categoria degli albuminoidi più complessi.

Il Nencki concepisce la molecola pepsinica come costituita da un nucleo o centro principale, attorno al quale esistono altri nuclei o centri minori di secondo e terzo ordine, ecc. Il centro principale sarebbe costituito da un nucleoproteide, da un'albumose, da lecitina e da acido cloridrico, mentre i prodotti di scissione di questi corpi (*basi allossuriche, pentosio, acidi grassi, acido fosforico, neurina*) costituirebbero i centri secondarî e terziarî. A questo modo potrebbe spiegarsi come la pepsina abbia diverse azioni — proteolitica, cagliante, plasteinica — ammettendo che, a seconda del mezzo in cui si trova, possa mettersi in attività una parte funzionale della molecola, mentre le altre parti in quel mezzo rimarrebbero non soppresse ma semplicemente inattive.

A questa ipotesi pare acceda anche il Pekelharing: questi ha isolato dal succo gastrico del cane una pepsina assolutamente esente da fosforo; pepsina che nel nostro laboratorio si è pure avuta dal succo ottenuto dalla mucosa gastrica del maiale mediante pressione (5).

Non potrebbero però questi ultimi prodotti rappresentare precisamente il nucleo centrale del Nencki? E non potrebbe anche questo nucleo essere identico nella pepsina di tutti gli animali od almeno dei mammiferi? Se questa ipotesi corrisponda alla realtà è cosa che meriterebbe di essere verificata, ed è mia intenzione di farlo per la pepsina del maiale. Poichè, se è logico che la molecola dell'enzima pepsinico di un animale carnivoro debba necessariamente differire in parte da quella di un animale erbivoro in relazione alla diversa nutrizione, nulla ci vieta finora di supporre l'unicità di questo nucleo primario.

(1) Gautier, *Cours de Chimie*, T. III, pag. 544.

(2) " Arch. f. exper. Pathol. und Pharmak. „ XXXIII, pag. 336.

(3) " Zeitschr. f. physiol. Chem. „ XXXII, 336.

(4) Ibid., XXII, pag. 234 e XXXV, pag. 8.

(5) P. Giacosa e S. Dezani, *Studi sulla secrezione stomacale*, " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „ vol. XLIV.

Digitized by Google

Ammesso che la pepsina sia una sostanza proteica, non si può però negare la possibilità di ottenerne soluzioni che non diano più le reazioni degli albuminoidi. Ad esempio, già una soluzione 1 : 200.000 della pepsina da noi ottenuta risponde alla precedente condizione; pure 50 cm^3 di quella soluzione hanno in otto ore disciolto gr. 2 di albumina d'uovo coagulata. Non si può quindi stabilire un paragone fra l'attività di un fermento e le reazioni chimiche che esso può dare, poichè — come è noto — queste ultime non sono molto sensibili.

Qui sorge spontanea la domanda: a quale classe di corpi proteici la pepsina appartiene? A questa domanda ho voluto rispondere colle presenti ricerche. Penso che se questo lavoro non fu ancora fatto ne sia causa la difficoltà di procurarsi notevoli quantità dell'enzima. A me, coll'applicazione del nostro metodo, fu, se non facile, tuttavia possibile preparare la quantità di materiale necessario.

A dire il vero, la questione era già stata in parte sfiorata da altri.

Il Nencki, riscaldando rapidamente il succo gastrico del cane, ottenne un coagulo (costituito da un nucleoproteide), un'albumose e lecitina; per idrolisi dal nucleo proteide ebbe basi allossuriche e pentosio. Il Pekelharing esclude però che il coagulo ottenuto in quelle condizioni possa essere considerato come un nucleoproteide anche se esso sia insolubile negli acidi, solubile negli alcali e da esso per idrolisi sia possibile ottenere, accanto a basi puriniche, anche un pentosio. Il coagulo analizzato dal Pekelharing non conteneva fosforo, e tutti i tentativi da lui fatti per isolare l'acido nucleinico andarono falliti.

In questo studio io ho dosato il contenuto della molecola pepsinica in basi essoniche (*Istidina* = *Acido* α. *amido* - β *imidazolpropionico*, *Arginina* = *Acido guanidin.* α. *amidovalerianico*. *Lisina* = *Acido* α. ε. *diamido-capronico*), ed ho ricercati qualitativamente alcuni altri monoamidoacidi. Certo non minore interesse avrebbe presentato la determinazione quantitativa delle basi allossuriche; ma la loro presenza era già stata notata dai suddetti autori, e d'altra parte il loro dosaggio avrebbe richiesto altra rilevante dose di materiale.

A questo punto mi si potrebbe muovere un'obbiezione: rappresenta o può rappresentare la sostanza da me analizzata

Digitized by Google

l'enzima? Già dissi come l'unico criterio per giudicare della purezza di un fermento sia la sua minore o maggiore attività. Ora la pepsina da noi ottenuta è dotata di uno straordinario potere proteolitico. 50 cm^3 di una sua soluzione 1 : 1.000.000 in acqua acidula per acido cloridrico (0,25 %), contenenti quindi gr. 0,00005 di enzima, hanno disciolto in otto ore gr. 1 di albumina d'uovo coagulata. Ancora in soluzioni all'1 : 5.000.000 ed all'1 : 10.000.000 io ho potuto constatare con sicurezza l'azione del fermento!

In due palloncini (N. 1 - N. 2) pongo rispettivamente 50 cm^3 delle due soluzioni precedenti, e vi aggiungo gr. 2 di albumina d'uovo coagulata e triturata secondo le norme della farmacopea degli Stati Uniti. Un pallone (N. 3) che mi serve di controllo, contiene 50 cm^3 di una soluzione di HCl 0,25 % e gr. 2 di albumina. Dopo avere tenuti per 15 ore i tre palloncini in termostato alla temperatura di 50-52°, filtro, e nel filtrato ricerco i prodotti della digestione.

Le reazioni ottenute dai liquidi dei palloncini N. 1 e N. 2 (contenenti rispettivamente gr. 0,00001 e gr. 0,000005 di pepsina) e del pallone N. 3 sono le seguenti:

	Reazione del biureto	Ebollizione	Acido nitrico	Solfato ammonico
Palloncino N. 1	evidentissima	intorbidamento	precipitato	precipitato
» N. 2	»	»	»	»
» N. 3	debole	negativa	inalbamento	inalbamento

Fino a prova contraria quindi io penso che, tra tutti i prodotti finora ottenuti, il nostro sia il più attivo, e che — se non ancora l'enzima puro — esso sia certo quello che all'enzima puro più s'avvicina.

Io non ho poi creduto di sottoporre all'idrolisi la pepsina esente da fosforo, sia perchè solo piccole quantità di essa mi fu dato ottenere (perdendosi nella sua preparazione il 75 % del materiale impiegato), sia perchè (data la piccola quantità dell'elemento "fosforo" contenuto nella molecola pepsinica) i risul-

Digitized by Google

tati non sarebbero stati sostanzialmente diversi da quelli ottenuti analizzando il precipitato prodotto dall'alcool nella soluzione glicerica del succo pressato.

Il processo d'idrolisi e di separazione delle basi essoniche da me seguìto è esattamente quello indicato dal Kossel (1).

Gr. 35 di pepsina secca all'aria (pari a gr. 30,94 di pepsina seccata a peso costante) vengono scaldati all'ebollizione durante 14 ore con gr. 105 di acido solforico conc. e gr. 210 di acqua. Durante l'idrolisi si separa una sostanza bruniccia (*Acido melanoidinico di Schmiedeberg*) che si raccoglie a parte: essa contiene gr. 0,037 di azoto. L'azoto presente nel liquido di idrolisi è di gr. 3,704, per cui N totale = gr. 3,741.

(*Tutti i dosaggi di azoto vennero fatti col metodo di Kieldahl e ripetuti; così che i valori riportati corrispondono tutti alla media di due determinazioni concordanti*).

Dopo neutralizzazione del liquido con acqua di barite si trova che l'N precipitabile dalla barite è di gr. 0.279. Si dosa in seguito su una parte aliquota l'ammoniaca: l'N ammoniacale è = gr. 0,127.

Eliminata poi tutta l'NH_3 con latte di magnesia, il liquido si alcalinizza con acqua di barite; si filtra e si precipita dal filtrato con ac. solforico l'eccesso di barite: l'N, trascinato da questi varî precipitati, ascende a gr. 0,503. Si opera in seguito la precipitazione con solfato argentico dell'istidina e dell'arginina: l'N precipitabile dall'Ag_2SO_4 e dalla $Ba(OH)_2$ e = gr. 0,563, di cui se ne assegnano gr. 0,167 alla frazione istidina e gr. 0,150 alla frazione arginina.

L'istidina venne pesata allo stato di cloridrato, dell'arginina invece venne dosata la quantità di N esistente nella sua soluzione; e ciò perchè il dosaggio di questa base fatto per via polarimetrica dà sempre valori inferiori al reale, e quello per pesata allo stato di nitrato dà sempre valori superiori.

La lisina fu pesata sotto forma di picrato: fatte le opportune correzioni, si ottennero gr. 2,235 di detto sale, corrispondenti a gr. 0,166 di N contenuto nella base: l'N precipitabile dall'acido fosfowolframico era invece di gr. 0,325.

(1) " Zeitschr. f. physiol. Chem. „. XXXI. p. 165.

Digitized by Google

Riassumo nella seguente tabella i risultati ottenuti:

	Azoto in grammi		% dell'Azoto totale		% di sostanza	
Azoto totale	3.741	—	100	—	12.09	—
A) Azoto basico	0.610	—	16.30	—	1.97	—
„ ammoniacale . .	—	0.127	—	3.39	—	0.410
„ dell'istidina . .	—	0.167	—	4.46	—	0.539
„ dell'arginina . .	—	0.150	—	4.00	—	0.484
„ della lisina . . .	—	0.166	—	4.43	—	0.536
B) Azoto non determinato .	3.131	—	83.70	—	10.12	—
„ insolubile . . .	—	0.037	—	0.98	—	—
„ nel precip. baritico	—	0.279	—	7.45	—	—
„ „ magnesico / baritico	—	0.503	—	13.44	—	—
„ „ argentico	—	0.246	—	6.57	—	—
„ „ fosfowolframico	—	0.159	—	4.24	—	—

Se si paragonano i dati di questa tabella con quelli riportati dai vari autori, che analizzarono altre sostanze proteiche sotto lo stesso punto di vista, appare subito una marcata differenza tra la composizione di queste e la composizione della molecola pepsinica. Poichè in tutte le sostanze proteiche note le cifre dell'azoto dovuto alle tre basi essoniche presentano tra di loro notevoli differenze, mentre nella pepsina queste cifre sono presso a poco le stesse.

Il liquido, da cui mediante l'acido fosfowolframico si era separata la lisina, viene ora trattato con acqua di barite fino a forte reazione alcalina: si filtra il precipitato di fosfowolframato e di solfato di bario, e dal filtrato si elimina la barite con acido solforico: si filtra nuovamente ed il filtrato si concentra a piccolo volume. Dopo lungo riposo si separa un precipitato cristallino che si raccoglie su filtro: la concentrazione e la cristallizzazione si ripetono ancora parecchie volte. Le masse cristalline si sciolgono in seguito in alcool bollente e si filtra a

Digitized by Google

caldo: per raffreddamento si separa una sostanza (A) che si raccoglie: il filtrato evaporato a piccolo volume abbandona una seconda sostanza (B).

La (A) ricristallizzata dall'acqua due volte, presenta al microscopio l'aspetto caratteristico della *Tirosina* (*acido p. ossifenil.α.amidopropionico*) e di questa dà pure tutte le reazioni: la quantità ottenuta fu però assai piccola ed appena sufficiente per l'esame qualitativo.

La (B), ricristallizzata pure essa dall'acqua, presenta al microscopio la struttura della *Leucina* (*acido.α.amidoisobutilacetico*). Scaldata cautamente in tubo secco essa sublima, sviluppando un odore assai ingrato. Gr. 0,1296 di sostanza seccata a 105° contengono gr. 0,014 di N.

Calcolato per Leucina	Trovato
N = 10,68	10,80

Le acque madri vengono ora lavorate per la separazione dell'*Acido glutamico — acido α. amidoglutarico* — (saturandole con HCl gassoso e tenendole per due giorni in un miscuglio frigorifero) e dell'*Acido aspartico — acido amidosuccinico* — (trasformandolo in sale di rame): ma le quantità ottenute di questi due mono-amidoacidi fu così piccola che io non ho potuto con sicurezza identificarli.

Da queste ricerche parmi si possa dedurre:

1° *che la pepsina ha veramente natura albuminoidea e che la sua molecola ha una composizione assai complessa;*

2° *che allo stato attuale dei nostri studi non è possibile avvicinarla a qualcuna delle sostanze proteiche note.*

Dal Laboratorio di Materia Medica e Jatrochimica
dell'Università. Torino.

Digitized by Google

Latitudine astronomica della Specola geodetica della R. Università di Napoli determinata nel 1909.

Nota di G. CICCONETTI.

Nel giugno 1909 è stata eseguita una determinazione astronomica di latitudine sulla Specola geodetica della R. Università di Napoli mediante il nuovo Universale di Bamberg recentemente acquistato dal Gabinetto di Geodesia. Questo strumento, del tutto analogo a quelli già forniti dalla stessa Ditta al Gabinetto di Geodesia della R. Università di Padova e all'Istituto Geografico Militare, è a cannocchiale spezzato con un'apertura obbiettiva di 64^{mm}, ha i circoli reiteratori di 27^{cm} di diametro con lettura diretta del doppio secondo sulle rotelle dei microscopi micrometri ed è munito della nuova disposizione a bilancia per lo scarico del peso sui cuscinetti dell'asse orizzontale. L'Universale dopo essere stato assoggettato ad un conveniente esame dei circoli, dei microscopi, delle livelle e dei perni del cannocchiale fu installato verso la fine di maggio sul pilastrino della Specola protetto dal cupolino rotondo al cui centro si riferisce la latitudine determinata. Tralasciando, per brevità, di esporre i buoni risultati dello studio dello strumento, condotto coi soliti metodi, si riporta soltanto, come elemento necessario per le determinazioni eseguite, il valore angolare della parte della livella zenitale che in tre doppie serie di osservazioni compiute il 7 aprile 1909 col comparatore del R. Osservatorio astronomico di Capodimonte alla temperatura media di 12° e con una lunghezza della bolla di 22p circa risultò di

$$1'',009 \qquad 1'',008 \qquad 1'',006.$$

Si ritenne quindi il valor medio di $1'',008$.

Digitized by Google

Il metodo adoperato per la determinazione della latitudine fu quello della misura della distanza zenitale meridiana di molte stelle fondamentali culminanti a sud e a nord a brevi intervalli di tempo.

Le stelle osservate, le cui coordinate apparenti vennero tolte dal *B. A. J. für 1909* furono 76, ripartite in 7 gruppi 5 dei quali di 10 stelle ciascuno, uno di 12 e uno di 14. Le stelle di ogni gruppo si scelsero in modo che l'intervallo di tempo fra due culminazioni consecutive non fosse inferiore a due minuti, necessari per fare le letture, per disporre il cannocchiale alla distanza zenitale voluta e per effettuare, quando occorreva, la inversione del cerchio; d'altra parte si ebbe cura che il tempo occupato da un gruppo non superasse di molto un'ora per allontanare il pericolo di una troppo sensibile variazione dello zenit strumentale durante le osservazioni del gruppo stesso. Fra un gruppo e l'altro si lasciò il tempo necessario alla correzione dello strumento e ad altre eventuali occorrenze. Per quanto riguarda la declinazione delle stelle osservate queste si scelsero in modo che in ogni gruppo venissero osservate metà stelle a nord e metà a sud, che le distanze zenitali meridiane non superassero il limite di 30° e che la somma delle distanze zenitali osservate a nord non differisse molto dalla somma delle distanze zenitali osservate a sud.

Al principio ed alla fine di ogni gruppo ed anche in tempi intermedi veniva determinata la pressione atmosferica ad un barometro Fortin preventivamente comparato ed installato nella camera sottostante alla terrazza della Specola e veniva letta la temperatura atmosferica ad un ottimo termometro di Fuess, di correzioni insensibili, convenientemente sospeso sulla terrazza stessa.

Ecco i gruppi della stelle osservate. Le distanze zenitali meridiane sono dedotte assumendo come valore della latitudine locale 40°.51′.

Digitized by Google

I° Gruppo.

Stelle	Grand.	Asc. retta	Declin.	Dist. zenit. merid. nord	Dist. zenit. merid. sud
		h m	° ′	° ′	° ′
[2 Can. ven.]	5,9	12.11	+ 41.10	0.19	
[6 Can. ven.]	5,3	21	39.31		1.20
[74 Urs. mai.]	5,6	26	58.54	18.03	
24 Comae seq.	5,1	30	18.53		21.58
76 Urs. mai.	6,2	38	63.13	22.22	
8 Draconis	5,2	52	65.56	25.05	
ε Virginis	2,8	58	11.27		29.24
[17 Can. ven.]	6,1	13.06	38.59		1.52
43 Comae	4,2	08	28.20		12.31
[20 Can. ven.]	4,6	13	41.03	0.12	

$$\Sigma z_{nord} - \Sigma z_{sud} = -1°.04'.$$

II° Gruppo.

Stelle	Grand.	Asc. retta	Declin.	Dist. zenit. merid. nord	Dist. zenit. merid. sud
		h m	° ′	° ′	° ′
τ Bootis	4,5	13.43	+ 17.55		22.56
[*i* Draconis]	4,8	49	65.10	24.19	
II Bootis	6,3	57	27.50		13.01
α Draconis	3,4	14.02	64.49	23.58	
d Bootis	4,9	06	25.31		15.20
[ι Bootis]	4,6	13	51.47	10.56	
θ Bootis	3,9	22	52.16	11.25	
ρ Bootis	3,7	28	30.46		10.05
ζ Bootis	3,6	37	14.07		26.44
Gr. 2164	5,8	49	59.40	18.49	

$$\Sigma z_{nord} - \Sigma z_{sud} = +1°.21'.$$

Digitized by Google

III° Gruppo.

Stelle	Grand.	Asc. retta	Declin.	Dist. zenit. merid. nord	Dist. zenit. merid. sud
		h m	° ′ ″	° ′	′ ″
I. H. Urs. min.	5,3	15.14	+ 67.42	26.51	
β Coron. bor.	3,7	24	29.25		11.26
ν' Bootis	4,8	28	41.09	0.18	
α Coron. Bor.	2,2	31	27.01		13.50
[φ Bootis]	5,3	35	40.39		0.12
[γ Coron. bor.]	3,8	39	26.35		14.16
β Serpentis	3,4	42	15.42		25.09
[Gr. 2296)	5,1	56	65.00	14.09	
θ Draconis	3,8	16.00	58.48	17.57	
[φ Herculis]	4,0	06	45.10	4.19	

$$\Sigma z_{nord} - \Sigma z_{sud} = -1^{\circ}.19'.$$

IV° Gruppo.

Stelle	Grand.	Asc. retta	Declin.	Dist. zenit. merid. nord	Dist. zenit. merid. sud
		h m	° ′	° ′	′
[Gr. 2343]	5.8	16.22	+ 55.25	14.34	
β Herculis	2,6	26	21.41		19.10
A Draconis	5.0	28	68.58	28.07	
σ Herculis	4,1	31	42.37	1.46	
η Herculis	3,3	40	39.06		1.45
Gr. 2377	4.9	44	56.37	16.06	
ε Herculis	3,6	57	31.04		9.47
[60 Herculis]	4,9	01	12.52		27.59
ζ Draconis	3.0	09	65.50	24.59	
α Herculis	3.0	11	14.30		26.21

$$\Sigma z_{nord} - \Sigma z_{sud} = +0^{\circ}.30'.$$

Digitized by Google

V° Gruppo.

Stelle	Grand.	Asc. retta	Declin.	Dist. zenit. merid. nord	Dist. zenit. merid. sud
		h m	° ′	° ′	° ′
ι Herculis	3,6	17.37	46.03	5.12	
μ Herculis	3,3	43	27.46		13.05
ξ Draconis	3,6	52	56.53	16.02	
[ξ Herculis]	3,7	54	29.15		11.36
o Herculis	3,8	18.04	28.45		12.06
[Gr. 2533]	5,6	13	42.08	1.17	
109 Herculis	3,9	20	21.44		19.07
b Draconis	5,1	23	58.45	17.54	
α Lyrae	1,0	34	38.42		2.09
[Gr. 2640]	6,2	36	65.24	24.33	
110 Herculis	4,1	42	20.28		20.23
β Lyrae	4,3	47	33.15		7.36
o Draconis	4,6	50	59.17	18.26	
R Lyrae	4,5	53	43.49	2.58	

$$\Sigma z_{nord} - \Sigma z_{sud} = -0°.20'.$$

VI° Gruppo.

Stelle	Grand.	Asc. retta	Declin.	Dist. zenit. merid. nord	Dist. zenit. merid. sud
		h m	° ′	° ′	° ′
θ Lyrae	4,3	19.13	+ 37.58		2.53
χ Cygni	3,8	15	53.12	12.21	
ι Cygni	3,9	27	51.32	10.41	
θ Cygni	4,5	34	50.01	9.10	
[15 Cygni]	5,2	41	37.08		3.43
δ Sagittae	3,8	43	18.19		22.32
ψ Cygni	5,0	53	52.12	11.21	
o¹ Cygni sq.	4,3	20.11	46.28	5.37	
24 Vulpecul	5,7	13	24.23		16.28
γ Cygni	2,3	19	39.58		0.53

$$\Sigma z_{nord} - \Sigma z_{sud} = +1°.41'$$

Digitized by Google

VII° Gruppo.

Stelle	Grand.	Asc. retta	Declin.	Dist. zenit. merid. nord	sud
		h m	° ′		° ′
β Delphini	3,5	20.33	+ 14.17		26.34
α Delphini	3,7	35	15.35		25.16
α Cygni	1,3	38	44.57	4.06	
[6 H. Cephei]	4,5	43	57.15	16.24	
32 Vulpecul.	5,3	51	27.43		13.08
ν Cygni	3,9	54	40.49		0.02
[ξ Cygni]	3,9	21.02	43.34	2.43	
[Gr. 3415]	5,8	09	59.37	18.46	
[τ Cygni]	3,8	11	37.39		3.12
α Cephei	2,5	16	62.12	21.21	
[g Cygni]	5,4	26	46.08	5.17	
74 Cygni	5,1	33	40.00		0.51

$$\Sigma z_{nord} - \Sigma z_{sud} = -0°.26'.$$

Riassumendo

I°	Gruppo	$\Sigma z_{nord} - \Sigma z_{sud} =$	$-1°.04'$
II°	„	„	$+1.21$
III°	„	„	-1.19
IV°	„	„	$+0.30$
V°	„	„	-0.20
VI°	„	„	$+1.41$
VII°	„	„	-0.26
			$+0°.29'$

Il programma delle osservazioni comprendeva quattro notti alternate in ognuna delle quali doveva osservarsi la serie completa dei sette gruppi di stelle reiterando il cerchio verticale di 90° fra una serie e l'altra. Ma le condizioni meteoriche non sempre ottime si opposero al perfetto adempimento del programma e le sere d'osservazione divennero cinque, qualche volta incomplete, e distribuite in un intervallo di dieci giorni come è

Digitized by Google

indicato qui appresso insieme ai gruppi osservati ed ai valori dello zenit strumentale.

Notti d'osservaz.			Gruppi osservati	Zenit strumentale
1909	Giugno	2	(I)-II-III-IV-V-VI	0°
„	„	4	I-II-III-IV-(V)	90
„	„	6	(I)-II	180
„	„	7	(I)-II-III-(IV)-V-(VI)-VII	180
„	„	12	(I)-II-III-IV-V-VI-(VII)	270

Dei gruppi posti fra parentesi non furono osservate tutte le stelle.

Nel 1905 venne determinato l'azimut assoluto del punto trigonometrico di 1° ordine Campanile de' Camaldoli sull'orizzonte del pilastrino d'osservazione (*) sicchè era possibile e facile disporre la linea di mira in meridiano. Questa operazione che nell'applicazione del metodo usato va ripetuta frequentemente, giacchè le stelle di ogni gruppo vanno ripartite in tante coppie consecutive, in ognuna delle quali una stella viene osservata col cerchio ad Est e l'altra col cerchio ad Ovest, può effettuarsi fissando le due letture da farsi al cerchio orizzontale perchè il cannocchiale sia in meridiano nelle due posizioni coniugate. Ma si trovò più spedito stabilire sul parapetto nord della terrazza un collimatore meridiano la cui posizione veniva rettificata ogni giorno, prima di cominciare le osservazioni, mediante la conoscenza dell'azimut de' Camaldoli.

Fissato lo zenit strumentale e nota per ogni stella la distanza zenitale meridiana si notava preventivamente sul registro delle osservazioni la lettura zenitale che doveva farsi per attendere la stella nel campo del cannocchiale in relazione alla posizione del cerchio ed alla culminazione nord o sud della stella considerata. Una volta posto il cannocchiale in posizione di attesa veniva pressochè centrata, se vi era bisogno, la livella zenitale per eliminare l'eventuale necessità di doverla toccare dopo effettuata la collimazione della stella che veniva eseguita

(*) G. Cicconetti, *Determinazione astronomica di azimut eseguita nel 1905 sulla Specola geodetica della R. Università di Napoli.* Napoli, 1906.

Digitized by Google

fra i due fili abbinati orizzontali del reticolo. L'ora dei passaggi si leggeva ad un orologio tascabile regolato a tempo siderale entro il minuto.

Si riporta qui appresso la pagina del registro corrispondente alla osservazione del IV° Gruppo la notte del 12 giugno 1909 omettendo le colonne contenenti i valori osservati che conducono a quelli dell'ultima colonna.

Asc. retta	Posizione del Cerchio	Stelle		Lettura zenitale	Lettura zenitale osservata
h m				° ′ ″	° ′ ″
16.22	E	[Gr. 2343]	5,8	284.34	284.38.24,8
26	O	β Herculis	2,6	289.10	289.08.53,1
28	O	A Draconis	5,0	241.53	241.52.59,0
31	E	σ Herculis	4,1	271.46	271.46.22,1
40	E	η Herculis	3,3	268.15	268.14.39,7
44	O	Gr. 2377	4,9	253.54	253.54.05,4
57	O	ε Herculis	3,6	279.47	279.46.43,8
17.01	E	[60 Herculis]	4,9	242.01	242.01.22,0
08	E	ζ Draconis	3,0	294.59	294.58.03,8
10	O	α Herculi	3,0	296.21	296.20.23,9

Osservazioni di temperatura e pressione.

$16^h.20^m$	$T = 17°,8$	$B = 757^{mm},75$	$t = 24°,4$
16.35	17,8		
17.12	18,0	757,95	24,4

Il calcolo della latitudine per ciascun gruppo procedeva poi così.

Da precedenti operazioni geodetiche, non definitive, si era determinato come valore assai prossimo della latitudine geodetica del pilastrino 40°50′ 44″.4. Col valore 40°50′ 45″ che dopo le prime determinazioni si rivelò più prossimo al vero e colle declinazioni apparenti delle stelle osservate si calcolavano le zenitali meridiane delle stelle medesime che venivano poi diminuite delle rispettive rifrazioni calcolate in base a quei valori delle zenitali. Si ottenevano così valori assai prossimi delle distanze zenitali meridiane apparenti che combinate colle let-

Digitized by Google

ture zenitali L effettivamente eseguite davano origine ad altrettanti valori Z dello zenit strumentale. La media Z_{m} di questi per ciascun gruppo si assumeva come valore dello zenit strumentale durante le osservazioni del gruppo stesso. Calcolate allora le distanze zenitali meridiane apparenti come differenze fra le singole L e Z_{m} e corrette per la rifrazione, esse combinate coi valori δ delle rispettive declinazioni davano luogo ad altrettanti valori della latitudine locale φ.

Nella Tabella in fine della Nota diamo il calcolo completo relativo al gruppo già considerato.

Per le prime cinque stelle la temperatura atmosferica si è ritenuta di 17°,8 e per le altre cinque di 17°,9. La pressione B_0 si è ottenuta dalla media delle due letture B corrette per la costante, per il dislivello, e ridotte a 0°.

Segue qui appresso il quadro riassuntivo dei valori della latitudine ottenuti dai singoli gruppi nelle diverse notti d'osservazione. È anche riportato il numero delle stelle osservate in ciascun gruppo come peso del valore corrispondente della latitudine per la ricerca del valore finale ed è infine annotato lo zenit strumentale nei vari gruppi per dare un'idea della stabilità dello strumento durante le osservazioni.

Digitized by Google

Data	Gruppi	Latitudine osservata	Stelle osservate	Zenit strumentale
1909 - Giugno 2	I	40°.50'.45",85	7	359°.59'.52".8
" " "	II	45,30	10	51.7
" " "	III	46,36	10	50,1
" " "	IV	45,23	10	52,0
" " "	V	45,16	14	51,0
" " "	VI	44,84	10	51,4
" " 4	I	40.50.44,80	10	89.59.40.6
" " "	II	44,18	10	40,5
" " "	III	44,79	10	42,3
" " "	IV	44,56	10	41,8
" " "	V	45,36	10	42,1
" " 6	I	40.50.45,21	9	179.59.34,2
" " "	II	45,49	10	34,8
" " 7	I	40.50.45,33	9	179.59.33,9
" " "	II	44,79	10	35,3
" " "	III	45,80	10	32,5
" " "	IV	45,22	9	33,9
" " "	V	44,85	14	33,4
" " "	VI	45,79	8	33,4
" " "	VII	44,81	12	33,0
" " 12	I	40.50.44,00	5	269.59.42,3
" " "	II	45,06	10	42,2
" " "	III	45,57	10	43,3
" " "	IV	44,78	10	41,7
" " "	V	45,19	14	41,7
" " "	VI	45,46	10	42,0
" " "	VII	45,80	10	40,9

Dalla media ponderata dei precedenti valori della latitudine si ottiene come valore definitivo

$$\Phi = 40^{\circ}.50'.45'',105 \pm 0'',092 \text{ (errore medio)}$$

risultante da 271 culminazioni di 76 stelle fondamentali all'epoca 1909,43.

Napoli, 11 novembre 1909.

Digitized by Google

$t = 17°,9$

Stelle	ε Herculis	[60 Hercul
δ . . .	$+ 31°.03'.33'',8$	$+ 12°.51'.5$
φ . . .	40.50.45	40.50.4
$z' = \pm\delta \mp$	9.47.11,2	27.58.5
r' . . .	9,7	2
$z' - r'$.	9.47.01,5	27.58.2
L . . .	279.46.43,8	242.01.2
Z . . .	42,3	4
Z . . .	269.59.41,6	269.59.4
L . . .	279.46.43,8	242.01.2
z . . .	9.47.02,1	27.58.1
r . . .	9,71	2
$z + r$ . .	9.47.11,81	27.58.4
δ . . .	31.03.33,80	12.51.5
φ . . .	45,61	4

Digitized by Google

Digitized by Google

Dimostrazione assoluta delle equazioni classiche dell'Idrodinamica.

Nota di TOMMASO BOGGIO.

Lo scopo di questa Nota è di mostrare come, per mezzo della recente teoria delle omografie vettoriali (*), sia possibile stabilire in modo assoluto, ed assai semplice, le equazioni classiche dell'idrodinamica.

Non vi si troverà dunque nulla di nuovo, quanto a risultati; la novità consiste invece nel metodo di dimostrazione, il quale eliminando ogni sorta di coordinate, ed operando quindi direttamente sugli enti geometrico-meccanici che compariscono nell'idrodinamica, permette di vedere, con tutta chiarezza, il concetto informatore che conduce alle varie equazioni idrodinamiche, mentre ciò è assai meno agevole da vedersi attraverso le molteplici coordinate ed equazioni, che sono richieste dalle ordinarie dimostrazioni col metodo cartesiano.

È forse così che si spiega come a Cauchy siano sfuggite le equazioni che furono trovate, solo dopo circa un mezzo secolo, da Helmholtz, benchè il procedimento impiegato da questo autore non differisca da quello seguìto da Cauchy per ottenere le equazioni che portano il suo nome: infatti entrambi gli autori eliminano dalle equazioni del moto, che hanno assunto rispettivamente sotto la forma di Eulero o di Lagrange, le forze di massa (che si suppongono derivare da un potenziale), indi, dopo qualche trasformazione, s'imbattono in una integrazione

(*) Questa teoria è ottimamente esposta, con svariate applicazioni, nell'interessante volumetto *Omografie vettoriali, ecc.* (G. B. Petrini, Torino, 1909) dei Proff. Burali-Forti e Marcolongo. Nelle citazioni, indicherò questo libro con (*O. v.*).

Digitized by Google

rispetto al tempo, la quale, se eseguita, porta alle stesse equazioni; tale integrazione non è però stata effettuata da Helmholtz. E ancora si può osservare che i dettagli di calcolo richiesti per ottenere le equazioni di Cauchy, sono meno semplici di quelli che occorrono per giungere a quelle Helmholtz.

1. Equazioni generali del moto. — Si consideri un fluido, non viscoso, di densità ρ, soggetto all'azione di certe forze di massa; per l'equilibrio del fluido deve essere verificata l'equazione indefinita:

$$\rho \boldsymbol{F} = \operatorname{grad} p ,$$

ove $\boldsymbol{F}$ è il vettore della forza di massa (riferita all'unità di massa) e p è l'intensità della pressione.

Quest'equazione si stabilisce con procedimento semplicissimo (*).

Prendendo la rot di ambi i membri, si ha (*O. c.* pag. 57, [7]):

$$\rho \operatorname{rot} \boldsymbol{F} + \operatorname{grad} \rho \wedge \boldsymbol{F} = 0,$$

onde la condizione per $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{F} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0 .$$

Col principio di D'Alembert si passa poi subito all'equazione del moto, espressa da:

$$\rho \left(\boldsymbol{F} - \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \right) = \operatorname{grad} p ,$$

ove $\boldsymbol{v} = \frac{dP}{dt}$ indica la velocità di una particella fluida P, e $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ la derivata *totale* di $\boldsymbol{v}$, calcolata cioè tenendo conto che $\boldsymbol{v}$ dipende dal tempo t esplicitamente, e anche (implicitamente) pel tramite di P.

(*) Cfr. Burali-Forti e Marcolongo, *Elementi di Calcolo vettoriale, ecc.*, pag. 125 (N. Zanichelli, Bologna, 1909).

Digitized by Google

Si può ancora scrivere:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p\,. \tag{1}$$

Nel caso in cui le forze di massa derivano da un potenziale U, e la densità è funzione della sola pressione (il che avviene certo se la temperatura è costante), posto:

$$\boldsymbol{F} = \mathrm{grad}\,U, \qquad \Pi = U - \int \frac{dp}{\rho}\,, \tag{2}$$

la (1) diventa:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \mathrm{grad}\,\Pi\,. \tag{3}$$

2. Equazioni di continuità. — È molto facile ottenere l'equazione di continuità (*):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0\,,$$

che può anche scriversi (*O. c.* pag. 57, [8]):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{grad}\,\rho \times \boldsymbol{v} + \rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0\,, \tag{4}$$

ove $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ è la derivata *parziale* di ρ, calcolata cioè riguardando P come indipendente da t. La derivata totale di ρ è invece data da:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{d\rho}{dP}\,\frac{dP}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{d\rho}{dP}\,\boldsymbol{v}\,,$$

ma l'ultimo termine vale (*O. c.* pag. 50, [3]): $\mathrm{grad}\,\rho \times \boldsymbol{v}$, perciò si ha dalla (4):

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0\,. \tag{5}$$

(*) Cfr.: *Elementi di Calcolo vettoriale*, pag. 126.

Digitized by Google

Occorre trovare un'altra espressione per l'equazione di continuità. Supponiamo che una certa massa fluida occupi all'istante iniziale t_0 un volume S_0, e diciamo S il volume occupato dalla stessa massa fluida all'istante t. Sia poi P_0 la posizione di una particella fluida in S_0, e P la posizione (in S) della stessa particella al tempo t; diciamo inoltre ρ_0 e ρ le densità in P_0 e P. Poichè la grandezza della massa fluida considerata deve rimanere invariata per tutta la durata del moto (nell'ipotesi che esso avvenga con continuità), si avrà:

$$\int_{S_0} \rho_0 dS_0 = \int_S \rho dS ,$$

ma se si considera l'omografia vettoriale:

$$\alpha = \frac{dP}{dP_0} ,$$

che è di grande importanza per il seguito, e si tiene presente la definizione di invariante terzo di un'omografia (*O. v.* pag. 6), si conclude:

$$dS = (I_3\alpha) dS_0 .$$

e sostituendo si ha subito la nuova forma dell'equazione di continuità:

$$\rho I_3\alpha = \rho_0 . \tag{6}$$

3. Equazione di Eulero. — Per ottenere l'equazione del moto sotto la forma detta di Eulero, bisogna riguardare la velocità v come funzione del punto P e del tempo t, ciò che equivale a determinare lo stato di moto del fluido in un determinato istante e luogo, cioè a determinare la velocità colla quale le varie particelle fluide passano per il punto considerato, nei tempi successivi.

Si ha:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{dv}{dP} v ,$$

Digitized by Google

perciò la (1) diventa:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p\,, \tag{7}$$

che è l'equazione sotto la forma di Eulero (*).

Alla (7) si deve poi associare la (5), oltre che l'equazione caratteristica del fluido. Si hanno così 3 equazioni colle variabili indipendenti P, t, e le tre funzioni incognite $\boldsymbol{v}$, p, ρ.

Se si suppongono verificate le (2), la (7) assume la forma:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\,\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\,\Pi\,. \tag{8}$$

4. Equazione di Lagrange. — Per ottenere l'equazione del moto sotto la forma detta di Lagrange, bisogna riguardare la posizione P, al tempo t, di una determinata particella fluida, come funzione della posizione iniziale P_0, ciò che equivale a determinare il moto di una stessa particella fluida nei tempi successivi.

Occorre dunque trasformare la (1) in guisa da farvi figurare la variabile indipendente P_0. Si ha, per una funzione qualunque f (*O. v.* pag. 52, [8]):

$$\mathrm{grad}_{P_0} f = \mathrm{K}\,\frac{dP}{dP_0}\,\mathrm{grad}_P f\,, \tag{9}$$

(*) Se s è l'arco di traiettoria descritto da P a partire dalla posizione iniziale P_0, si ha $\left(\text{poichè } \mathrm{mod}\,\boldsymbol{v} = \frac{ds}{dt}\right)$:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{d\boldsymbol{v}}{ds}\,\mathrm{mod}\,\boldsymbol{v}\,.$$

quindi la (1) porge:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{d\boldsymbol{v}}{ds}\,\mathrm{mod}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p\,,$$

che è un'altra forma dell'equazione di Eulero.

Se il moto è stazionario $\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = 0\right)$, e si suppongono verificate le (2), si trae subito dall'equazione precedente, moltiplicando scalarmente per dP: $\boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{v} = d\Pi$, da cui, integrando, si ha il teorema di Bernoulli pei moti stazionari.

Digitized by Google

perciò dalla (1) risulta:

$$(10) \qquad K\alpha \frac{dv}{dt} = K\alpha F - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad}_{P_0} p ,$$

che è l'equazione sotto la forma di Lagrange.

Alla (10) si deve poi associare la (6), oltre che l'equazione caratteristica del fluido. Si hanno così 3 equazioni colle variabili indipendenti P_0, t, e le 3 funzioni incognite P, p, ρ.

Se si suppongono verificate le (2), e si ricorda la (9), la equazione (10) assume la forma:

$$(11) \qquad K\alpha \frac{dv}{dt} = \operatorname{grad}_{P_0} \Pi .$$

5. Equazione di Helmholtz. — Alla forma (7) della equazione di Eulero si può dare un'altra espressione, trasformando il secondo termine mediante una nota formola (*O. c.* pag. 56, [4]), e si ha così:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{rot} v \wedge v + \frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2 = F - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p .$$

In tutto ciò che segue, supporremo soddisfatte le (2), perciò l'equazione precedente può ancora scriversi:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{rot} v \wedge v = \operatorname{grad} \left(\Pi - \frac{1}{2} v^2 \right) .$$

Orbene, l'equazione di Helmholtz si ottiene eliminando il grad da quest'equazione; basta, per questo, prendere la rot di ambi i membri e si ha (*O. c.* pag. 58, [11]):

$$\frac{\partial \operatorname{rot} v}{\partial t} + \left(\operatorname{div} v - \frac{dv}{dP} \right) \operatorname{rot} v + \frac{d \operatorname{rot} v}{dP} v = 0 ;$$

sostituendo a $\operatorname{div} v$ il suo valore dato dalla (5), se ne trae:

$$\frac{\partial \operatorname{rot} v}{\partial t} + \frac{d \operatorname{rot} v}{dP} v - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \operatorname{rot} v = \frac{dv}{dP} \operatorname{rot} v ,$$

Digitized by Google

cioè:

$$\frac{d\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}\,,$$

od ancora:

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}}{\rho} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\,\frac{\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}}{\rho}\,. \tag{12}$$

La (12) è l'equazione di Helmholtz, dalla quale egli dedusse i suoi teoremi fondamentali sui movimenti vorticosi.

6. Integrazione dell'equazione di Helmholtz. — La (12) è della forma:

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \beta\boldsymbol{u}\,, \tag{13}$$

ove $\boldsymbol{u}$ è un vettore funzione di t, e β un'omografia pure funzione di t. Quest'equazione si può integrare molto facilmente col noto metodo delle approssimazioni successive, che è stato proposto per primo dal Peano (*), per integrare i sistemi di equazioni differenziali lineari ordinarie, o, ciò che è lo stesso, le equazioni del tipo (13), ove $\boldsymbol{u}$ è un numero complesso d'ordine n funzione di t, e β una sostituzione (od omografia) d'ordine n, pure funzione di t. Con tale procedimento si ottiene come integrale generale della (13) un'espressione del tipo:

$$\boldsymbol{u} = \sigma\boldsymbol{u}_0\,,$$

ove σ è un'omografia (espressa sotto forma di serie), che si riduce all'identità per $t = t_0$, ed $\boldsymbol{u}_0$ è il valore di $\boldsymbol{u}$ per $t = t_0$. Del resto, è pressochè evidente che l'integrazione della (13) porta ad un'espressione del tipo precedente.

(*) Il metodo delle approssimazioni successive è da lungo tempo usato in Astronomia. L'applicazione rigorosa e generale all'integrazione delle equazioni differenziali ordinarie è stata fatta dal Peano nella sua Nota: *Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari* (Atti di questa Accademia, a. 1887). In seguito, il Picard e altri autori ne hanno fatto varie importanti applicazioni nella teoria delle equazioni a derivate parziali. Per altre indicazioni storiche, vedasi Peano, *Formulario Mathematico*, editio V. 1908, pag. 433.

Digitized by Google

Nel caso della (12), la serie fornita dal metodo del Pearo si può sommare facilmente, e si ottiene così, come integrale generale della (12):

$$\frac{\mathrm{rot}_P \boldsymbol{v}}{\rho} = \frac{dP}{dP_0} \frac{\mathrm{rot}_{P_0} \boldsymbol{v}}{\rho_0}, \tag{14}$$

ove P_0, $\boldsymbol{v}_0$, ρ_0 indicano, come nella (6), i valori iniziali di P, $\boldsymbol{v}$, ρ, e $\mathrm{rot}_{P_0}\boldsymbol{v}_0$ il valore iniziale di $\mathrm{rot}_P \boldsymbol{v}$.

Del resto, si verifica subito, in modo diretto, che la (14) è l'integrale generale della (12); infatti prendendo la derivata (totale) rispetto a t, risulta dalla (14):

$$\frac{d}{dt}\frac{\mathrm{rot}_P \boldsymbol{v}}{\rho} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dP_0}\frac{\mathrm{rot}_{P_0}\boldsymbol{v}_0}{\rho_0} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\frac{dP}{dP_0}\frac{\mathrm{rot}_{P_0}\boldsymbol{v}_0}{\rho_0},$$

e, per la (14) stessa, l'ultimo membro è identico al secondo membro della (12). Inoltre per $t = t_0$ l'omografia $\frac{dP}{dP_0}$ diventa l'identità, perciò il primo membro della (14) ha inizialmente, il valore dato $\frac{\mathrm{rot}_{P_0}\boldsymbol{v}_0}{\rho_0}$; c. d. d.

Dalla (14) risulta, fra altro, evidente il teorema di Lagrange sul potenziale di velocità.

7. Equazione di Cauchy. — Per ottenere l'equazione di Cauchy occorre eliminare il grad dall'equazione di Lagrange (11); prendiamo perciò la rot di ambi i membri della (11), ed avremo:

$$\mathrm{rot}_{P_0}\left(\mathrm{K}\alpha\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right) = 0,$$

e poichè (*O. v.* pag. 51, [6]):

$$\mathrm{grad}_{P_0}\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} = \mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{v}}{dP_0}\boldsymbol{v} = \mathrm{K}\frac{d\alpha}{dt}\boldsymbol{v}, \tag{15}$$

si deduce:

$$\mathrm{rot}_{P_0}\left[\mathrm{K}\alpha\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \mathrm{K}\frac{d\alpha}{dt}\boldsymbol{v}\right] = 0,$$

cioè:

$$\frac{d}{dt}\mathrm{rot}_{P_0}(\mathrm{K}\alpha\boldsymbol{v}) = 0.$$

Digitized by Google

Integrando si ha:

$$\text{rot}_{P_0}(\text{K}\alpha\boldsymbol{v}) = \text{rot}_{P_0}\boldsymbol{v}_0 . \tag{16}$$

perchè per $t = t_0$ l'omografia $\text{K}\alpha$ (al pari di α) si riduce alla identità; quest'equazione può ancora trasformarsi, applicando la formola:

$$\text{rot}_{P_0}(\text{K}\alpha\boldsymbol{v}) = (\text{I}_3\alpha)\,\alpha^{-1}\,\text{rot}_P\boldsymbol{v} \quad (*),$$

o meglio quest'altra, che ne è immediata conseguenza:

$$\alpha\,\text{rot}_{P_0}(\text{K}\alpha\boldsymbol{v}) = (\text{I}_3\alpha)\,\text{rot}_P\boldsymbol{v} ,$$

e si ottiene così:

$$(\text{I}_3\alpha)\,\text{rot}_P\boldsymbol{v} = \alpha\,\text{rot}_{P_0}\boldsymbol{v}_0 .$$

che è l'equazione di Cauchy (**).

(*) Questa formola si dimostra molto facilmente: ricordiamo perciò che se $\boldsymbol{u}$ è un vettore funzione del punto P, e si indicano con dP, δP due spostamenti (o incrementi) arbitrari di P, e con $d\boldsymbol{u}$, $\delta\boldsymbol{u}$ i corrispondenti incrementi di $\boldsymbol{u}$, si ha (*Elementi di Calcolo vettoriale*, pag. 66):

$$(a) \quad \text{rot}_P\boldsymbol{u} \times dP \wedge \delta P = d\boldsymbol{u} \times \delta P - \delta\boldsymbol{u} \times dP = d(\boldsymbol{u} \times \delta P) - \delta(\boldsymbol{u} \times dP).$$

Ciò posto, applicando anche un'altra formola (*O. r.* pag. 18, [6]), si conclude:

$$\text{rot}_{P_0}(\text{K}\alpha\boldsymbol{v}) \times dP_0 \wedge \delta P_0 = d(\text{K}\alpha\boldsymbol{v} \times \delta P_0) - \delta(\text{K}\alpha\boldsymbol{v} \times dP_0) = d(\boldsymbol{v} \times \alpha\delta P_0) - \delta(\boldsymbol{v} \times \alpha dP_0) =$$
$$= d(\boldsymbol{v} \times \delta P) - \delta(\boldsymbol{v} \times dP) = \text{rot}_P\boldsymbol{v} \times dP \wedge \delta P = \text{rot}_P\boldsymbol{v} \times \alpha dP_0 \wedge \alpha\delta P_0 ;$$

quest'ultimo membro può scriversi (*O. r.* pag. 18, [8]):

$$\text{rot}_P\boldsymbol{v} \times (\text{I}_3\alpha)\text{K}\alpha^{-1}(dP_0 \wedge \delta P_0), \quad \text{cioè} \quad (\text{I}_3\alpha)(\alpha^{-1}\,\text{rot}_P\boldsymbol{v}) \times dP_0 \wedge \delta P_0 ,$$

e confrontando col primo membro, si ha la formola richiesta.

(**) Dopo la redazione del presente scritto, il Prof. Marcolongo mi ha gentilmente comunicato di aver stabilito anche lui quest'equazione, con dimostrazione assoluta, che, necessariamente, non differisce da quella del testo. Una dimostrazione più semplice delle ordinarie, trovasi già nella Nota del Prof. Burali-Forti: *Sopra alcune operazioni proiettive applicabili nella Meccanica* (Atti di questa Accademia, vol. XLII, a. 1906).

Digitized by Google

Tenendo conto dell'equazione di continuità (6), essa può scriversi:

$$\frac{\mathrm{rot}_P \boldsymbol{v}}{\rho} = \alpha \frac{\mathrm{rot}_{P_0} \boldsymbol{v}_0}{\rho_0},$$

e ritroviamo in tal modo la (14).

Da questa equazione si deducono, con facilità, i noti teoremi sui vortici. Così ad es., per mostrare che le particelle fluide che all'istante t_0 si trovano su una linea vorticosa L_0, si troveranno, ad un altro istante qualunque t, su una linea vorticosa L, osserviamo che per i punti di L_0, il vettore $\mathrm{rot}_{P_0} \boldsymbol{v}_0$ è parallelo a dP_0, perciò:

$$\mathrm{rot}_{P_0} \boldsymbol{v}_0 = h\, dP_0,$$

ove h è un numero reale; l'equazione (14) porge indi:

$$\mathrm{rot}_P \boldsymbol{v} = \frac{\rho h}{\rho_0}\, dP; \text{ c. d. d.}$$

8. Estensione del teorema di Lagrange. — È facile mostrare che la differenza:

$$\boldsymbol{v} \times dP - \boldsymbol{v}_0 \times dP_0 \tag{17}$$

è un differenziale esatto, in ogni punto della massa fluida.

Infatti, la (17) vale:

$$\boldsymbol{v} \times \alpha dP_0 - \boldsymbol{v}_0 \times dP_0,$$

cioè:

$$(\mathrm{K}\alpha \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0) \times dP_0;$$

ora, affinchè tale espressione sia un differenziale esatto, è necessario e sufficiente che l'espressione in parentesi sia il gradiente di un numero, cioè che:

$$\mathrm{rot}_{P_0} (\mathrm{K}\alpha \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0) = 0,$$

la quale eguaglianza è certo verificata, in virtù della (16); c. d. d.

Dalla (17) segue subito, come caso particolare, il teorema di Lagrange sul potenziale di velocità.

Digitized by Google

9. Equazioni di Weber. — Dalla (16) segue che si può porre:

$$K\alpha r - v_0 = \mathrm{grad}_{P_0}\varphi \,, \tag{18}$$

ove φ è una funzione di P_0 e di t, che per $t = t_0$ si riduce evidentemente ad una costante (indipendente da P_0); derivando rispetto a t si ha:

$$K\alpha \frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dP} v = \mathrm{grad}_{P_0} \frac{d\varphi}{dt} \,.$$

cioè, ricordando le (11), (15):

$$\mathrm{grad}_{P_0}\left(\Pi + \frac{1}{2} v^2 - \frac{d\varphi}{dt}\right) = 0 \,.$$

Ne risulta che si può scrivere:

$$\Pi + \frac{1}{2} v^2 - \frac{d\varphi}{dt} = \psi(t) \,,$$

ψ essendo una funzione arbitraria di t; poichè però anche la φ era determinata a meno di una funzione di t, si può includere $\int \psi(t)dt$ nella φ sostituendo φ con $\varphi + \int \psi(t)dt$, in guisa che si può scrivere:

$$\Pi + \frac{1}{2} v^2 = \frac{d\varphi}{dt} \,, \tag{19}$$

ove ora la funzione φ è completamente determinata, a meno di una costante additiva.

Le (18), (19) sono le equazioni di Weber.

10. Superficie vorticose. — Una superficie vorticosa Σ è caratterizzata dalla proprietà di essere tangente in ogni suo punto al vettore rot v relativo a quel punto; in altri termini, se N è un vettore normale a Σ in un suo punto qualunque P, si ha:

$$N \times \mathrm{rot}\, v = 0 \,. \tag{20}$$

Orbene è facile dimostrare che, pur non esistendo il potenziale di velocità, l'espressione $v \times dP$ è un differenziale esatto

Digitized by Google

nei punti della superficie vorticosa Σ, e in essi soltanto (mentre invece non è un differenziale esatto in un campo a tre dimensioni).

Siano infatti dP, δP due spostamenti arbitrari di P (però necessariamente situati sul piano tangente a Σ in P), e supponiamo che:

$$\boldsymbol{v} \times dP = df, \qquad \text{e quindi} \qquad \boldsymbol{v} \times \delta P = \delta f,$$

ove f è una funzione di P; se ne trae:

$$d(\boldsymbol{v} \times \delta P) - \delta(\boldsymbol{v} \times dP) = 0,$$

vale a dire (cfr. la (a) della pag. 9, in nota):

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} \times dP \wedge \delta P = 0,$$

e siccome il vettore $\boldsymbol{N}$ è parallelo a $dP \wedge \delta P$, quest'equazione non differisce dalla (20). E viceversa.

11. Equazione di Clebsch. — Se $\boldsymbol{v}$ è un vettore qualunque funzione del punto P, si possono sempre determinare tre numeri φ, ψ, m, pure funzioni di P, tali che:

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi + m \operatorname{grad} \psi. \tag{21}$$

Infatti dalla (21) si ha intanto:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \operatorname{grad} m \wedge \operatorname{grad} \psi, \tag{22}$$

ora, per stabilire questa formola (*), consideriamo le linee (vorticose) definite dall'equazione: $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} \wedge dP = 0$. Se

$$m = \text{costante}, \qquad \psi = \text{costante}, \tag{23}$$

sono le equazioni di dette linee, il vettore $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ è normale a $\operatorname{grad} m$ e $\operatorname{grad} \psi$, quindi è facile dedurne che esso si può porre

(*) Tale formola è dovuta a Jacobi: cfr. Jacobi: *Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum, etc.* pag. 202 (Crelle's Journal; Bd. 27, a. 1844).

Digitized by Google

sotto la forma (22). Si verifica poi subito per mezzo di una nota formola (*) che la div del secondo membro della (22) è nulla, come è pure nulla quella del primo.

Dopo ciò, dalla (21) si trae:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \Delta\varphi + m\Delta\psi + \operatorname{grad} m \times \operatorname{grad}\psi ,$$

la quale determina la φ.

Così la (21) è dimostrata; e dalla dimostrazione risulta che la decomposizione (21) può farsi in infiniti modi.

Inversamente, data *a priori* la (21), che porge:

$$\boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{P} = d\varphi + m d\psi ,$$

risulta che le superficie definite dalle precedenti equazioni (23) sono superficie vorticose, perchè per i punti di ciascuna di esse l'espressione $\boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{P}$ è un differenziale esatto. Del resto, tale proprietà segue pure subito dalla (22), osservando che se $\boldsymbol{N}$ è un vettore normale, ad es., alla superficie $m =$ costante, allora $\boldsymbol{N}$ è parallelo a $\operatorname{grad} m$, quindi dalla (22) si conclude la (20).

Torino, Gennaio 1910.

(*) *Elementi di Calcolo vettoriale;* pag. 68, (7).

Digitized by Google

Teoria e calcolo delle molle discoidali.

Nota dell'Ing. MODESTO PANETTI.

1. Premesse. — Si dicono discoidali le molle costituite da serie di dischi in lamiera di acciaio, ritagliati in forma di corona circolare e leggermente rialzati a tronco di cono, mantenuti a contatto colle basi maggiori e colle minori alternatamente. Ogni coppia di dischi combacianti lungo i perimetri delle basi maggiori forma un elemento. Parecchi elementi costituiscono la molla, che ha quindi la forma di un mantice rotondo.

Il carico portato dalla molla opera secondo l'asse comune a tutti gli elementi e provoca lo schiacciamento dei dischi, limitato evidentemente alla posizione per la quale, distrutta la conicità, avviene il contatto fra le faccie accostate.

La somma degli appiattimenti dei singoli dischi costituisce la massima freccia disponibile; ben inteso se i limiti di resistenza del materiale non impediscono di raggiungerla. Costruendo quindi i dischi con una conicità così poco accentuata da poterne senza pericolo effettuare l'intero appiattimento, si ottiene per la molla un grado di sicurezza assoluto contro ogni pericolo di rottura, che può in alcuni casi costituire un vantaggio desiderabile, malgrado gli inconvenienti a cui va congiunto.

Le molle discoidali sono usate nelle macchine misuratrici della resistenza all'urto dei metalli (Frémont), e sopratutto nel materiale di artiglieria da fortezza, ove si adoperano correntemente negli affusti e sotto affusti degli obici e dei cannoni, sia come reagenti al rinculo, sia, nei primi, come molle portanti.

La presente Nota ha lo scopo di svolgerne la teoria fondata sul principio di elasticità, non risultando a chi scrive che ne sia già stato fatto lo studio. Dalle formole così dedotte, atte al calcolo numerico, si desumono tabelle di valori rappresentanti il comportamento di queste molle col variare del rapporto fra i raggi esterno ed interno dei dischi. Ne risulta il propor-

Digitized by Google

zionamento più conveniente, che sensibilmente differisce da quello adottato in pratica per tradizione, e sul quale si richiama perciò l'attenzione di chi legge.

2. Ipotesi e grandezze fondamentali. — Per evitare eccessive difficoltà nella trattazione analitica si farà anzitutto astrazione dalla conicità degli elementi, supponendo ogni disco inizialmente piano e libero di deformarsi a foggia di imbuto sotto l'azione del carico.

Tale sostituzione è lecita, poichè, per la piccolezza delle deformazioni elastiche, il sistema scelto come oggetto della teoria si deve considerare in qualunque fase del suo comportamento come una lamina piana a corona circolare, dalla quale si scosta pochissimo anche il disco reale per la sua conicità appena sensibile ed evanescente sotto l'azione del carico.

La seconda ipotesi riguarda la indeformabilità delle fibre normali alle faccie della lamina. Di essa si è discusso nella Nota precedente sulla *Teoria delle piastre tronco-coniche* (*) della quale il presente problema è un caso speciale. Allora si constatò l'attendibilità dell'ipotesi suddetta nel caso delle lamine sottili.

Adottando pertanto gli stessi simboli introdotti in quella Nota indicheremo con

h la grossezza costante di ciascuna piastra;

r ed R i raggi dei suoi contorni interno ed esterno;

$\epsilon = \frac{R}{r}$ il rapporto di tali raggi, dalla cui scelta dipende il proporzionamento della molla;

P il carico uniformemente ripartito lungo il contorno interno e l'equivalente reazione di appoggio contro il lembo esterno;

σ_t le tensioni unitarie normali sugli elementi delle sezioni diametrali della piastra;

σ_r le tensioni unitarie normali sugli elementi delle sezioni cilindriche, condotte lungo circonferenze concentriche ai contorni della piastra.

(*) M. Panetti, " Atti della R. Acc. delle Scienze ,, 5 febbraio 1905.

Digitized by Google

Le σ_t e le σ_r sono funzioni al tempo stesso della distanza x dell'elemento su cui si sviluppano dall'asse della piastra e di quella z dal suo piano medio.

Tensioni tangenziali si sviluppano sulle sole sezioni cilindriche. È però inutile indicarle con un simbolo speciale, poichè non avremo a tenerne conto nelle verifiche della resistenza, e pel rimanente basta conoscerne la risultante per un elemento di sezione cilindrica esteso a tutta la grossezza della piastra e compreso fra 2 sezioni diametrali formanti l'angolo $d\alpha$, che è uguale a

$$\frac{P}{2\pi} d\alpha . \tag{1}$$

3. Posizione e risoluzione del problema. — Si consideri poi l'elemento infinitesimo staccato da 2 sezioni diametrali e da 2 cilindriche infinitamente vicine, e si scriva l'equazione di equilibrio fra i momenti delle tensioni applicate alle 4 sue faccie messe a nudo coi tagli. Come asse dei momenti si scelga quello normale al piano diametrale medio dell'elemento passante pel suo centro.

Risulta allora, nel modo che la Nota sopracitata espone chiaramente per il caso generale, e tenendo presente l'espressione (1), che

$$\int x \frac{\partial \sigma_r}{\partial x} z dz + \int \sigma_r z dz - \int \sigma_t z dz + \frac{P}{2\pi} = 0 , \tag{2}$$

ove gli integrali si intendono estesi a tutta la grossezza della piastra, ossia

$$\text{da } z = -\frac{h}{2} \text{ fino a } z = +\frac{h}{2} .$$

La (2) è l'unica equazione di condizione del problema, se si ammette, come si è dimostrato nell'altra Nota, che, nel caso di piastre piane sottili, le tensioni normali sono proporzionali alle distanze dallo strato medio. In vero in tale ipotesi l'equazione di equilibrio alla traslazione dell'elemento in una qualsiasi direzione della sua giacitura si riduce ad una identità, annullandosi tutti i suoi membri.

Digitized by Google

Data la legge di variazione di σ_t e di σ_r in funzione di z ne segue che lo strato medio della piastra è strato neutro, in quanto i suoi elementi lineari non soffrono nè allungamenti nè contrazioni. Esso si inflette però sotto l'azione del carico secondo una superficie di rivoluzione, la cui linea meridiana avrà in corrispondenza di ogni ascissa x, compresa fra r ed R,

un' ordinata y che assumiamo positiva in senso opposto a z,

una inclinazione $y' = \frac{dy}{dx}$,

ed una curvatura $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$,

dalle quali dipendono gli allungamenti unitari nelle 2 direzioni fondamentali.

L'allungamento unitario nella direzione del raggio, come quello delle fibre di una trave inflessa, è dato da

$$\epsilon_r = zy'' . \tag{3}$$

L'allungamento unitario in direzione periferica è uguale alla dilatazione unitaria del raggio x corrispondente all'elemento; quindi

$$\epsilon_t = \frac{\Delta x}{x} = \frac{zy'}{x} . \tag{4}$$

Utilizzando ora le note relazioni fra tensioni e allungamenti unitari

$$E\epsilon_t = \sigma_t - \frac{1}{m}\sigma_r \qquad E\epsilon_r = \sigma_r - \frac{1}{m}\sigma_t$$

si deducono colle (3) e (4) i valori

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{mE}{m^2-1}\left(\frac{zy'}{x} + mzy''\right) \\ \sigma_t = \frac{mE}{m^2-1}\left(m\frac{zy'}{x} + zy''\right). \end{cases} \tag{5}$$

Digitized by Google

Sostituendoli nella (2) e calcolato il fattore comune dei primi 3 termini

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{1}{12} h^3 ,$$

si ottiene l'equazione differenziale della linea meridiana della lamina

$$\frac{y'}{x} - y'' - xy''' = S , \tag{6}$$

posto per brevità

$$S = \frac{6}{\pi} \frac{m^2 - 1}{m^2 E} \frac{P}{h^3} . \tag{7}$$

L'integrale generale della (6) si deduce da quello della medesima equazione resa omogenea

$$y' = C_1 x + \frac{C_2}{x} \tag{8}$$

col metodo della variazione delle costanti C_1 e C_2. Risulta

$$C_1 = -\frac{S}{2} \lg x + SA \qquad C_2 = \frac{S}{4} x^2 + SB . \tag{9}$$

È facile infatti constatare che, sostituendovi i precedenti valori, la (8) soddisfa identicamente la (6) qualunque siano A e B.

Queste alla lor volta si determinano utilizzando le condizioni della piastra lungo i contorni interno ed esterno. Invero, essendovi essa rispettivamente caricata ed appoggiata senza incastro, vi sarà

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_r z dz = 0 . \tag{10}$$

Ora, come si deduce dalla 1ª delle (5), la condizione precedente equivale a porre per $x = r$ e per $x = R$

$$\frac{y'}{x} + my'' = 0 , \tag{11}$$

Digitized by Google

ciò che corrisponde ad ammettere nulle le tensioni σ_r su tutti gli elementi appartenenti agli orli della piastra. Quest'ultima condizione però, sebbene verificata in questo problema speciale e apparentemente intuitiva, non è in generale conciliabile colle premesse, secondo le quali si ammette la indeformabilità delle fibre normali alle faccie della piastra. Esse conducono semplicemente alla (10) come è stato detto.

Sostituendo nella (11) i valori (8) e (9) ai due limiti sopra indicati si ottengono le costanti

$$(12)\qquad \begin{cases} A = \dfrac{R^2 \lg R - r^2 \lg r}{2(R^2 - r^2)} + \dfrac{1}{4}\,\dfrac{m-1}{m+1} \\ B = \dfrac{m+1}{m-1}\,\dfrac{\lg R - \lg r}{2(R^2 - r^2)}\,R^2 r^2, \end{cases}$$

colle quali il problema analitico riesce interamente risolto.

4. Calcolo della freccia. — Dalle (8) e (9) del precedente paragrafo con una integrazione si ricava l'equazione della linea meridiana in termini finiti a meno di una costante:

$$y = S\left[A\,\frac{x^2}{2} + B \lg x + \frac{1}{4}\,(1 - \lg x)\,x^2\right].$$

Facendo poi la differenza fra i due valori che se ne ottengono colle sostituzioni $x = R$ ed $x = r$, si deduce la freccia di incurvamento di ciascuna piastra sotto l'azione del carico P

$$(13)\qquad \delta = \frac{6}{\pi}\,\frac{m^2-1}{m^2 E}\,\frac{P}{h^3}\left[\frac{1}{8}\,\frac{3m+1}{m+1}\,(\epsilon^2 - 1) + \frac{1}{2}\,\frac{m+1}{m-1}\,\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - 1}\,\lg^2 \epsilon\right] r^2$$

dove si è introdotto per brevità il rapporto dei raggi

$$\epsilon = \frac{R}{r}.$$

Per il calcolo numerico la precedente espressione si può convenientemente sostituire con quest'altra che esprime la *freccia di una molla discoidale composta di* n *piastre*

$$(14)\qquad f = n\left[0{,}55\,(\epsilon^2 - 1) + 8{,}55\,\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - 1}\,\mathrm{Lg}^2 \epsilon\right]\frac{Pr^2}{Eh^3}.$$

Digitized by Google

In essa i fattori numerici sono stati calcolati ponendo il coefficiente di Poisson $\frac{1}{m} = 0{,}3$ e sostituendo ai logaritmi naturali (lg) i decimali (Lg).

5. Calcolo del cimento massimo del materiale. — Sostituendo nelle (5) i valori di y' e di y'' calcolabili cogli elementi del § 3 si deduce dopo alcune trasformazioni

$$(15)\quad \begin{cases} 2\,\frac{m-1}{mES}\,\frac{\sigma_r}{z} = \frac{\lg\epsilon}{\epsilon^2-1}\left(1-\frac{R^2}{x^2}\right)+\lg\frac{R}{x} \\ 2\,\frac{m-1}{mES}\,\frac{\sigma_t}{z} = \frac{m-1}{m+1}+\frac{\lg\epsilon}{\epsilon^2-1}\left(1+\frac{R^2}{x^2}\right)+\lg\frac{R}{x}\,. \end{cases}$$

È facile riconoscere che la prima di queste espressioni si annulla, come erasi preveduto, ai limiti dell'intervallo $x = r$ $x = R$, e diventa massima per

$$(16)\qquad \frac{x}{R} = \sqrt{\frac{2\lg\epsilon}{\epsilon^2-1}}\,.$$

La 2ª invece, da cui dipende σ_t, essendo la sua derivata costantemente negativa, decresce in modo continuo passando dal suo valore massimo

$$(17)\qquad \frac{m-1}{m+1}+2\,\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2-1}\lg\epsilon = 2\,\frac{m-1}{mES}\,\max\sigma_t$$

che si verifica in corrispondenza dell'orlo interno per $x = r$, al valore minimo

$$\frac{m-1}{m+1}+2\,\frac{1}{\epsilon^2-1}\lg\epsilon = 2\,\frac{m-1}{mES}\,\min\sigma_t$$

che ha luogo negli elementi adiacenti al lembo esterno per $x = R$.

Nella scelta del cimento del materiale, in base a cui devesi verificare la resistenza della molla, non vi può dunque essere dubbio che fra la tensione periferica in corrispondenza dell'orlo interno e la tensione radiale in corrispondenza della

Digitized by Google

ascissa x_1 (*) calcolabile colla (16), ove si verifica il suo massimo.

Ora il confronto fra queste due tensioni risulta in modo evidente dai valori registrati nel seguente quadro alle colonne 3ª e 4ª. La 5ª, contenente numeri proporzionali alle tensioni periferiche in corrispondenza del lembo esterno, serve a indicare in qual grado il materiale della piastra venga utilizzato anche lungi dalla regione del massimo cimento, dipendentemente dal rapporto ϵ dei raggi estremi, registrato nella 1ª colonna del quadro. Tale rapporto si è fatto variare fra termini molto discosti non trascurandone il valore speciale 1, pel quale furono calcolati i valori limiti delle espressioni prese in esame.

$\epsilon = \frac{R}{r}$	Valori di $\frac{x_1}{R} = \sqrt{\frac{2 \lg \epsilon}{\epsilon^2 - 1}}$	Massimo valore di $2 \frac{m-1}{mES} \frac{\sigma_r}{z}$	$2 \frac{m-1}{mES} \frac{\sigma_t}{z}$ al perimetro interno	$2 \frac{m-1}{mES} \frac{\sigma_t}{z}$ al perimetro esterno
1	1	0	1,538	1,538
1,2	0,910	0,0089	1,7316	1,3670
1,3	0,872	0,0174	1,8231	1,2985
1,4	0,837	0,0284	1,9125	1,2395
1,5	0,805	0,0408	1,9983	1,1873
2	0,680	0,1172	2,3870	1,0006
3	0,524	0,2834	3,0103	0,8131
4	0,430	0,4367	3,4959	0,7233
5	0,366	0,5715	3,8915	0,6726
6	0,320	0,6907	4,2246	0,6409
8	0,257	0,8915	4,7638	0,6045
10	0,216	1,0573	5,1897	0,5846

Ne risulta:

1° che l'utilizzazione del materiale per tutta l'estensione della piastra è tanto migliore quanto più il rapporto dei raggi

(*) Effettivamente la combinazione delle tensioni radiali colle periferiche dà luogo a tensioni ideali il cui massimo non coincide in posizione con quello delle σ_r; ma potendosi concludere che il cimento più grave di gran lunga è quello periferico all'orlo interno, la ricerca sarebbe priva di importanza.

Digitized by Google

si accosta all'unità, pel quale valore limite il cimento periferico riesce uniforme;

2° che il cimento periferico lungo l'orlo interno è di gran lunga maggiore di quello radiale massimo. Al primo dunque si deve ricorrere per accertare la resistenza della piastra, confrontandolo al carico unitario di sicurezza k come nella formola seguente:

$$(18) \qquad \frac{3}{2\pi}\,\frac{m+1}{m}\left[\frac{m-1}{m+1}+2\,\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2-1}\lg\epsilon\right]\frac{P}{h^2}\leq k\,.$$

Per un *calcolo diretto*, fatte le stesse sostituzioni che servirono a dedurre la (14), si ha

$$(19) \qquad h=\sqrt{\left(0{,}334+2{,}860\,\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2-1}\,\mathrm{Lg}\,\epsilon\right)\frac{P}{k}}\,,$$

colla quale, scelto prima di tutto il rapporto ϵ, si ricaverà la grossezza della piastra. In seguito, sostituendola nella (14) insieme col valore richiesto della freccia f, si dedurrà il raggio del profilo interno r e in seguito quello del contorno esterno $R=\epsilon r$.

È interessante il confronto fra la resistenza della piastra a corona circolare, di cui tratta il presente problema, e la piastra circolare piena nelle identiche condizioni di posa e di carico, sotto l'azione cioè di un peso P ripartito uniformemente lungo la circonferenza di raggio r concentrica al contorno di raggio R.

La formola dedotta dal Grashof per questo secondo caso, scritta coi medesimi simboli della (18) è

$$\frac{3}{2\pi}\,\frac{m+1}{m}\left[\frac{m-1}{m+1}+\frac{m-1}{m}\lg\epsilon\right]\frac{P}{h^2}\leq k\,.$$

Essa fa vedere che il cimento massimo del materiale è più grande, come si intuisce, nel caso della piastra forata. Essendosi calcolato il rapporto W fra le tensioni unitarie massime nei due casi per i differenti valori di ϵ, già presi in esame, risultò che tale rapporto varia poco sensibilmente col modificarsi di ϵ.

Digitized by Google

Il peggioramento delle condizioni statiche di una piastra appoggiata lungo il contorno, pel fatto che da essa viene asportata la parte interna alla circonferenza lungo la quale il carico è ripartito, risulta dai numeri W del seguente quadro:

ϵ	W	ϵ	W	ϵ	W	ϵ	W
1	2,86	1,4	2,47	3	2,30	6	2,35
1,2	2,60	1,5	2,43	4	2,32	8	2,38
1,3	2,53	2	2,33	5	2,34	10	2,41

Il confronto ha lo scopo di confermare la verosimiglianza della (18), la quale, come risulta dalle applicazioni numeriche alle molle usate nella costruzione degli affusti, accusa un cimento elevatissimo sotto l'azione dei carichi coi quali si usa collaudarle.

6. Ricerca del proporzionamento più vantaggioso. — Il calcolo diretto di una molla discoidale richiede che si fissi anzitutto il rapporto ϵ dei raggi esterno ed interno dei suoi elementi.

Importa dunque farne la migliore scelta possibile.

Ora il criterio a cui abitualmente si ricorre consiste nel calcolare per ciascun tipo di molla il rapporto fra il doppio del lavoro di deformazione che essa può sopportare e che è dato dal prodotto del carico P per la freccia f e il volume V di metallo che la costituisce. Esprimendo il quozienze $\frac{fP}{V}$ in funzione delle caratteristiche meccaniche del materiale (k ed E) si trova un coefficiente numerico, che è giustificato considerare come l'indice del grado di perfezione della molla, e che si dice perciò il suo *rapporto caratteristico*.

Questo criterio però, come si può prevedere, non conduce nel caso presente ad alcun risultato pratico. Invero già si è veduto confrontando i numeri scritti nelle 2 ultime colonne della 1ª tabella, proporzionali alle tensioni periferiche sui lembi interno ed esterno, che l'utilizzazione del materiale negli ele-

Digitized by Google

menti di una molla discoidale è tanto migliore quanto più prossimo all'unità è il rapporto ϵ dei raggi.

Evidente adunque che nello stesso senso deve andar crescendo il rapporto caratteristico, come risulta del resto dal prospetto a pagina seguente, e che esso raggiunge il massimo valore nel caso limite di $\epsilon = 1$, privo di applicabilità pratica.

Riesce invece allo scopo la condizione di ottenere il raggio esterno minimo fra quelli delle piastre che sotto un dato carico P consentono una freccia determinata δ. Vi corrisponde *la molla meno ingombrante*, e, nell'ipotesi che il processo tecnologico costringa a gettare nei rifiuti la parte di lamiera corrispondente al foro centrale, si realizzerà pure economia nel materiale occorrente alla fabbricazione.

Ora dalle (14) e (19) insieme combinate, sostituendo nella 1ª ad $f\,n$ la freccia δ di ogni singola piastra risulta

$$R^2 = \sqrt{\frac{PE^2\delta^2}{k^3}} \cdot \frac{\left(0{,}334 + 2{,}860\,\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2-1}\,\mathrm{Lg}\,\epsilon\right)^{3/2}}{0{,}55\,(\epsilon^2-1) + 8{,}55\,\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2-1}\,\mathrm{Lg}^2\epsilon}\,\epsilon^2 .$$

Essa ha servito a calcolare i valori di

$$R\sqrt[4]{\frac{k^3}{PE^2\delta^2}}$$

registrati nell'ultima colonna del prospetto alla pagina seguente, dal quale risulta la legge di variazione di R in funzione di ϵ, nonchè il rapporto ϵ per cui R diventa minimo e i corrispondenti valori del rapporto caratteristico $\frac{E}{k^3}\frac{fP}{V}$.

Risulta che il minimo diametro esterno della molla si verifica per $R\,r$ prossimo a 1,7, il quale si deve quindi considerare come *il più conveniente dei rapporti fra i raggi dei contorni esterno ed interno*, sebbene per una abitudine non giustificata si adottino comunemente valori assai più grandi e precisamente prossimi a 3. Per questi infatti, come si deduce dall'ultima colonna, il diametro esterno riesce più grande del

$$\frac{1{,}869 - 1{,}610}{1{,}610} = 16\,\%\ \text{circa},$$

Digitized by Google

e il peso è più che duplicato, come appare dai rispettivi valori del rapporto caratteristico segnati nella 2ª colonna.

$\epsilon = \frac{R}{r}$	$\frac{E}{k^2}\frac{fP}{V}$	$\sqrt[4]{\frac{k^3}{PE\delta^2}} \cdot R$
1	$\frac{1}{3}$ (*)	∞
1,2	0,242	1,959
1,3	0,235	1,769
1,4	0,212	1,675
1,5	0,197	1,635
1,6	0,177	1,616
1,7	**0,162**	**1,610**
1,8	0,150	1,613
1,9	0,139	1,626
2	0,130	1,668
3	0,075	1,869
4	0,052	2,104

La determinazione precisa del valore di ϵ per cui R è minimo non ha importanza, essendo le variazioni del raggio in quelle vicinanze assai piccole. Si possono quindi scrivere senz'altro le formole di calcolazione della molla discoidale di diametro minimo, deducendole dalla (19) e dalla tabella precedente. Supposti noti il carico P e la freccia f, scelte le caratteristiche k ed E e assunto il numero n delle piastre costituenti la molla si deduce

lo spessore $h = 1{,}162 \sqrt{\frac{P}{k}}$

il diametro esterno $2R = 3{,}22 \sqrt[4]{P \frac{E^2}{k^3} \frac{f^2}{n^2}}$

il diametro interno $2r = 0{,}58 \, . \, 2R.$

Le dimensioni delle molle comunemente usate nella pratica, poste a confronto coi carichi pei quali si collaudano per mezzo

(*) Indipendente dalla scelta del valore del coefficiente di Poisson $\frac{1}{m}$.

Digitized by Google

delle formole desunte nella presente trattazione, dimostrerebbero la possibilità di adottare carichi di sicurezza molto elevati, anche rispetto al materiale eccezionalmente duro col quale si fabbricano. Il fatto si può attribuire sia al genere speciale di sollecitazione di questi sistemi, sia più probabilmente all'estendersi della zona di contatto dal centro verso la periferia a mano a mano che le deformazioni aumentano.

Questo fenomeno secondario viene naturalmente a correggere il difetto di uniformità nella ripartizione del cimento, difetto grave sopra tutto nelle piastre il cui raggio esterno è molto più grande di quello interno.

Ma evidentemente è meglio evitare questo stato anormale di cose col proporzionamento più razionale, che qui si è suggerito.

Il rapporto caratteristico che gli corrisponde, uguale a 0,162, è tuttavia la metà appena di quello delle ordinarie molle di flessione (a balestra); ciò dimostra che, malgrado la scelta più opportuna delle sue proporzioni, il presente tipo di molla non è dal punto di vista meccanico molto perfetto.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

Digitized by Google

CLASSI UNITE

Adunanza del 13 Febbraio 1910.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: NACCARI, Direttore della Classe, SPEZIA, CAMERANO, SEGRE, PEANO, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, PARONA, MATTIROLO, FUSARI. — Scusa l'assenza il Socio FILETI;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: RENIER, PIZZI, RUFFINI, STAMPINI, D'ERCOLE, BRONDI, SFORZA e DE SANCTIS Segretario.

È approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente a Classi Unite, 13 giugno 1909.

Invitato dal Presidente il Socio CAMERANO legge la relazione della 2ª Giunta per il premio Bressa (quadriennio 1905-1908, premio nazionale). — La Giunta presenta all'Accademia in ordine di merito:

1° Il Prof. Ernesto SCHIAPARELLI, per i suoi studi, esplorazioni e scoperte in Egitto e per l'ordinamento scientifico del Museo Egizio di Torino;

2° G. B. RIZZO, per i suoi studi sulla legge di propagazione dei terremoti.

Il Presidente dichiara aperta la discussione, ma nessuno prendendo la parola, si procederà senz'altro al voto nella prossima adunanza del 20 Febbraio.

Digitized by Google

Su invito del Presidente, il Socio D'Ercole legge la relazione della Commissione pel premio Gautieri per la filosofia (triennio 1906-1908). — La Commissione propone che il premio venga conferito al periodico " La Critica „ e per essa ai due principali collaboratori, Benedetto Croce e Giovanni Gentile. Nessuno dei Soci prendendo la parola per fare osservazioni in proposito, anche per il premio Gautieri si voterà senz'altro nella prossima adunanza.

Digitized by Google

Relazione intorno al XVI premio Bressa.

CHIARISSIMI COLLEGHI,

Dalla relazione intorno ai lavori della prima Giunta per il concorso al XVI premio Bressa, che io ebbi l'onore di leggervi nella seduta a classi unite del 2 maggio 1909, risulta che gli autori che la Giunta stessa ritenne degni di essere presi in considerazione per il premio, sono i seguenti:

G. B. RIZZO
ERNESTO SCHIAPARELLI.

Nessun altro nome essendo stato proposto nella seduta anzidetta, si dichiarò chiuso il concorso.

A nome della Giunta stessa vi esporrò i suoi giudizi e le sue proposte.

I lavori del prof. G. B. RIZZO presi in considerazione per il premio sono:

1° *Sulla velocità di propagazione delle onde sismiche del terremoto della Calabria del giorno 8 settembre 1905* (" Memorie Acc. Sc. di Torino „, serie 2ª, LVII, 1906);

2° *Sulla propagazione dei terremoti — Saggio di interpretazione dei diagrammi sismici* (" Atti Acc. Sc. di Torino „, XLII, 1907).

3° *Nuovo contributo allo studio della propagazione dei movimenti sismici* (" Memorie Acc. Sc. di Torino „, serie 2ª, LIX, 1908).

Nei sismogrammi prodotti da un terremoto lontano si distinguono tre serie di oscillazioni. Le prime due sono quelle dei tremiti precursori. Viene ultima la fase principale.

I tre sistemi di ondulazioni si sovrappongono nei sismogrammi degli osservatorii, che non sono abbastanza lontani

Digitized by Google

dall'*epicentro*, vale a dire, dal punto della superficie terrestre che sta immediatamente al di sopra del centro di scuotimento; ma poi, essendo diverse le loro velocità, si separano, e al crescere della distanza dall'epicentro, crescono gli intervalli di tempo che passano fra gli istanti d'arrivo in un dato punto di due fasi successive.

Gli è su questo fatto che sono fondate tutte le regole empiriche, con le quali si deduce dalle registrazioni raccolte in un osservatorio, qual sia la distanza del punto da cui i movimenti provengono. — Si ammette dai più che le ondulazioni spettanti alle due prime fasi non si propaghino lungo la superficie terrestre, ma bensì attraversando la massa interna della terra. — A. Schmidt nel 1888 cercò di spiegare in tal modo il fatto che la velocità di propagazione delle onde sismiche, misurata sulla superficie terrestre lungo un cerchio massimo passante per l'epicentro e per il luogo d'arrivo, va diminuendo, al crescere della distanza, fino ad un certo valore di questa, poi cresce. — Secondo lo Schmidt, i raggi di propagazione degli scotimenti sismici sarebbero curvilinei. — Altri trattarono la questione matematicamente. — Col progredire degli studi e sopratutto col perfezionamento degli apparecchi registratori si venne ad ammettere che la fase principale, che è la terza fra quelle sopra enumerate, si propaghi lungo la superficie; ma per le due prime fasi si ritenne probabile l'ipotesi dello Schmidt.

Il prof. Rizzo, esaminando la legge, secondo la quale gli scotimenti spettanti alle diverse fasi andavano variando al crescere della distanza nel caso del terremoto di Calabria del 1905 e anche in altri terremoti, si convinse, che le diverse fasi erano già separate a tali distanze dall'epicentro, per le quali avrebbero dovuto essere ancora sovrapposte se si fossero propagate attraverso la massa della terra, — Egli osservò inoltre che la legge, la quale lega la velocità alla distanza, era la stessa per tutte tre le fasi.

Per determinare la velocità alle diverse distanze, il professore Rizzo tenne lo stesso metodo dello Schmidt, costruendo le cosiddette linee *odografe*, le cui ascisse sono proporzionali alle distanze e le ordinate rappresentano i tempi. — Questa costruzione grafica dà modo di determinare agevolmente la media velocità fra l'*epicentro* e un punto qualunque e anche la *velocità*

Digitized by Google

vera spettante ad un punto, cioè la velocità con cui il movimento si propaga in vicinanza di quel punto.

Nel caso del terremoto calabrese del 1905 le *velocità vere* delle tre fasi raggiunsero il loro valore minimo a circa 800^m, poi crebbero e andarono accostandosi ad un valore che sembra costante e che fu raggiunto a circa 6000^m dall'epicentro.

I valori limiti rispettivi sarebbero 16.7, 7.6, 4.5 $\frac{\text{Chil.}}{\text{sec.}}$

Col medesimo intento il prof. Rizzo esaminò le osservazioni relative al terremoto di Calabria del 23 ottobre 1907. — Egli potè discutere i sismogrammi di 51 osservatorii.

Egli riconobbe che anche nella fase principale, che è la terza, si possono distinguere tre gruppi di ondulazioni. — Appaiono per prime delle onde di lungo periodo e di piccola ampiezza, poi delle onde molto più ampie, a periodo ancora lungo, e seguono, infine, delle onde rapide, che, per lo più, comprendono le oscillazioni di massima ampiezza.

Il prof. Rizzo, quanto alla fase principale, tenne conto di questi tre gruppi di oscillazioni, sicchè i tempi di cui egli si valse per il calcolo delle velocità sono cinque: quelli dell'arrivo dei due gruppi precursori e quelli dell'arrivo dei tre gruppi testè indicati, spettanti alla fase principale.

Il prof. Rizzo costruì per questi cinque gruppi di scotimenti le curve odografe dello Schmidt e dall'esame di esse trasse la conclusione che tutte quelle serie di ondulazioni si propagano con velocità, che, contate sulla superficie terrestre, variano al variare delle distanze con la medesima legge, e che non vi è dunque ragione di non ammettere che i tremiti precursori si propaghino per la superficie come si ammette per la fase principale.

Secondo il prof. Rizzo, le differenze fra la velocità delle varie fasi provengono da ciò che i primi tremiti sono vibrazioni longitudinali e i secondi sono vibrazioni trasversali parallele all'orizzonte. — Quanto alla fase principale, il prof. Rizzo, pur tenendo conto delle obbiezioni fatte a tale ipotesi, crede probabile che le ondulazioni di quella fase siano effetto di variazioni periodiche dell'inclinazione del suolo.

I lavori ora esaminati del prof. Rizzo sono molto pregevoli. Egli ha fatto un esame diligentissimo dei sismogrammi

Digitized by Google

relativi a due grandi terremoti ed è venuto in una opinione intorno al modo di propagazione delle varie fasi dei moti sismici, la quale trova notevole fondamento nei fatti da lui addotti.

Il prof. Ernesto Schiaparelli, direttore del Museo archeologico di Torino, è da vari anni capo della missione archeologica italiana in Egitto e con grande attività presiede sul luogo ai suoi lavori. — Dei risultati di essa si hanno notizie per opera specialmente di alcuni collaboratori dello Schiaparelli, come il prof. Evaristo Breccia e il prof. Roberto Paribeni, che ne pubblicarono alcune parziali relazioni. Esse, e sopratutto l'esame del materiale rinvenuto dallo Schiaparelli e da lui ordinato nelle sale del Museo Egizio di Torino, concedono di fare un giusto apprezzamento dell'importanza dei trovamenti fatti dalla Missione. Si può affermare che il suo scopo, quello di arricchire il Museo di Torino e di rimetterlo in grado di gareggiare per copia di materiale coi più importanti Musei di antichità egiziane, è stato pienamente raggiunto.

Il prof. Schiaparelli non si è tuttavia limitato a raccogliere oggetti di interesse museografico. I suoi scavi di Assiut fornirono un notevole contributo alla conoscenza dell'Egitto preistorico. — Egli vi scavò, infatti, una necropoli in cui i cadaveri erano sepolti in posizione rattrappita con un rito diverso al tutto da quello dominante nell'età storica. E la suppellettile preistorica da lui trovata colà od acquistata altrove ed esposta nel Museo di Torino è assai importante per lo studio dell'argomento, oggi così controverso, delle relazioni tra la civiltà storica e preistorica dell'Egitto.

A Ghizeh poi, scavando ad oriente della grande piramide di Cheope, il prof. Schiaparelli trovò alcuni monumenti riferibili all'antico impero, tra cui una grande iscrizione concernente un funzionario della IV dinastia. — A Gân (Anteopoli) egli esplorò le tombe della XII e XIII dinastia e rinvenne il sarcofago meraviglioso per bellezza di pitture di un grande sacerdote di Set, che è ora speciale ornamento del Museo di Torino. — Ad Eliopoli fu da lui esplorato un santuario del Sole, ove si trovava una sfinge rappresentante Totmes III.

Digitized by Google

Anche più importante fu la escavazione di quasi ottanta tombe della Valle della Regina in vicinanza del tempio di Medinet-Habu, che fa parte della grande necropoli tebana; fra le quali erano tombe di personaggi di famiglia reale, ricche di rilievi, di iscrizioni e di suppellettile.

In altra parte della necropoli tebana fu ritrovata la tomba dell'ingegnere Kha e della moglie. Molto opportunamente, seguendo l'esempio dato per qualche tomba etrusca dal Milani, lo Schiaparelli ha voluto dare ai visitatori del Museo l'idea precisa di una tomba egiziana, riproducendo in adatto ambiente, il cavo sepolcrale di Kha e disponendo la suppellettile funebre nel modo stesso in cui l'aveva rinvenuta nella tomba.

È pure in special modo da ricordarsi l'opera data dallo Schiaparelli agli scavi di Eschmunèn (Hermopolis magna), coi quali ha contribuito a provvedere i papiri greci che vengono illustrati nella pubblicazione fatta a cura del Comparetti e del Vitelli.

Dall'esame dell'opera compiuta dal prof. Schiaparelli appare che non vi è quasi periodo della storia egiziana dalla età faraonica all'età romana alla cui conoscenza essa non abbia recato qualche notevole contributo.

Il prof. E. Schiaparelli si è reso inoltre grandemente benemerito col pronto e sapiente ordinamento del materiale da lui raccolto nelle sale del Museo archeologico di Torino.

Dopo aver discusso il merito assoluto e relativo dell'opera scientifica presa in considerazione per il premio, la Giunta unanime delibera di presentarvi i nomi dei due Autori sopra menzionati nel seguente ordine di merito:

1° Prof. Ernesto Schiaparelli, *Per i suoi studi, esplorazioni e scoperte in Egitto e per l'ordinamento scientifico del Museo Egizio di Torino.*

2° G. B. Rizzo, *Per i suoi studi sulla legge di propagazione dei terremoti.*

Il Segretario della Giunta
L. Camerano.

Digitized by Google

Relazione intorno al premio Gautieri per la Filosofia.

Illustri Colleghi,

È con animo veramente lieto che la Commissione da voi nominata pel conferimento del Premio Gautieri per la Filosofia nel triennio 1906-1907-1908, avendo assolto il suo compito, ve ne fa la presente *Relazione.*

La lietezza deriva dal progresso assai grande, che nella nostra patria han fatto negli ultimi tempi gli studî filosofici. In virtù del qual progresso, essendo cresciuti l'interesse, il valore e la produttività di essi, è anche cresciuto in proporzione il numero di quelli che possono concorrere al Premio in questo triennio.

E, a spiegare maggiormente il lietissimo fatto, va rilevato che tra i lavori apparsi nel medesimo, non solo ve ne sono di molto importanti, ma che parecchi di essi sono già stati persin premiati da qualche altra nostra Accademia.

Per ciocchè concerne il carattere e l'indirizzo di questi lavori, è bene anche notare che una parte considerevole di essi si riferisce alle grandi quistioni morali e sociali del nostro tempo. Il che mostra alla sua volta un altro fatto importantissimo, che, cioè, la filosofia non si muove più in un campo teorico astratto, ma è già entrata nella stessa corrente della vita pratica e sociale.

È bene, per giunta, di rilevare un altro fatto, che, cioè, l'accennato progresso non è avvenuto soltanto nelle opere, ma anche ne' Periodici di filosofia, che negli ultimi tempi son cresciuti anch'essi di numero, d'importanza e di valore critico e scientifico.

Anzi la Commissione vi riferisce subito che essa vi propone di conferire il Premio proprio ad una pubblicazione periodica filosofica, per un merito speciale e singolare che si è acquistato nel campo de' nostri studî filosofici, e propriamente

Digitized by Google

al Periodico intitolato: " *La Critica*, Rivista di Letteratura, Storia e Filosofia diretta da Benedetto Croce „.

Nel proporvi il Premio per la medesima, aggiunge che questo non deve intendersi conferito all'attività e produttività del solo Direttore B. Croce, ma anche a quella del suo principale Collaboratore, prof. Giovanni Gentile.

E, affinchè la cosa sia più determinatamente intesa e stabilita, la Commissione dichiara di proporvi che il Premio sia conferito, da una parte, al Periodico " La Critica „ pel *generale* movimento filosofico da esso suscitato nella coscienza filosofica italiana, dall'altra, ai lavori *personali* de' due valorosi Collaboratori della " Critica „, non che ad una *serie* di altri lavori, che, congiuntamente ai proprii, sorti per l'iniziativa da essi presa e ispirati e curati per comune opera loro, va sotto il nome di " Classici della Filosofia moderna a cura di B. Croce e G. Gentile „, e si pubblica a Bari da' Librai-Editori Gius. Laterza e Figli.

Quanto al *generale movimento filosofico* suscitato dalla " Critica „, è fuori d'ogni dubitazione, ed è anche generalmente riconosciuto, che le idee filosofiche da essa propugnate e dibattute, versanti su tutto l'ambito teorico e storico della filosofia in genere e della filosofia contemporanea in ispecie, hanno suscitato un interesse vivissimo nella coscienza filosofica italiana. La qual coscienza, mentre dopo i tempi memorabili della filosofia italiana nazionale del Galluppi, del Gioberti e del Rosmini, per ricordarne i nomi maggiori, era decaduta, quasi spenta, e persin dileggiata dalla rimanente coscienza della nazione, è stata, per opera appunto della " Critica „, resa di bel nuovo vivente, militante e popolare. È questo, certamente, un merito grandissimo di essa, derivato dalla comune opera del Croce e del Gentile.

Rispetto al qual merito va, inoltre, messo in rilievo che i dibattimenti vertevano non sul solo campo generale e teorico della filosofia, ma anche su quello pratico, sociale e politico: con che la " Critica „ ha anche fatto entrare il valore e l'azione della filosofia nella corrente, testè mentovata, della vita sociale.

Quanto poi ai lavori *personali* de' due valorosi Collaboratori, il Croce, operante per la filosofia in genere, e più specificamente rappresentante il lato estetico della medesima, ha anche dei lavori filosofici suoi particolari. Accanto alle moltis-

Digitized by Google

sime recensioni, sparse qua e là nella " Critica „, ha anche speciali pubblicazioni filosofiche.

Tra queste meritano di essere ricordate sopratutto due.

La *prima* è quella, sempre ampliata e migliorata con varie edizioni, intitolata: " Estetica come scienza dell'espressione e linguistica generale „. Quest'opera, importante non solo per il lato teorico, ma anche per quello storico, è, tra le produzioni del Croce, forse quella che ha più possentemente contribuito al citato suscitamento della riviviscenza e popolarizzazione della filosofia.

La *seconda* è quella che porta il titolo di: " Ciò che è vivo e ciò che è morto della filosofia di Hegel „. La quale seconda, oltre alla generale trattazione, assai notevole, dell'argomento, è accompagnata da una ricchissima bibliografia intorno all'hegelianismo, la più compiuta apparsa finora.

La Commissione non intende punto di entrare in un esame critico di tutte le idee affermative e negative sì dell'una che dell'altra di queste due pubblicazioni personali del Croce, ma essa ne riconosce in genere la importanza grandissima tanto dal punto di vista critico e teorico, quanto dal punto di vista storico.

Quanto ai lavori *personali* del Gentile, a voi noto e favorevolmente noto, essendosi già parlato e discusso di lui in questa Accademia, egli, oltre alle sue moltissime recensioni, ricorrenti qua e là nella " Critica „, ha in questa una speciale produzione critico-espositiva sotto il titolo di: " La filosofia in Italia dopo il 1850 „. Questa, iniziata fin dal 1903 con gli *Scettici* d'Italia (tra cui notevoli Giuseppe Ferrari e Ausonio Franchi), fu da lui continuata senza interruzione nel triennio del Premio coi *Platonici* maggiori e minori italiani (tra cui Mamiani, Gioberti, Rosmini, Augusto Conti, Luigi Ferri, Bonatelli ed altri), per trattar poi dei *Positivisti* (Carlo Cattaneo, Aristide Gabelli, Pasquale Villari, già pur tutti trattati nel triennio predetto).

Anche questa è senza dubbio un'attività e produzione filosofica, che, pur uscente dal Periodico " La Critica „, ha con questi lavori personali di lui anche contribuito al generale movimento e suscitamento dello spirito filosofico italiano.

Quanto poi, da ultimo, alla mentovata *Serie* dei " Classici della Filosofia moderna „, essa, come è già detto, consiste in

Digitized by Google

opere annotate ed illustrate a cura tanto del Croce quanto del Gentile. A dare una idea della importanza di questa serie, basta citare, cominciando dal glorioso Rinascimento, i nomi dei filosofi che la costituiscono, cioè, Giordano Bruno, Campanella, Bacone, Cartesio, Spinoza, Leibniz, Hobbes, Locke, Vico, Berkeley, Hume, Kant, Herbart, Fichte, Schelling, Hegel.

Basterebbe la ideazione ed esecuzione di questa serie di Classici a rendere benemeriti degli studi filosofici italiani i due ispiratori ed effettuatori di essa. I quali non si sono neppur soltanto limitati alla ispirazione e promozione dell'opera, ma vi han collaborato essi stessi eccellentemente, il Croce con una egregia traduzione dell'Enciclopedia delle scienze filosofiche di Hegel in compendio, e il Gentile con due volumi delle opere italiane e de' dialoghi morali del nostro Bruno.

Dalla lettura di questa *Relazione* avete dunque udito, Illustri Colleghi, che la proposta della Commissione è di conferire il Premio Gautieri per la filosofia al Periodico " La Critica „, e per essa ai due principali Collaboratori Croce e Gentile. Ed è fermamente convinta di aver fatto una proposta buona e giusta.

La Commissione
GIAMPIETRO CHIRONI
FRANCESCO RUFFINI
PASQUALE D'ERCOLE, *relatore.*

Gli Accademici Segretari
LORENZO CAMERANO.
GAETANO DE SANCTIS.

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 13 Febbraio 1910.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: NACCARI, Direttore della Classe, SPEZIA, SEGRE, PEANO, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, MATTIROLO, FUSARI e CAMERANO Segretario.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente.

Scusa l'assenza il Socio FILETI.

Il Presidente comunica la morte del Socio Corrispondente Prof. Federico KOHLRAUSCH avvenuta il 7 gennaio 1910, ed avverte che la Presidenza già ha inviato le condoglianze alla famiglia.

Il Socio JADANZA presenta in omaggio la sua *Storia del Cannocchiale.*

Il Socio PARONA presenta, a nome anche del Comitato geologico italiano, il vol. V, parte 1ª delle Memorie per servire alla descrizione della Carta geologica d'Italia, il quale contiene un suo lavoro intitolato: *La fauna coralligena del cretaceo dei monti d'Ocre nell'Abruzzo Aquilano.*

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le Note seguenti:

1° Prof. F. GIOLITTI e F. CARNEVALI: *Ricerche sulla fabbricazione dell'acciaio cementato:* V. (*Cementazione con gas fortemente compressi*), dal Socio GUIDI;

2° Dott. Mario GHIGLIENO: *Su alcuni nuovi derivati trimetilenpirrolici*, dal Socio GUARESCHI;

3° Leopoldo CHINAGLIA: *Dell'influenza esercitata dalla temperatura sull'apprezzamento di oggetti posti sopra la nostra pelle*, dal Socio FOÀ.

Digitized by Google

LETTURE

Ricerche sulla fabbricazione dell' acciaio cementato. V. (Cementazione con gas fortemente compressi).

Nota di F. GIOLITTI e F. CARNEVALI.

(Con una Tavola).

Lo studio della cementazione eseguita mediante vari gas carburanti, mantenuti a diverse pressioni — uguali od inferiori alla pressione atmosferica ordinaria (1) — ci aveva già permesso di dimostrare che, sia la velocità del processo della cementazione, come la concentrazione del carbonio negli strati cementati, dipendono direttamente dalla pressione del gas carburante: e ci siamo valsi appunto di questa osservazione come di uno dei più validi argomenti per dimostrare come nel processo della cementazione intervenga anche l'azione diretta dei gas, ed in modo speciale dell'ossido di carbonio.

Ora abbiamo potuto iniziare — sulla via tracciata da molte ricerche di officina, condotte con scopi tecnici — una serie di esperienze di laboratorio, eseguite in condizioni ben definite, dirette a stabilire il decorso delle cementazioni eseguite coi gas fortemente compressi.

Le prime esperienze, delle quali riferiamo qui i risultati, comprendono alcune cementazioni di un acciaio dolce ordinario, eseguite con ossido di carbonio in presenza di carbone di legno, sotto pressioni non superiori alle sedici atmosfere.

L'acciaio del quale ci servimmo aveva la seguente composizione:

Carbonio	0,14	%
Manganese	0,80	„
Silicio	0,03	„
Zolfo	0,05	„
Fosforo	0,02	„

(1) V. Giolitti e Carnevali (" Gazz. Chim. It. „, 1908, pag. 309-351).

Digitized by Google

Lo adoperammo sotto forma di cilindretti del diametro di 18 mm. per 120 mm. di lunghezza.

Eseguimmo le cementazioni in un apparecchio rappresentato nelle sue varie parti, in sezione, nelle fig. 1, 2 e 3 qui unite. La fig. 4 (V. Tav.) riproduce una fotografia dell'apparecchio montato ed in funzione.

La costruzione ed il funzionamento dell'apparecchio sono molto semplici e risultano chiaramente dai disegni uniti: talchè basteranno poche parole di spiegazione (1).

Il corpo dell'apparecchio è formato da un recipiente cilindrico d'acciaio fuso, costituito da due metà sovrapposte, adattate l'una all'altra per mezzo di una serie di bolloni a vite, i quali permettono di stringere fortemente l'una contro l'altra le due flangie ben piallate (*C*, *D*, fig. 2), fra le quali si interpone uno strato di carta di amianto imbevuta di olio extra-denso. Alle due estremità il recipiente si prolunga in due appendici, pure esse cilindriche, fornite di flangie piallate, sulle quali si adattano due coperchi *E*, *S* (Fig. 1) tenutivi aderenti ciascuno mediante otto bolloni a vite: la tenuta del gas è ottenuta anche qui mediante uno strato di amianto imbevuto di olio.

Un'appendice cilindrica, identica alle due or ora descritte, esiste nella parte centrale del corpo dell'apparecchio (*E*, Fig. 2): essa è chiusa, in modo identico alle altre due, mediante il disco d'acciaio *H* (Fig. 2). ed il suo asse è inclinato da circa 45° sul piano orizzontale. Vedremo fra breve il suo scopo.

Attraverso ai due coperchi *E* ed *S* (Fig. 1) passano due tubi di rame a piccola luce (*A* e *Q*), mediante due giunti a vite (*B* ed *R*) con guerniture a tenuta di gas. Inoltre il coperchio *E* ha ancora un foro *H*, comunicante — mediante un giunto a premi-stoppa — coll'interno del tubo di porcellana *CD*, formante la custodia per la pinza termoelettrica destinata a misurare la temperatura dell'interno del forno: i due fili di platino e di platino rodiato — isolati l'uno dall'altro mediante i soliti tubetti di porcellana — escono dall'apparecchio appunto attraverso al foro *H*.

(1) Non diamo misure, perchè le figure sono in scala (indicata nelle figure stesse).

Digitized by Google

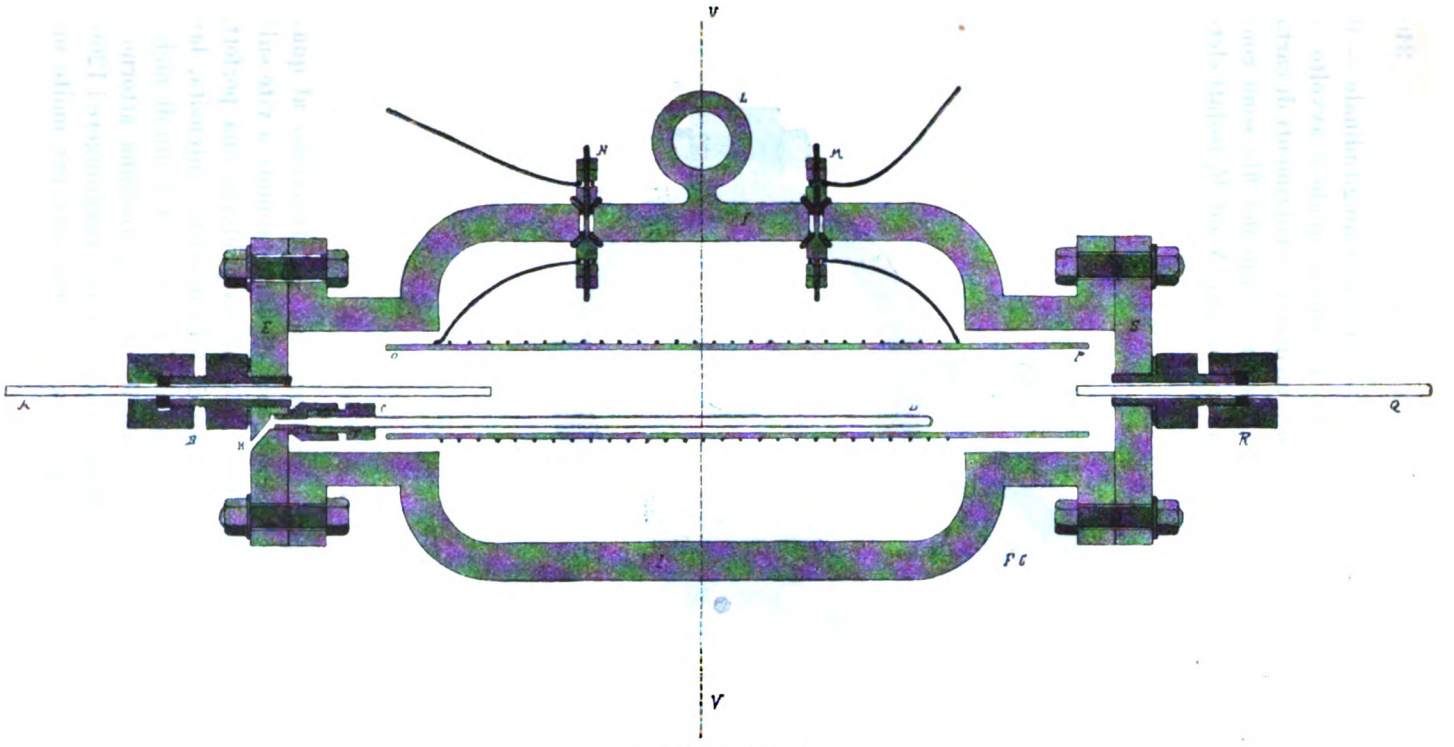


Fig. 1 (Scala 1 : 5).

Digitized by Google

Nell'apparecchio è disposto — in senso longitudinale — il tubo di porcellana *OP* (Fig. 1), attorno al quale è avvolto a spirale un filo di nichelio, isolato mediante avvolgimenti di carta d'amianto e di cordoncino d'amianto; i capi del filo sono connessi ai due morsetti a tirante di bronzo, *N* ed *M*, isolati elet-

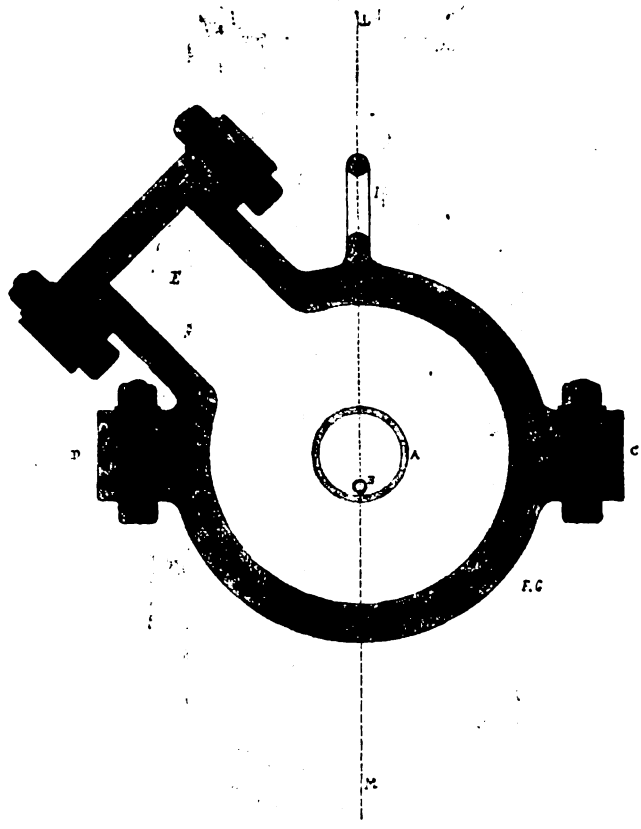
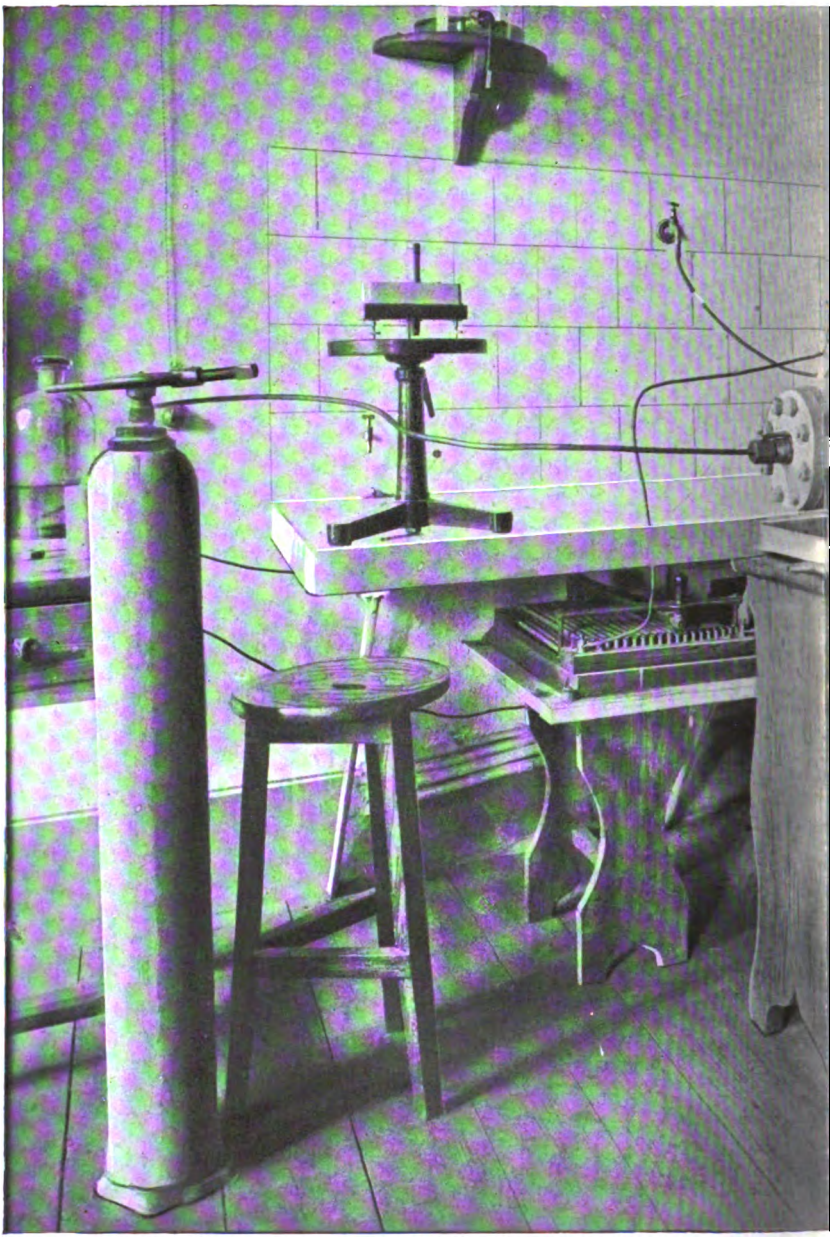


Fig. 2 (Scala 1 : 5).

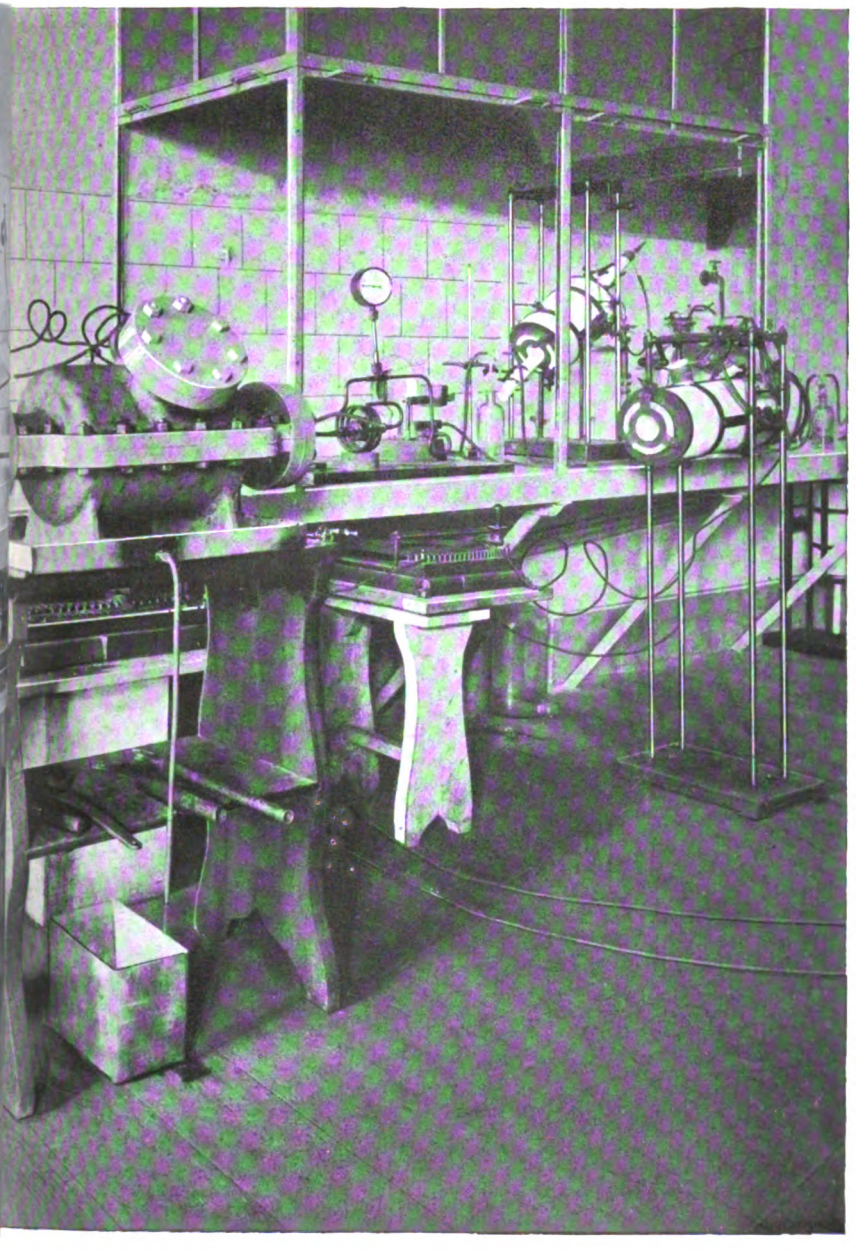
tricamente dal corpo dell'apparecchio — attraverso al quale passano — mediante quattro coni di fibra premuti a vite sulle bocche coniche dei due fori, in modo da produrre una perfetta chiusura. Una corrente elettrica di opportuna intensità, lanciata — per mezzo dei morsetti *M* ed *N* — nel filo di nichel, permette di portare questo, ed il tubo di porcellana attorno al quale è avvolto, ad una temperatura che può raggiungere i 1200°, e può essere mantenuta perfettamente costante per molte ore.

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google



g. 4.

Digitized by Google

Digitized by Google

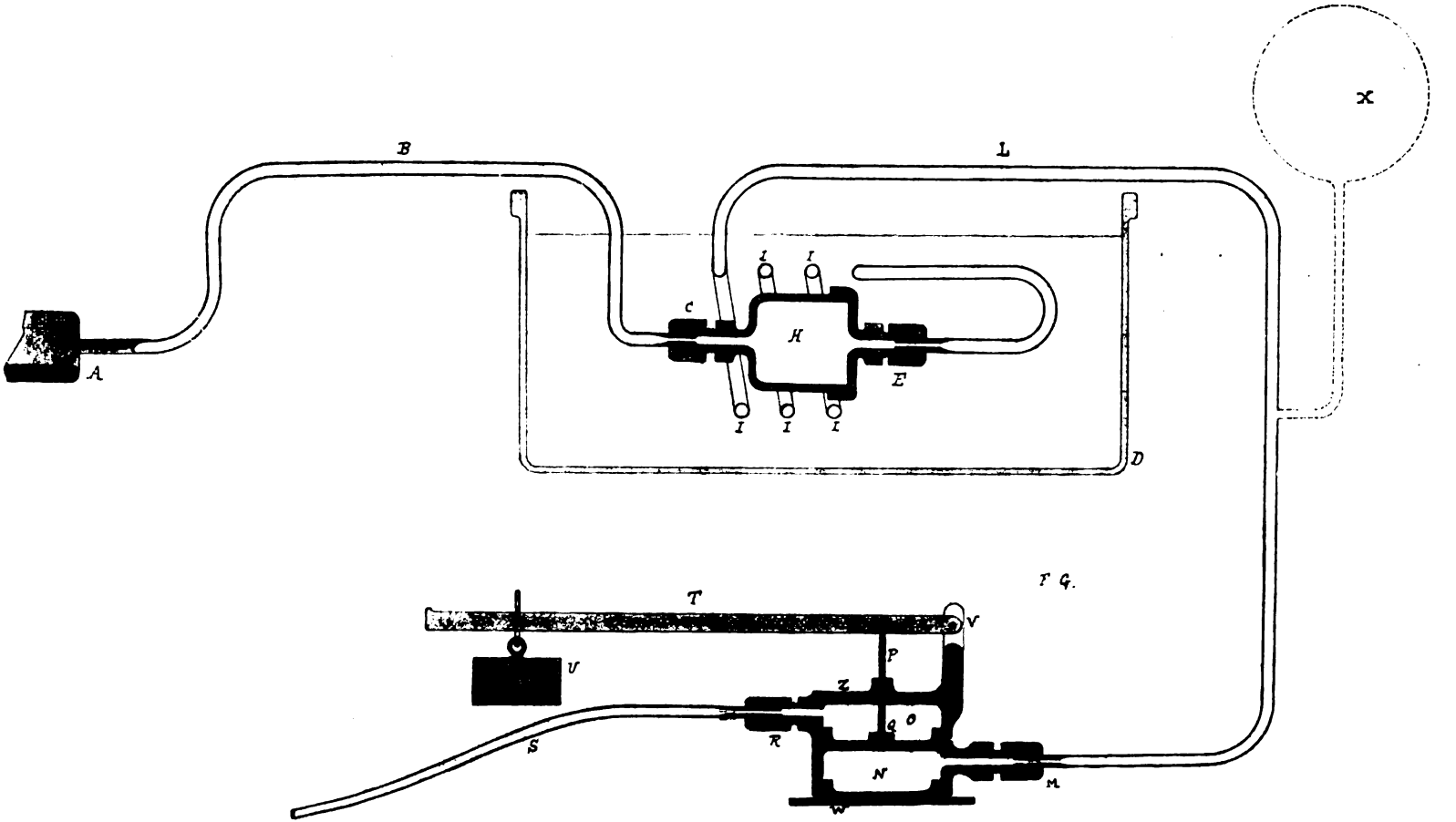
Tolto il coperchio *S* (Fig. 1) si introducono nel tubo *OP* i pezzi da cementare. Nella nostra prima serie di esperienze, della quale ora parliamo, riempivamo poi tutto lo spazio ancora libero del tubo *OP* mediante carbone di legna granulare (1) lavato successivamente con acido cloridrico e con acqua e calcinato a lungo verso 1300° *C*: il carbone era mantenuto nel tubo mediante due tamponi d'amianto. Chiuso il coperchio *S* (Fig. 1) si stringevano i due morsetti *N* ed *M* (Fig. 1) introducendo la mano e la chiave attraverso l'apertura *E* (Fig. 2): per mezzo di questa stessa apertura si riempiva di fibra d'amianto tutto lo spazio compreso fra il tubo di porcellana e la parete d'acciaio, in modo da proteggere questa dall'effetto della temperatura elevata alla quale si deve portare il tubo di porcellana. Infine si ricollocava il coperchio *H* (Fig. 2), stringendo bene i bolloni.

Congiunto il tubo *A* (Fig. 1) col recipiente nel quale il gas cementante è compresso ad una pressione superiore a quella alla quale si vuole eseguire la cementazione, il gas stesso penetra nell'apparecchio, vi circola attraversandolo da un capo all'altro, e ne esce pel tubo *Q* (Fig. 1).

Il tubo di rame *Q* (Fig. 1), pel quale il gas esce dal forno, è connesso con un apparecchio regolatore della pressione, rappresentato in sezione dalla Fig. 3 (scala 1 : 4). Tale apparecchio è costituito da una camera di bronzo *H*, nella quale — pel duplice effetto del rallentamento della corrente gassosa, dovuto all'allargamento della sezione, e del raffreddamento, ottenuto mediante un bagno a circolazione d'acqua (*D*) — si condensano le sostanze meno volatili, che si formano talora in grandi quantità (per esempio, quando si adoperano come cementi i vapori di certi idrocarburi pesanti). I gas raffreddatisi ulteriormente nel serpentino (del solito tubo di rame) *I*, *I*... giungono nella scatola di bronzo *N*, dalla quale possono uscire soltanto sollevando la valvola di bronzo smerigliata *Q*, caricata di un peso regolabile a volontà, mediante il romano *U*, scorrevole sulla leva *T*. Lungo il percorso del tubo *L*, congiungente l'apparecchio

(1) Passato attraverso al crivello di 16 maglie al cm.^{2}, e trattenuto dal crivello di 81 maglie al cm.^{2}.

Digitized by Google



F G.

Digitized by Google

refrigerante colla scatola N, è inserito — per mezzo di un piccolo tubo di rame — un manometro, indicato schematicamente in X, nella nostra figura.

Le guerniture dei varî giunti a vite erano fatte con anelli di stagno puro.

Riferiamo per ora una sola delle varie serie di esperienze — tuttora in corso — eseguite con l'apparecchio or ora descritto operando a diverse temperature e pressioni, ed impiegando diversi gas carburanti. E precisamente riferiamo i risultati di una serie di cementazioni eseguite a 1100° *C.* impiegando anidride carbonica sotto diverse pressioni, in presenza di carbone solido granulare, preparato nel modo al quale accennammo poco fa. La velocità colla quale l'anidride carbonica reagisce col carbone a 1100°, è tale (come dimostrano varie esperienze, i cui risultati riferiremo fra breve) che basta far sì che l'anidride carbonica che giunge nel tubo di porcellana caldo del nostro apparecchio con una velocità di quindici a venti litri l'ora, attraversi uno strato di carbone granulare dello spessore di 6-7 cm., prima di arrivare alla zona nella quale sono collocati, insieme allo stesso carbone, i cilindri d'acciaio, per essere sicuri che in questa zona siano già raggiunte, per l'anidride carbonica residua e per l'ossido di carbonio da essa formatosi, le concentrazioni corrispondenti alle condizioni di equilibrio dei due gas col carbonio libero alla data temperatura. Possiamo dunque praticamente ritenere — date le note concentrazioni di equilibrio dei due gas a 1100° — che le cementazioni della nostra prima serie si compiano come se avessimo impiegato direttamente l'ossido di carbonio in luogo dell'anidride carbonica.

Ciò posto, riportiamo senz'altro, nella seguente tabella, i risultati della nostra prima serie di esperienze (1):

---

(1) Gli spessori indicati per le varie zone sono la media di misure micrometriche eseguite in molti punti di ciascuna provetta, e non differenti l'una dall'altra di più di 0,05 mm. Lo spessore delle zone ipoeutettiche è misurato dal punto di inizio dei lembi di ferrite primaria, fino al punto nel quale la concentrazione del carbonio è ridotta all'incirca al 0,3 %; è quindi possibile, in questo gruppo di zone, un errore anche di 0,1 mm.

Digitized by Google

Numero	Temperatura	Pressione (Kg./cm²)	Durata della cementazione (ore)	Spessore della zona ipereutettica (mm.)	Spessore della zona eutettica (mm.)	Spessore della zona ipoeutettica (mm.)	Spessore totale della zona cementata (mm.)
1ª	1100° C.	9,5	2	1,3	0,6	1,2	3,1
2ª	„	press. ord.	2	0	0,5	1,1	1,6
3ª	„	15	1	0,8	0,7	1,0	2,5
4ª	„	6	7	2,0	1,1	2,0	5,1
5ª	„	press. ord.	7	0	1,6	1,8	3,4

I numeri contenuti nella nostra tabella pongono subito nettamente in evidenza il notevole effetto della pressione del gas cementante, sia sulla velocità della cementazione, sia sulla concentrazione del carbonio nelle zone cementate.

Per quanto riguarda il primo punto la velocità della diffusione del carbonio nell'acciaio — basta confrontare i risultati della esperienza 1ª con quelli della seconda, per vedere come — rimanendo costanti tutte le altre condizioni — l'innalzamento della pressione, dal valore corrispondente alla pressione atmosferica ordinaria a quello corrispondente ad un eccesso di 9,5 Kg. per cm² su tale valore, raddoppi quasi lo spessore totale della zona cementata ottenuta in due ore, portandolo da mm. 1,6 a mm. 3,1.

Il confronto fra la 4ª e la 5ª esperienza dimostra che — per una cementazione di sette ore a 1100° — l'innalzamento di pressione, dalla pressione atmosferica ordinaria alla pressione di 6 Kg. per cm², eleva lo spessore totale della zona cementata nel rapporto di 3 o 2 (da mm. 3,4 a mm. 5,1).

Infine, il confronto della 3ª esperienza colla 2ª fa vedere come, operando alla pressione ordinaria, occorrano due ore per ottenere una zona cementata il cui spessore non raggiunge i due terzi di quello della zona che si può ottenere in un'ora, operando — a parità di ogni altra condizione — sotto la pressione di 15 Kg. per cm².

Quanto all'effetto della pressione del gas sulla concentrazione del carbonio nelle zone cementate, esso risulta pure evi-

Digitized by Google

dente dal confronto della nostra 1ª esperienza colla 2ª, e della 4ª colla 5ª. Tali confronti dimostrano, infatti, che — mentre nelle zone cementate ottenute alla pressione ordinaria manca la zona ipereutectica, nè la concentrazione del carbonio può quindi superare in esse il 0,9 % — le zone ottenute eseguendo la cementazione sotto pressioni comprese fra 6 e 9,5 Kg. per cm^2, contengono sempre zone ipereutectiche ben sviluppate.

I dati ricavati da queste prime esperienze sarebbero evidentemente insufficienti per dedurre alcuna regola quantitativa nei rapporti ai quali abbiamo accennato: tali regole ci proponiamo di stabilire fra breve, in base ai risultati di più numerose serie di esperienze (attualmente in corso di esecuzione), eseguite in condizioni molto varie con altri gas carburanti e su vari tipi di acciai. I dati attuali bastano, però, a dimostrare in modo assolutamente certo che nel processo della cementazione i gas carburanti intervengono direttamente ed hanno, anzi, un'azione preponderante.

Le esperienze descritte or ora, e quelle che ad esse fanno seguito e che saranno descritte fra breve, sono l'applicazione su scala minore, ma in condizioni meglio definite, dello stesso principio che uno di noi ha già da tempo applicato su scala industriale, ricavandone utili risultati pratici.

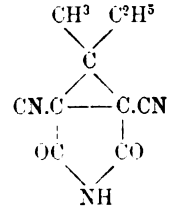
Torino, Laboratorio di Chimica metallurgica e metallografia del R. Politecnico, Febbraio 1910.

Digitized by Google

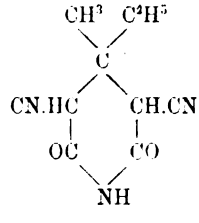
Su alcuni nuovi derivati trimetilenpirrolici.

Nota I del Dott. MARIO GHIGLIENO.

In una Nota: *Sintesi di derivati glutarici e trimetilenici* (1), Guareschi e Grande descrissero una 3·3metiletil1·2·dician·trimetilendicarbonimide



ottenuta dalla metiletildicianglutarimide



mediante bromurazione in α e α′ e successiva eliminazione del bromo.

La metiletildicianglutarimide si ha, passando pel suo sale d'ammonio, grazie alla reazione sintetica del prof. Guareschi (2), per cui da un chetone, etere cianacetico ed ammoniaca si formano dei composti dialchildicianglutarici di cui questo non è che un esempio.

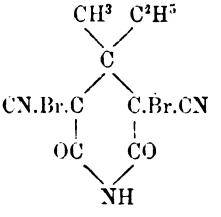
---

(1) " Atti R. Accad. d. Scienze di Torino „, Vol. XXXIV, Giugno 1899.

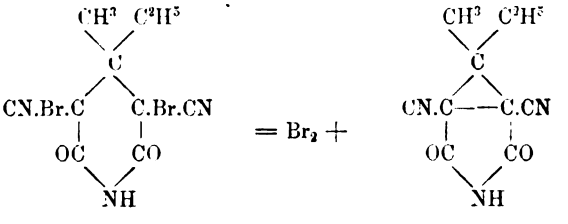
(2) I. Guareschi, *Sintesi di composti glutarici e trimetilenpirrolici.* " Mem. R. Accad. d. Scienze di Torino „, Serie II, Vol. L, Novembre 1900.

Digitized by Google

Essa lascia con facilità sostituire con due di bromo i due atomi di idrogeno in posizione α, dando il composto bromurato:



che poi, scaldato a lungo di per sè, o meglio in presenza di acido acetico, elimina il bromo con formazione dell'anello trimetilenico:



Gli autori citati ottennero questa imide trimetilenica cristallizzata dall'acido acetico diluito " in prismi rombici, duri, brillanti, che fondono a 220°-225°, ma scomponendosi e annerendo; già a 210°-205° dà segni di fusione e se si scalda lentamente si scompone, fondendo, a 210° „.

Questa sostanza non fu però da loro preparata in gran quantità.

Allo scopo di completare lo studio di questa sostanza e di ottenerne il corrispondente acido trimetilenico, io preparai, seguendo le norme date da Guareschi e Grande, la imide glutarica primitiva ed il suo derivato bromurato. Nella sbromurazione di questo, eseguita prima nell'identico modo indicato dai due autori e poi con un procedimento alquanto modificato, io ottenni sempre dei prodotti cristallizzati con proprietà analoghe a quelle da essi attribuite al loro composto, ma con un punto di fusione variabile da caso a caso e da frazione a frazione di una stessa bromurazione (da un minimo di 160° circa a un massimo di 230°-235°).

Digitized by Google

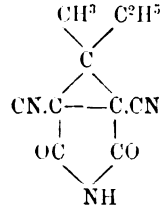
Da questi prodotti, che evidentemente erano dei miscugli a proporzioni variabili (e probabilmente miscugli isomorfi, perchè non erano discernibili due diverse specie di cristalli), con una serie di cristallizzazioni frazionate in diversi solventi riuscii a separare due isomeri, entrambi cristallizzati e incolori, fondenti l'uno a 241°-243° con decomposizione e l'altro a 202°-203°, che tutti e due diedero all'analisi e alla determinazione del peso molecolare risultati assai ben concordanti coi valori teorici per la formola $C^{10}H^9N^3O^2$.

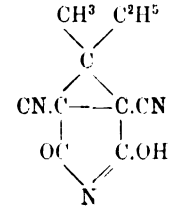
La sostanza ottenuta da Guareschi e Grande doveva dunque essere anch'essa molto probabilmente, come apparve dall'esame di un campione conservato in questo laboratorio da circa otto anni, un miscuglio di questi due isomeri.

Le solubilità dei due isomeri nei diversi solventi, sempre alquanto maggiori per il composto che fonde più basso, non differiscono però in modo notevole altro che per l'acido acetico e per l'etere.

Tutte le altre proprietà sono per i due corpi perfettamente analoghe. Entrambi formano sali e si comportano come deboli acidi monobasici, nettamente titolabili colla fenolftaleina. Trattati con soluzioni diluite di idrato sodico, assorbono tre molecole d'acqua svolgendone una d'ammoniaca e dando origine a due acidi diversi, ma isomeri anch'essi e in tutto perfettamente analoghi fra di loro, che saranno descritti in una prossima nota. Resistono poi notevolmente ad una ulteriore idratazione per mezzo degli alcali. Nè l'uno nè l'altro si colora col cloruro ferrico. Per quanto ho potuto vedere, sono tutti e due egualmente stabili, e un tentativo di trasformare l'uno nell'altro per lunga ebollizione con acido acetico non diede alcun risultato. Entrambi sono inattivi sulla luce polarizzata.

Date queste proprietà, non mi sembra probabile che la isomeria di questi due composti sia da attribuirsi alla contemporanea esistenza delle due forme chetonica ed ossidrilica:





Digitized by Google

che facilmente dovrebbero trasformarsi l'una nell'altra. La perfetta analogia riscontrata fra i due composti induce piuttosto ad ammettere per entrambi la medesima costituzione ed il loro modo stesso di formazione, come pure la mancanza della colorazione col cloruro ferrico, mi fanno ritenere più probabile delle due la formola chetonica, che ho adottata nella scrittura e in base alla quale mantenni la nomenclatura usata da Guareschi e Grande. Questo però senza considerare affatto la questione come risolta.

Comunque, per ciascuna delle due precedenti formole è spiegabile l'esistenza dei due isomeri dipendentemente dalle posizioni rispettive dei singoli gruppi atomici nello spazio.

Infatti, secondo le teorie generalmente ammesse di Le Bel e van't Hoff, le due valenze libere d'ogni atomo di carbonio del nucleo trimetilenico devono essere dirette in modo simmetrico da parti opposte del piano determinato dai tre atomi dell'anello stesso. E, ammessa la teoria delle tensioni di Baeyer, è logico supporre che le valenze degli atomi di carbonio trimetilenici legate ai gruppi CN e CO, sebbene questi ultimi siano poi a loro volta riuniti a formare il complesso eterociclico $\begin{matrix} -CO\diagdown \\ \qquad\quad NH \\ -CO\diagup \end{matrix}$, si mantengano però sempre vicine quanto è possibile alle direzioni dei vertici di un tetraedro, e perciò da parti opposte del piano del nucleo trimetilenico. Ciò posto, diventa evidente la possibilità delle due forme stereoisomere, secondo cioè che il complesso eterociclico viene a trovarsi rispetto al nucleo trimetilenico dalla parte del gruppo metilico o da quella del gruppo etilico.

Un buon argomento in favore di questa interpretazione dell'isomeria sarebbe dato dal fatto che l'isomeria stessa non si osserva nei corrispondenti composti dietilsostituiti, come risulterebbe finora da esperienze già iniziate a questo scopo.

Per ragioni di comodità ho chiamato forma α l'isomero a punto di fusione più elevato e che si ottiene in maggior quantità e forma β l'altro a punto di fusione più basso.

Digitized by Google

***

La metiletildicianglutarimide venne preparata nel modo indicato da Guareschi e Grande (1), decomponendo cioè con acido cloridrico il suo sale di ammonio, che si forma dalla sintesi diretta fra metiletilchetone, etere cianacetico ed ammoniaca. Lamelle bianche fusibili a 193°. Queste, sospese nell'acqua allo stato di polvere fina e trattate con quattro molecole di bromo sciolto in acido acetico, diedero direttamente il derivato bromurato sotto forma di polvere bianchissima fusibile verso 185°.

Eliminazione del bromo dalla metil·etil·dibromo·dician·glutarimide. — Guareschi e Grande sbromuravano il composto bromurato scaldandolo per lungo tempo a 100° in una cassula con acido acetico al 50 %. Per quantità un po' grandi di sostanza, questo procedimento diventa però lunghissimo e rende anche poco. Dopo alcune prove, io eseguii quindi sempre la sbromurazione scaldando a bagno maria entro un pallone di Claisen con acido acetico della stessa concentrazione, ma facendo passare nel liquido una viva corrente d'aria che asporta rapidamente il bromo via via che si mette in libertà. In 6-7 ore la reazione è in questo modo completa e, regolando opportunamente la concentrazione della soluzione, dà subito per raffreddamento del liquido giallo una buona quantità di prodotto ben cristallizzato e privo di bromo. Concentrando successivamente l'acido acetico, si hanno poi altre porzioni di prodotto sbromurato cristallizzato. In totale, dall'80 al 90 % del rendimento teorico.

Si hanno così delle miscele (molto probabilmente miscele isomorfe) dei due isomeri in proporzioni assai variabili e in cui il punto di fusione non è che un indizio assai fallace del rapporto di quantità fra i due componenti (2).

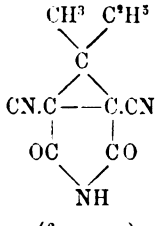
(1) *Su una idroetildicianmetildiossipiridina.* " Atti R. Accad. d. Scienze di Torino „, Vol. XXXIII, Giugno 1898.

(2) Nelle successive ricristallizzazioni ottenni, p. es., varie volte dei cristalli fondenti esattamente a 202°-203° come l'isomero β, mentre contenevano ancora buone quantità dell'altro isomero a punto di fusione più alto. Così, nelle frazioni fusibili sotto a 203°, vari casi di miscele collo stesso punto di fusione contenenti i due isomeri in proporzioni ben diverse.

Digitized by Google

La separazione dei due composti allo stato puro è piuttosto penosa e richiede una serie di sistematiche soluzioni parziali nell'etere, seguite poi da varie cristallizzazioni in diversi solventi. Il metodo della dissoluzione parziale della sostanza mista, agitando a lungo, in polvere finissima, colla quantità di etere che sarebbe sufficiente a sciogliere un egual peso del composto più solubile, dà risultati abbastanza buoni ed offre il vantaggio di non dover poi riscaldar troppo le sostanze in presenza di solventi, col che in parte si alterano dando dei prodotti vischiosi.

1·1·*Metil·etil*·2·3·*dician·trimetilen*·2·3·*dicarbonimide*
o *metil·etil*·β·β'·*dician·trimetilen*·α·α'·*pirrolidone.*



(forma α)

Fu ottenuta insieme col suo isomero come già dissi, e separata da questo mediante soluzione frazionata in etere e successive ricristallizioni dall'acido acetico e dall'alcool diluiti.

Bei cristalli rombici o prismetti incolori, anidri, duri, brillanti, di sapore caldo e dolciastro, poco solubili in acqua fredda, abbastanza facilmente nell'alcool, nell'acido acetico e anche più nell'acetone, poco o niente in benzene, cloroformio, solfuro di carbonio ed etere di petrolio. Nell'etere a freddo si scioglie all'incirca in proporzione di 1 a 150.

Nei tubi capillari fonde, decomponendosi e annerendo, a 241°-243°, temperatura che può variare un po' secondo la rapidità del riscaldamento. Sul blocco Maquenne si ha la fusione istantanea a 248°-249° in un liquido incoloro che tosto rapidamente annerisce.

Digitized by Google

Disseccata a 100°, diede all'analisi i risultati seguenti:

I. Da gr. 0,1680 cm³ 31,2 di azoto a 15° e 722 mm.;
II. „ 0,1213 „ 22,0 „ a 14° e 731 „
III. „ 0,1384 gr. 0,3020 di CO^2 e gr. 0,0540 di H^2O;
IV. „ 0,1094 „ 0,2380 „ „ 0,0453 „

	trovato				calcolato per $C^{10}H^9N^3O^2$
	I	II	III	IV	
C %	—	—	59,51	59,33	59,06
H %	—	—	4,37	4,63	4,46
N %	20,89	20,79	—	—	20,73

Una determinazione del peso molecolare fatta col metodo ebullioscopico (apparecchio di Riiber) diede:

Solvente: acetone Coefficiente di innalzamento K = 17,3
Sostanza impiegata . . . . . gr. 0,5500
Solvente „ . . . . . „ 9,73
Temperatura di ebollizione del solvente . . . 55°,375
„ „ della soluzione . . 55°,870
Innalzamento osservato . . . . . 0°,495
Peso molecolare trovato 197,6
Peso molecolare calcolato per $C^{10}H^9N^3O^2$ . . . 203,2

Ha reazione nettamente acida, forma sali e si comporta come un debole acido monobasico, titolabile colla fenolftaleina.

Gr. 0,1000, sciolti in 40 di acqua, richiesero con questo indicatore cm³ 10,1 di una soluzione $\frac{N}{20}$ di idrato sodico.

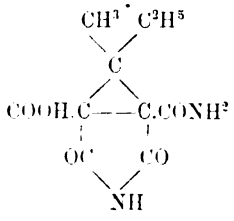
Soda calcolata per una basicità 19,7 %
Soda neutralizzata . . . . . 20,2 %

Per ebollizione, anche non molto prolungata, con acqua si altera dando un prodotto bianco, vischioso, che tarda assai a cristallizzare. Non è intaccata dal bromo, nè dal permanganato in soluzione alcalina.

Per azione dell' idrato sodico (due molecole) in soluzione diluita (4 %) tanto a caldo quanto a temperatura ordinaria,

Digitized by Google

assorbe tre molecole d'acqua e ne sviluppa una di ammoniaca, dando il sale sodico di un acido



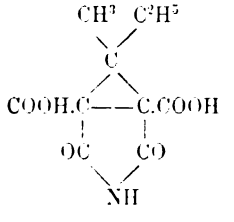
secondo l'equazione:

$$C^{10}H^9N^3O^2 + 3H^2O = C^{10}H^{12}N^2O^5 + NH^3.$$

In presenza di un eccesso di alcali (4 molecole) in soluzione concentrata e all'ebollizione assorbe invece, ma però con grande lentezza, quattro molecole d'acqua, eliminandone due d'ammoniaca:

$$C^{10}H^9N^3O^2 + 4H^2O = C^{10}H^{11}NO^6 + 2NH^3$$

e dando il sale dell'acido bicarbossilico:



Di questi acidi e della loro formazione tratterò in una prossima nota, dove saranno pure esposti i fatti su cui si fondano le soprascritte formole di struttura.

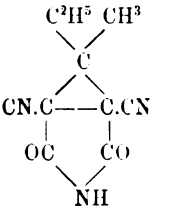
Anche coll'idrato di bario si ha già a temperatura ordinaria sviluppo di ammoniaca, soltanto un po' più lentamente.

Date le condizioni di preparazione dei due composti isomeri, volli provare se mai la forma β, che si ottiene specialmente nelle ultime porzioni del prodotto della sbromurazione, si potesse formare dall'isomero α per la prolungata azione dell'acido

Digitized by Google

acetico e del calore. Ma un grammo del composto α, scaldato per cinque ore a 100° con acido acetico al 50 %, si separò poi da questo inalterato. Solo l'acido si colora in giallo per formazione di piccole quantità di prodotti resinosi.

1·1·Metil·etil·2·3·dician·trimetilen·2·3·dicarbonimide
o metil·etil·β·β′·dician·trimetilen·α·α′·pirrolidone.



(forma β)

Separata con l'etere, mediante una serie di cristallizzazioni frazionate, dai prodotti misti della sbromurazione, dei quali costituisce forse meno di un quinto, e ritenuta pura quando non cambiava più il punto di fusione per successiva cristallizzazione dall'etere, dall'alcool e dall'acetone.

Questa sostanza, disseccata a 100° (non perde peso), diede all'analisi dei risultati che, come si vede, non differiscono sensibilmente da quelli ottenuti coll'isomero α.

I. Da gr. 0,0924 cm³ 17,0 di N a 17°,5 e 723 mm.;
II. „ 0,1154 gr. 0,2510 di CO^2 e gr. 0,0474 di H^2O;
III. „ 0,1156 „ 0,2514 „ „ 0,0480 „
IV. „ 0,1278 cm³ 22,8 di N a 14°,5 e 743 mm.

	trovato				calcolato per $C^{10}H^9N^3O^2$
	I	II	III	IV	
C %	—	59,32	59,31	—	59,06
H %	—	4,60	4,65	—	4,46
N %	20,56	—	—	20,71	20,73

Digitized by Google

La determinazione ebullioscopica del peso molecolare diede:

Solvente: acetone . . Costante di innalzamento	K = 17,3
Sostanza impiegata . . . . . gr.	0,5226
Solvente „ . . . . . „	10,50
Temperatura di ebullizione del solvente . . .	55°,445
„ „ della soluzione . .	55°,875
Innalzamento osservato	0°,430
Peso molecolare trovato	200,2
Peso molecolare calcolato per $C^{10}H^9N^3O^2$ . .	203,2

Cristallizza dall'alcool, dall'acido acetico diluito o dall'acqua, meno bene dall'acetone, in begli aghetti anidri, incolori e brillanti, di sapore dolciastro e caldo uguale a quello dell'isomero α.

Dall'etere caldo si separa per raffreddamento in grossi cristalli assai ben formati contenenti etere di cristallizzazione e rapidamente sfiorenti all'aria. Una determinazione fatta con tutte le cautele diede un contenuto del 20,0 % di etere nei cristalli rapidamente separati dal liquido e tenuti fino a peso costante in ambiente saturo di vapor d'etere.

Calcolato per $C^{10}H^9N^3O^2 + C^4H^{10}O = 26,72$ %;
„ „ $3C^{10}H^9N^3O^2.2C^4H^{10}O = 19,55$ %.

Si scioglie nei diversi solventi come l'isomero α, sempre però in proporzioni alquanto maggiori. Nell'etere, pel quale solvente si ha la maggior differenza, una parte di sostanza si scioglie in circa 30 di solvente.

Fonde bene a 202°-203° nei tubi capillari, risolidificandosi per raffreddamento quasi inalterata; sul blocco Maquenne si ha fusione istantanea a 203°-204°.

Anch'essa si comporta come un debole acido monobasico. Grammi 0,1000, sciolti in 40 di acqua con una goccia di fenolftaleina dànno colorazione rosea con cm^3 10,3 di NaOH $\frac{N}{20}$:

Soda calcolata per una basicità . .	19,7 %
Soda neutralizzata	20,6 %

Digitized by Google

Cogli alcali diluiti il comportamento è perfettamente identico a quello dell'isomero α, si svolge cioè una molecola di ammoniaca formandosi il sale di un acido isomero e perfettamente analogo a quello che si ottiene dal detto composto.

A cagione della scarsità della sostanza pura non ho ancora studiato l'ulteriore azione dell'alcali concentrato fuorchè in modo semplicemente qualitativo, ma è lecito supporre anche qui un comportamento analogo a quello del composto isomero, con cui mostrò in tutto il resto così stretta analogia.

Anche questo isomero β risente nello stesso modo l'azione dell'acqua bollente e non è intaccato nè dal bromo nè dal permanganato di potassio.

Torino, Gennaio 1910. Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologica della R. Università.

Dell'influenza esercitata dalla temperatura sull'apprezzamento di oggetti posti sopra la nostra pelle.

Nota di LEOPOLDO CHINAGLIA.

Ernesto Enrico Weber, per primo, richiamò l'attenzione degli studiosi sopra l'influenza che la temperatura esercita sull'apprezzamento, che facciamo degli oggetti, nel suo prezioso lavoro " Tastsinn und Gemeingefühl „ (1). Egli giunse alla conclusione, che corpi freddi, posti sopra la pelle, sembrano più pesanti di corpi caldi di egual peso. Per provare questa asserzione consiglia di servirsi di talleri nuovi. Se ne raffreddi uno, egli dice, fino a −7°, o −4° C., e si riscaldino gli altri fino a +37°, o +38° C.; poi, coricato un soggetto in modo che il suo capo sia appoggiato bene, e la superficie della fronte sia orizzontale, gli si facciano chiudere gli occhi e gli si ponga un tallero freddo sopra la fronte, e, dopo averlo tolto, due caldi sovrapposti, quindi di nuovo uno freddo, e così via fino a che il soggetto sia in grado

(1) Wagners *Handwörterbuch der Physiologie*, Bd. 3, Abt. 2. p. 481. 1846.

Digitized by Google

di emettere un giudizio. Questi dirà che i due dischi caldi erano egualmente pesanti, od anche più leggieri del tallero freddo.

Questa esperienza al Weber sembra provare che la sensazione del freddo si sommi con quella della pressione; mentre la sensazione del caldo agisca piuttosto come una pressione negativa. Per questo fatto egli è disposto a credere che le sensazioni della pressione e della temperatura siano dovute alla funzione del medesimo organo periferico.

Molti anni di poi, riprese le esperienze, variandole alquanto, un altro autore, lo Szabadföldi (1). Egli si servì per le sue ricerche di dischi di legno duro, spessi dai 2 ai 5 mm., riscaldati fino a 50 e più gradi C., e trovò che, confrontandoli con altri dischi non riscaldati, essi apparivano più pesanti di questi ultimi. Tali osservazioni entrarono, pur esse, nella Scienza.

Siccome però lo studio di questi interessanti fenomeni non pare esaurito completamente, e siccome le conclusioni dei due autori soprannominati non sono, in apparenza, concordi, così nuove esperienze potevano senza dubbio riuscire opportune. E perciò, per consiglio del prof. Kiesow, ho ripreso queste ricerche per controllare i fatti già noti e per arrivare, possibilmente, ad una spiegazione e ad una interpretazione di essi conforme a quanto si è giunti a conoscere in questi ultimi anni nel campo delle sensazioni cutanee.

Le mie esperienze furono condotte nel modo seguente. Il soggetto veniva coricato supino sopra un tavolo, per modo che la sua testa, appoggiandosi sopra un cuscino, offrisse la fronte orizzontale. Egli teneva gli occhi chiusi, concentrava la sua attenzione nel giudicare il peso del corpo che gli veniva posto sopra la fronte quando lo sperimentatore lo faceva avvertito con la parola " Attento „. Sempre lo si invitò a trascurare la sensazione di caldo, o di freddo, che l'oggetto poteva destargli, come pure a non tener conto della sua forma, ma a rivolgere tutta intera l'attenzione alla sola impressione di peso, così che egli potesse confrontare due corpi, e giudicare la differenza di pressione, che presentavano.

---

(1) M. Szabadföldi, *Beiträge zur Physiologie des Tastsinnes*, " Moleschotts Untersuchungen „, Bd. 9, p. 624, 1865.

Digitized by Google

I due corpi da paragonare venivano posti, uno dopo l'altro, lasciando un breve intervallo fra di loro, oppure uno accanto all'altro, sopra la regione mediana della fronte. Sia ponendoli contemporaneamente, che successivamente, il risultato dell'esperienza era eguale. Si poteva, però, notare una certa maggior facilità di confronto nel primo caso, quantunque l'attenzione dovesse rivolgersi a due stimoli, perchè veniva eliminato lo sforzo mnemonico del soggetto per ricordare l'impressione ricevuta dal primo corpo e per poterla quindi paragonare con quella ricevuta dal secondo. Di più, ponendoli successivamente, se il primo corpo era più caldo o più freddo del secondo, questo tendeva, per contrasto, ad apparire più freddo o più caldo di quello che realmente non fosse, venendo a portare un piccolo perturbamento nell' esperienza, perturbamento, che essendo di lieve importanza, ci basterà accennare.

Un'altra serie di esperienze fu condotta ponendo, invece, i corpi da giudicare sopra altre parti del corpo, e venne così stabilita l'esattezza dell'asserzione dello Szabadföldi: " Queste " esperienze riescono meglio sopra la fronte, e sopra la pelle " del viso; meno adatti sono la gamba ed il braccio „. Infatti, sempre sopra la fronte si ebbe la maggiore facilità di sensazione e quindi i risultati migliori. Nella fronte stessa, per altro, si notarono piccole differenze, a seconda della porzione sua: ond'è che, per ottenere la maggiore possibile costanza nelle condizioni dell'esperienza, si usò sempre della sua regione mediana, immediatamente al di sopra della glabella.

Durante queste ricerche, intese a determinare l'influenza della temperatura di un corpo sopra l'apprezzamento del suo peso, ebbi agio di osservare, che essa ha un'influenza pure sopra le sensazioni di dimensione. E successive esperienze, rivolte a questo scopo, mi dimostrarono che la grandezza dei corpi è diversamente apprezzata a seconda del loro grado di calore; poichè, freddi, sembrano più grandi, e, caldi, più piccoli di quello che sono, come dirò.

Finalmente venni ad osservare ancora un altro fatto, degno di nota, e cioè che un corpo caldo è sentito più sollevato, mentre uno freddo più affondato nella nostra pelle; ma anche di questo dirò brevemente più avanti.

Incominciai dapprima a sperimentare con dischi metallici, e

Digitized by Google

precisamente con monete italiane d'argento, di nichelio o di bronzo. Non essendo a mia disposizione i talleri, non potei ripetere, in tutti i suoi particolari, l'esperienza di Weber. Questa esperienza riesce però bene anche con pezzi da due lire, da dieci centesimi e con altre monete.

Mi parve opportuno non scegliere monete troppo grandi, come sarebbe uno scudo d'argento, perchè la grandezza loro, siccome la superficie della fronte è curva, impedisce, che premano con eguale intensità in tutte le loro parti. Usai, perciò, piccole monetine da un centesimo, o da due centesimi (bronzo), od anche da venti centesimi (nichelio), nuove. Il peso di questi corpi è tale, che, quando la loro temperatura sia indifferente, quasi non si sentono sopra la fronte; ma, qualora vengano sostituiti con uno eguale più caldo o più freddo, si sente, assai evidente, la differenza di pressione. E quindi essi sono bene adatti; poichè non è l'apprezzamento del valore assoluto del loro peso, che ora interessa, ma basta che sia possibile il confronto fra due di essi, aventi temperatura diversa.

Si prenda, pertanto, una moneta qualunque e, dopo averla raffreddata ad una temperatura di circa $-5°$, la si ponga sopra la fronte di un soggetto. Toltala poscia, si sostituisca con una eguale, riscaldata a circa $+39°$. Si vedrà, che, sempre, la prima è apprezzata molto più pesante della seconda.

Per il riscaldamento di questi oggetti mi valsi di un termostato, in modo che, lasciati alquanto nell'apparecchio portato alla temperatura voluta, assumevano questa temperatura. Per il raffreddamento adoperai invece una scatola metallica, munita di un coperchio per il quale passava un termometro, immersa in una miscela di ghiaccio e sale; per cui le monete, chiuse in esse, rapidamente ne acquistavano la temperatura.

Esperimentando con pezzi da due lire, in queste condizioni, io venni a vedere, non solo, che si poteva raddoppiare il peso del corpo caldo, ponendo due monete una sopra l'altra, senza che la prima, fredda, cessasse di apparire più pesante, ma che bisognava quasi triplicare il peso del corpo caldo per ottenere eguaglianza di sensazione. Infatti, una moneta da due lire fredda, fece equilibrio, secondo un soggetto, a due da due lire più una da cinque centesimi, più una da due centesimi, calde; e secondo un altro soggetto, a due da due lire, più due da cinque cente-

Digitized by Google

simi: cioè gr. 9,980 fecero rispettivamente equilibrio a gr. 26,500 ed a gr. 27,300. Altra volta, ancora, tre monete da venti centesimi, riscaldate debolmente, furono giudicate eguali ad una fredda (− 5°) posta contemporaneamente accanto ad esse sopra la fronte: cioè gr. 4 fecero equilibrio a gr. 12.

Queste esperienze, fatte per controllare i risultati ottenuti dal Weber, me ne dimostrarono l'esattezza, poichè i fatti da me osservati concordarono con quelli a cui egli giunse; anzi li sorpassarono alquanto.

Volli poi, confrontare corpi caldi o freddi con altri d'egual peso mantenuti a temperatura perfettamente indifferente, e vidi che mentre una moneta fredda è sempre ritenuta più pesante di una eguale di temperatura indifferente, la cosa è più complessa quando si paragoni una calda con una a temperatura indifferente.

Si prenda, infatti, una moneta mantenuta a temperatura indifferente, e la si faccia paragonare dal soggetto con una di peso eguale che si vada riscaldando man mano. Si vedrà che fino ad un certo punto quella calda tende ad apparire più leggiera, ma che poi, poco a poco, la sensazione cambia, ed essa diviene gradatamente più pesante dell'altra. E ciò, precisamente, ha principio quando la temperatura comincia a divenire dolorosa.

Per ottenere la miglior esattezza occorre avere in quest'esperienza la precauzione di provare prima la moneta a temperatura indifferente, poi quella calda, e non operare inversamente, perchè, in questo secondo caso, la moneta indifferente appare fredda per il contrasto con quella calda e quindi la sensazione non è più ben sicura.

I fatti suesposti si possono verificare anche confrontando monete di peso e grandezza differenti. Così quella che si riscalda anche se è più piccola e più leggiera, qualora la sua temperatura sia abbastanza elevata e la differenza di peso non sia eccessiva, appare più grave di quella indifferente, secondo quanto riscontrò pure lo Szabadföldi (1).

Le prove, che ho descritte, intese a paragonare il peso di

(1) Op. cit., pag. 626.

Digitized by Google

un corpo a temperatura indifferente con uno caldo, vengono dunque ad accordarsi nel risultato con le conclusioni di questo autore: il quale dice appunto (1) che un disco di legno, portato a 50 e più gradi Cels., appare più pesante di uno non riscaldato. Ma non vengono menomamente a contrastare con l'asserzione, già citata, di Weber (2), che corpi freddi appaiono più pesanti di corpi caldi. Infatti, le condizioni dell'esperienza dei due autori non sono le stesse. Mentre Weber confronta un corpo debolmente più caldo con uno assai più freddo (rispetto alla temperatura normale della pelle umana), lo Szabadföldi confronta un corpo molto più caldo con uno poco più freddo. Cinquanta gradi, infatti, costituiscono un calore doloroso, mentre la temperatura di un disco di legno non riscaldato poco si discosta da quella indifferente. Si comprende allora agevolmente come i risultati a cui giungono i due autori possano essere diversi, ma la differenza è soltanto apparente.

Si prenda, infatti, una delle monete, sopra accennate, se ne innalzi la temperatura fino a 50° e se ne faccia confrontare il peso con una eguale, raffreddata alcuni gradi sotto lo 0° (— 5°). Si vedrà, che la prima appare più leggiera della seconda. Dunque il principio di Weber è vero anche per le temperature estreme.

Se si aumenta ancora la temperatura del corpo caldo e lo si pone sopra la fronte assieme a quello freddo, la sensazione dolorosissima del primo assorbe tutta l'attenzione, ed allora riesce difficile giudicare il peso dei due corpi, ma si può, con uno sforzo di attenzione, ancora scoprire in quello freddo la tendenza ad essere più pesante.

Un soggetto che durante il corso delle esperienze mi dimostrò grande facilità nel percepire le sensazioni di calore, cioè grande impressionabilità ad esse (soggetto, anche facilmente impressionabile agli stimoli dolorifici), fu il solo che accusò, qualche volta, un disco riscaldato al disopra dei limiti del dolore, più pesante di uno eguale freddo. Egli mi disse che nel primo istante sentiva bene quest'ultimo e poco il primo (posti con-

(1) Op. cit., pag. 626.
(2) Op. cit., pag. 48.

Digitized by Google

temporaneamente), per cui quello freddo gli sembrava sicuramente più pesante. Ma subito dopo, l'impressione dovuta al disco caldo cresceva, e, divenendo man mano insopportabile, faceva aumentare anche quella del peso. Questa risposta, discordante da quelle degli altri soggetti, è probabilmente dovuta al fatto, già sopra accennato, che un calore troppo elevato rende il giudizio grandemente difficile, impossibile quasi, starei per dire, specie poi in un soggetto molto sensibile al dolore ed al caldo.

Per ripetere, quanto più fedelmente mi fosse possibile, anche le ricerche dello Szabadföldi, ho sperimentato in seguito adoperando dischi di legno duro (faggio) di varie dimensioni e di vario spessore. Ho potuto in tal modo vedere che i risultati sono identici a quelli ottenuti mediante dischi di metalli diversi (monete). La natura del corpo, di cui sono costituiti gli oggetti, dei quali ci si vale in queste ricerche, non ha, dunque, influenza apprezzabile sul risultato delle esperienze stesse, quando si tenga conto, ben inteso, delle variazioni dovute alle differenti proprietà fisiche dei vari corpi (minore o maggiore conducibilità del calore, quindi maggiore o minore rapidità di raffreddamento, ecc.).

Volendo riprodurre in una sola esperienza tutto intero il modo di manifestarsi del fenomeno, che siamo venuti, brevemente, esaminando, si potrebbe operare nel seguente modo: Si prendano due dischi eguali di legno o di metallo, si raffreddino ad una temperatura compresa fra — 5° e — 7° e se ne mantenga uno così, mentre l'altro si vada riscaldando man mano. Si vedrà, facendo confrontare di tratto in tratto i due corpi ad un soggetto, nei modi già indicati, che quello freddo appare sempre più pesante dell'altro, ma che la differenza non è sempre la stessa. Minima dapprima, va facendosi sempre più grande fino ad una temperatura del secondo corpo, che si avvicina al limite del dolore, per poi diminuire di nuovo con l'aumentare ulteriore di questa temperatura.

Risulta da ciò, che il peso degli oggetti che si pongono sopra la nostra pelle è variamente apprezzato a seconda della loro temperatura. Ci pare che vada aumentando se dalla temperatura indifferente si passa a quelle successivamente più fredde, vada diminuendo man mano che dalla temperatura indifferente si sale a quelle calde. Ad un certo punto però, quando il grado di calore è tale da divenire molesto, dapprima, e poi

Digitized by Google

doloroso, ricomincia ad aumentare, mantenendosi ad ogni modo minore di quello osservato alla temperatura fredda.

Si prenda ora un disco di carta asciugante (che, asciutto, appena si sente sopra la fronte), lo si imbeva per bene di etere solforico o di cloroformio e lo si ponga sopra la fronte. Assieme alla sensazione intensa di freddo, prodotta dal rapido evaporarsi di questi liquidi, si sentirà una evidente sensazione di pressione. E questo si potrà verificare anche lasciando cadere semplicemente una goccia di etere sopra la pelle. Siccome però in brevissimo tempo la piccola quantità di questo liquido sarà tutta evaporata, cesserà ben tosto la sensazione di freddo, e quindi quella di peso avrà anch'essa un carattere speciale, cioè andrà sfumando, come si trattasse di un corpo che si alleggerisse man mano.

Quest'esperienza mi sembra provare che un semplice stimolo di freddo, non accompagnato che da un debolissimo e trascurabile stimolo di pressione, vale a destare un'evidente sensazione di pressione.

Osserverò, prima di passare ad un altro ordine di fatti, che spesso la sensazione prodotta da un corpo ben caldo o ben freddo perdura lungamente sopra la nostra pelle anche dopo che il corpo sia stato tolto. Così che più volte alcuni miei soggetti mi fecero notare che anche l'impressione di peso tendeva a conservarsi per un certo tempo. E, in conseguenza di questo fatto, se si pongono sopra la fronte due corpi, l'uno fortemente riscaldato, l'altro ad una temperatura indifferente, si vede che spesso quest'ultimo passa quasi inavvertito e non si sente perchè la sensazione ad esso dovuta scompare dopo un po' ed è assorbita da quella dovuta al corpo più caldo. Si possono, adoperando monete o dischi di varia temperatura, od anche di temperatura eguale, fare, a questo proposito, esperienze abbastanza curiose, ponendone due o tre sopra la fronte di un soggetto, e, dopo qualche minuto, toglierne alcune, od aggiungerne, con qualche precauzione, altre (a temperatura presso a poco indifferente), senza che il soggetto stesso se ne accorga. Il peso di questi corpi, evidentemente, non ha da essere troppo grande per non destare una sensazione troppo vivace.

Ho già accennato come la temperatura degli oggetti abbia una notevole influenza sopra l'apprezzamento delle dimensioni

Digitized by Google

loro, e determini illusioni abbastanza importanti. Si può operare in due diverse maniere per mettere in evidenza questo fatto. Si può, cioè, fare giudicare al soggetto la grandezza assoluta del corpo che ha sopra la fronte, o farglielo confrontare con uno di eguali dimensioni, ma di differente temperatura, analogamente a quanto si è fatto per determinare il variare dell'apprezzamento del peso. Operando nell'uno o nell'altro di questi due modi, si giunge a risultati eguali.

Coricato un soggetto nel modo già indicato da principio, gli si faccia, dapprima, apprezzare la grandezza assoluta di monete di diametro diverso ponendogliene una serie in mano, in modo che egli, senza aprire gli occhi, per meglio concentrare l'attenzione, possa scegliere fra esse quella che gli pare d'avere sopra la fronte. Si vedrà che, quando la temperatura è vicina alla indifferente, il giudizio non solo è possibile, ma è soggetto a piccoli errori solamente. Mi parve di osservare una leggiera tendenza a ritenere gli oggetti più grandi di quello che sono realmente, in particolar modo quando sono piuttosto piccoli. Ma invece se si raffreddano notevolmente le monete, si osserva, con grande evidenza, che vengono apprezzate molto più grandi di quello che sono. Per esempio, una moneta da due soldi o da due lire potrà apparire grande come uno scudo; una da venti centesimi, di nichelio, pure come uno scudo; un centesimo come un soldo, ecc. Se, al contrario, vengono riscaldate, esse appariranno molto più piccole di quello che realmente non siano. E, per esempio, una moneta da due soldi potrà apparire grande come una da due centesimi; una da due lire come una da un soldo, ecc.

Si può anche operare, come già ho accennato, ponendo prima una moneta, e poi, toltala, sostituendola con una eguale di temperatura diversa. In questo modo si potrà avere solo l'apprezzamento di confronto, ma si vedrà che la moneta più fredda è sempre stimata più grande di quella calda, analogamente a quanto avviene sperimentando nel primo modo. Evidentemente questo fenomeno sarà tanto più manifesto quanto più grande sarà la differenza di temperatura fra i due corpi.

Accennerò infine ad una illusione, determinata, anch'essa, dalla diversa temperatura degli oggetti.

Fin dalle prime esperienze, il dott. B., prestandosi come

Digitized by Google

soggetto, mi diceva, per spiegarmi la differente sensazione che provava per un corpo caldo, oppure per uno freddo, che gli pareva che quest'ultimo si affondasse di più, mentre il primo gli faceva l'impressione che fosse più sollevato: come se quello freddo comprimesse maggiormente e quello caldo invece comprimesse meno. Tali osservazioni mi ripeteva poco dopo, indipendentemente dal primo soggetto, il dott. P. È facile apprezzare queste differenze di posizione mettendo i corpi da confrontare, successivamente, sopra la fronte. Ancora più evidente si rivela il fenomeno ponendoli contemporaneamente l'uno accanto all'altro. Servono egualmente bene dischi di legno e monete metalliche, sebbene, per vero, i primi abbiano in tutte queste esperienze un vantaggio sulle seconde, e cioè una minore conducibilità del calore, la quale, se rende un tantino più malagevole allo sperimentatore l'operazione di riscaldamento o di raffreddamento, dà però maggiore sicurezza che la temperatura possa mantenersi costante per un tempo sufficiente.

Si possono prendere, adunque, due dischi di legno duro del diametro presso a poco di una moneta da dieci centesimi, l'uno ben caldo, l'altro ben freddo, e si pongano vicini sopra la fronte. Non solo si sentirà il primo più leggiero e più piccolo del secondo, per quanto già si è detto, ma si sentirà anche una manifesta differenza di posizione fra i due corpi, poichè l'uno apparirà ad un livello più alto, l'altro ad un livello più basso. E, precisamente, quello caldo darà l'illusione che sfiori solamente la pelle, e l'altro che vi si affondi.

Già ho detto che questi fatti si osservano meglio sopra la fronte che non sulle altre parti del corpo; ma, specialmente per quanto riguarda l'aumento di peso dovuto alla temperatura fredda, anche altre regioni sono più o meno bene adatte. Ricorderò tra esse: la regione temporale, le palpebre, gli zigomi, le guancie, il mento, la punta del naso, il lobo dell'orecchio, la nuca, il dorso della mano a pugno chiuso, la regione mediana della superficie inferiore dell'avambraccio, ecc. Meno bene il fenomeno si osserva sulla palma della mano, sui polpastrelli delle dita, sulla porzione sternale ed epigastrica del tronco, sulla rotula, ecc.

Esposte così le modalità del fenomeno, ci rimane da spiegarlo, ricercandone le cause.

Digitized by Google

Dalle ricerche di von Frey e Kiesow (1) risulta come " à l'intérieur de la peau ou des organes tactiles, il se produise, " par suite d'un déplacement des humeurs aqueuses, un chan- " gement de concentration des substances dissoutes dans ces " dernières, lequel agisse comme stimulus chimique sur les or- " ganes nerveux „. Ossia come " le stimulus mécanique n'excite " le nerf qu'indirectement et que cette excitation soit toujours " produite par une modification dans la constitution chimique ou " dans la pression osmotique des liquides des tissus „. Dato ciò, l'azione di un oggetto pesante evidentemente dovrà essere diversa a seconda che sarà caldo o freddo, perchè noi sappiamo che la temperatura esercita una influenza chimica e fisica notevole sopra i tessuti.

Un oggetto freddo, dunque, oltre all'eccitamento dovuto al suo peso, ne eserciterà uno dovuto alla sua temperatura; la quale, allontanandosi molto da quella normale della pelle, ha un'azione tale sul tessuto, da determinare un processo intermedio analogo, secondo il mio modo di vedere, a quello che produrrebbe una pressione e quindi da dare una sensazione di peso più grande. Se questa opinione fosse esatta, si avrebbe una vera e propria sommazione degli stimoli interni, nei medesimi organi periferici, analogamente a quanto, con altre vedute, ammetteva il Weber, non già però una sommazione di sensazioni. Che una sommazione di quest'ultima natura non debba ritenersi la causa essenziale del fenomeno, risulta chiaramente dal fatto che vi sono parti del nostro corpo, in cui l'errore di apprezzamento del peso è assai evidente per l'abbondanza degli organi del tatto, mentre la sensazione fredda è debolissima, per la scarsezza dei così detti punti freddi, ad esempio, il mento; e che in altre parti, al contrario, la sensazione del freddo è assai intensa, benchè l'aumento di pressione sia debolmente apprezzabile.

Può darsi anche, che con la sensazione tattile di pressione si fondano quelle che si hanno per la contrazione o per l'eccitamento dei tessuti sottostanti (muscoli, periosto, ecc.).

(1) Von Frey e Kiesow, " Arch. ital. de Biologie „, Tom. XXXIII, p. 228 e 229, 1898.

Digitized by Google

Inoltre degno di nota mi sembra il fatto che il fenomeno è sopratutto evidente in quelle parti del corpo ove i tessuti molli formano un lieve strato a cui sottostà un tessuto rigido (osseo, cartilagineo, ecc.). Ed è forse perciò che la fronte si presta molto bene a queste ricerche: poichè lo strato di tessuto cutaneo che copre l'osso sottostante è assai sottile. Per questo fatto lo stimolo rimane più concentrato, perchè la resistenza opposta dalle parti dure, su cui giacciono quelle sensibili, impedisce il suo diffondersi. Questo vale, evidentemente, solo per le regioni ricche di organi tattili, come difatti è la fronte (corone nervose delle guaine dei piccoli peli), poichè anche là dove si ha una parte ossea sottostante ad un sottile strato di tessuto molle, ma scarseggiano i punti tattili, non si avrà che debolmente il verificarsi del fenomeno (rotula).

Riguardo all'influenza esercitata da un calore moderato sulla pelle, si può supporre che essa non sia così forte, come quella determinata dal freddo, da produrre quel medesimo processo intermedio, dal quale, come abbiamo visto sopra, dipende l'illusione dell'aumento di peso dell'oggetto raffreddato.

In quanto poi all'effetto prodotto da una temperatura caldissima e dolorosa, possiamo credere che, più che altro, esso sia dovuto a fenomeni psichici. Poichè uno stimolo di dolore desta una così forte sensazione da attirare l'attenzione talmente, che non è più possibile il confronto di esso con uno eguale a temperatura indifferente, e forse si ha per questo la tendenza ad apprezzare il primo più pesante del secondo, il quale suscita soltanto una sensazione sorda, che rimane ai limiti della coscienza.

Per spiegare, ora, la differente posizione, che ci sembrano avere due oggetti, l'uno freddo e l'altro moderatamente caldo, osserverò che, come già ho accennato, il primo produce una contrazione dei tessuti, mentre il secondo, specialmente per l'aumentare del volume dei liquidi, una dilatazione di essi; e questo fatto avvicina od allontana, in certo modo, lo stimolo dalle terminazioni sensitive.

Riesce spiegato, in questo modo, anche il fenomeno che un corpo freddo appare più grande di uno corrispondente caldo, poichè la sensazione prodotta dal primo si diffonde, essendo il tessuto contratto, ad un maggior numero di organi tattili, mentre il secondo ne influenza un numero minore. Nel primo

Digitized by Google

caso vengono cioè eccitati organi normalmente più distanti fra di loro e dalla superficie della pelle, che non nel secondo, e, perciò, nasce l'impressione di uno stimolo più esteso e più approfondito.

Prima di deporre la penna, ripensando alla lieta fatica passata, mi sale spontaneo un caldo tributo di ringraziamento e di riconoscenza al prof. Kiesow che mi appianò la via con il suo consiglio e l'assistenza paterna. Sentite grazie rivolgo pure ai dottori M. Ponzo e L. Botti, come pure al sig. C. Servetti che, volentieri, mi si prestarono quali soggetti.

R. Istituto di Psicologia sperimentale ed applicata
(Fondazione E. E. Pellegrini), diretto dal Professore Kiesow.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

Digitized by Google

CLASSI UNITE

Adunanza del 20 Febbraio 1910.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: SPEZIA, CAMERANO, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, GRASSI. — Scusano l'assenza NACCARI e PARONA;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: BOSELLI, Vice-Presidente dell'Accademia, MANNO, Direttore della Classe, RENIER, PIZZI, RUFFINI, STAMPINI, D'ERCOLE, SFORZA e DE SANCTIS, Segretario.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente a Classi unite, 13 febbraio 1910.

L'Accademia procede al conferimento dei premi Bressa e Gautieri. Assegna il XVI° premio Bressa (Nazionale, 1905-1908) al Comm. Prof. Ernesto SCHIAPARELLI, Direttore del Museo di Antichità di Torino, *per i suoi studi, esplorazioni e scoperte in Egitto e per l'ordinamento scientifico del Museo di Torino*; e il premio Gautieri per la filosofia (triennio 1906-1908) al periodico " La Critica „ e per esso ai due principali collaboratori Senatore Benedetto CROCE e Prof. Giovanni GENTILE dell'Università di Palermo.

Si procede quindi alla nomina della 1ª Giunta pel XVII° premio Bressa (Internazionale, quadriennio 1907-1910). Riescono eletti per la Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali NACCARI, GUARESCHI, CAMERANO, SEGRE, e per la Classe di Scienze morali, storiche e filologiche RENIER, RUFFINI, DE SANCTIS, SFORZA.

Gli Accademici Segretari
LORENZO CAMERANO.
GAETANO DE SANCTIS.

Digitized by Google

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 27 Febbraio 1910.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: NACCARI, direttore della Classe, SPEZIA, SEGRE, PEANO, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, GRASSI, FUSARI e CAMERANO, Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Scusa la sua assenza il Socio SALVADORI.

Il Presidente comunica i telegrammi di ringraziamento del Prof. E. SCHIAPARELLI, del Senatore Benedetto CROCE e del Prof. GENTILE per l'assegnamento ad essi fatto dei premi Bressa e Gautieri.

Vengono presentate in omaggio alla classe le pubblicazioni seguenti:

1° Prof. G. BOCCARDI, *Ricerche su i cataloghi di stelle*, dal Socio JADANZA;

2° Galeazzo PICCININI, *Cenni biografici* del Socio GUARESCHI;

3° Dr. E. FESTA, *Nel Darien e nel Ecuador*, dal Socio CAMERANO.

Vengono presentate per la pubblicazione negli *Atti* le note seguenti:

1° Dr. G. PIOLTI, *Sintesi dell'Anglesite, Esperienza*, dal Socio SPEZIA;

Digitized by Google

2° Dr. F. Giolitti e F. Carnevali, *Ricerche sulla fabbricazione dell'acciaio cementato. VI. Cementazione di acciai ad alto tenore di carbonio, coi gas alla pressione atmosferica e a pressione ridotta*, dal Socio Guidi;

3° Prof. E. Burali-Forti, *Gradiente, rotazione e divergenza in una superficie*, dal Socio Peano;

4° G. Santangelo, *Su di una estensione del teorema di Habich*, dal Socio Peano.

Il Socio Naccari presenta per la solita pubblicazione le *Osservazioni meteorologiche fatte nell'anno 1909 all'Osservatorio della R. Università di Torino* calcolate dal Dr. Benedetto Rainaldi.

Digitized by Google

LETTURE

Sintesi dell'anglesite.

Esperienza del Dr. GIUSEPPE PIOLTI.

> L'expérience est la source unique de la vérité: elle seule peut nous apprendre quelque chose de nouveau; elle seule peut nous donner la certitude.
>
> POINCARÉ.

Per quanto mi consta, l'anglesite artificiale fu ottenuta coi seguenti metodi:

1° Facendo reagire lentamente una soluzione di solfato di rame ed un'altra di cloruro di sodio sopra la galena (BECQUEREL A. C.) (1);

2° fondendo insieme solfato potassico e cloruro di piombo (MANROSS) (2);

3° lasciando per un certo tempo immersa in una soluzione di solfato potassico una piccola sfera di cloruro di piombo fuso (MANROSS) (3);

4° facendo comunicare per mezzo d'un filo una soluzione di solfato ferroso con un'altra di nitrato di piombo, poste in due vasi separati (MACÉ) (4);

5° facendo agire, per diffusione, una soluzione di solfato potassico con un'altra di nitrato di piombo, poste in vasi distinti immersi in un unico vaso pieno d'acqua (DREVERMANN) (5);

6° FRÉMY ottenne il solfato di piombo cristallizzato, per doppia decomposizione lenta, servendosi di liquidi capaci di

---

(1) FOUQUÉ et MICHEL LÉVY, *Synthèse des minéraux et des roches*. Paris. 1882, p. 340.

(2) Id.

(3) Id.

(4) Id.

(5) Id.

Digitized by Google

produrre detto corpo, di densità diversa, sovrapposti e separati da una parete porosa o da un foglio di carta da filtro (1);

7° scaldando in un tubo chiuso alla lampada, verso 150°, un eccesso di solfato di piombo con acido cloridrico diluito con due volte il suo volume d'acqua (Bourgeois) (2);

8° scaldando acido solforico concentrato finchè siavi sviluppo di fumi bianchi, poscia sciogliendovi a saturazione solfato di piombo, indi continuando a scaldare per alcuni giorni, in modo da ottenere l'evaporazione tranquilla dell'acido solforico (Étard) (3);

9° facendo agire, goccia a goccia, acido solforico diluito, contenente due grammi d'acido per litro, sopra una soluzione calda di cloruro di piombo in tre litri d'acqua, alla qual soluzione si aggiunsero 50 c. c. d'acido cloridrico concentrato. Dopo circa tre settimane si raccolgono cristalli d'anglesite (A. de Schulten) (4).

Lo stesso autore inoltre nel 1907 (5), per riprodurre artificialmente la baritina, la celestina, l'anglesite e per ottenere mescolanze isomorfe dei detti solfati li fece sciogliere a caldo nell'acido solforico, ma invece di lasciar raffreddare la soluzione, la fece evaporare a secco mantenendola alla temperatura dell'ebullizione od alquanto al disotto.

Come vedesi, nei metodi indicati, fatta eccezione del primo, messo in opera dal Becquerel, non si fa intervenire alcun minerale. Io invece pensai di modificare il metodo del Macé, facendo agire un sale di piombo sopra un minerale dalla cui alterazione potesse prodursi acido solforico.

Li 17 Gennaio 1892 posi in un recipiente pirite ed una soluzione di nitrato di piombo.

Li 28 Luglio 1908 scorgevasi sulla pirite un complesso di fiocchi finissimi di color bianco-giallognolo. Toltili, riconobbi al microscopio trattarsi di aghi fragilissimi (6) d'una lunghezza

(1) " Comptes rendus de l'Acad. des Sc. „, Paris, 1866, T. 63, p. 714.
(2) " Bulletin de la Soc. Française de Minéralogie „, 1887, T. X, p. 323.
(3) Id., 1888, T. XI, p. 57.
(4) Id., 1903, T. XXVI, p. 106.
(5) " Comptes rendus de l'Acad. des Sc. „, Paris, 1907, T. 145, p. 877.
(6) E la somma loro fragilità spiega come mi sia stato impossibile riprodurli colla fotografia.

Digitized by Google

oscillante da uno a sei millimetri e d'una larghezza da uno a due decimi di millimetro. Talvolta invece di aghi osservansi lamelle acuminate alle due estremità, con una forma simile a quella di certe diatomee. Nel primo caso l'estinzione è retta, nel secondo l'estinzione è retta secondo numerose strie d'accrescimento (che osservansi sulle lamelle) disposte trasversalmente alle lamelle, talora perpendicolari alla lunghezza della lamella, talora oblique. Lavai gli aghi con acido cloridrico per liberarli dalla limonite da cui erano inquinati e ne scaldai alcuni sul carbone alla fiamma riducente: ottenni un microscopico globulo di piombo. Avuta così la certezza che il minerale era realmente un minerale di piombo, ne feci l'analisi quantitativa, che mi diede il seguente risultato:

		Composizione teorica
PbO	74,1 (calc.)	73,6
SO^3	26,6	26,4
	100,7	100

La reazione probabilmente avvenuta fu l'ossidazione della pirite causata dal nitrato di piombo, con susseguente formazione di solfato ferroso e d'acido solforico e quindi la produzione del solfato di piombo. Le tracce di limonite poi evidentemente provengono dall'ossidazione del ferro.

Parmi possibile che tali reazioni avvengano in natura allorquando pirite (minerale facilmente ossidabile) si trovi a contatto con minerali di piombo.

Digitized by Google

Ricerche sulla fabbricazione dell'acciaio cementato.

VI. *Cementazione di acciai ad alto tenore di carbonio, coi gas alla pressione atmosferica e a pressione ridotta.*

Nota di F. GIOLITTI e F. CARNEVALI.

(Con una Tavola).

In una memoria pubblicata poco più di un anno fa (1) abbiamo riferito i risultati di una serie di ricerche eseguite sottoponendo degli acciai a basso tenore di carbonio (da 0,05 % a 0,10 %) all'azione carburante di vari gas (Etilene, Metano, Ossido di carbonio, e loro miscele) in condizioni ben definite di temperatura, di pressione,..... ecc.

Non riportiamo qui i risultati allora ottenuti: bastandoci il ricordare come uno dei più interessanti di essi consista nell'aver potuto stabilire la possibilità di ottenere una determinata concentrazione del carbonio (scelta arbitrariamente fra il 0,2 % e l'1,4 % ed oltre) nelle zone cementate: e ciò col far variare, secondo norme ben determinate, la temperatura e la pressione dell'ossido di carbonio, e la velocità colla quale il gas circola attorno agli oggetti d'acciaio.

Rimandando — per le condizioni di applicazione tecnica di questi fenomeni, e per l'esatta determinazione fisico-chimica del loro decorso — agli altri lavori, che in parte abbiamo già pubblicati ed in parte pubblicheremo fra breve, facciamo qui osservare come dovesse ritenersi " a priori „ interessante lo stabilire in qual modo si comportassero gli acciai a diverso tenore di carbonio, sottoposti ai trattamenti or ora accennati, nei quali è fattore essenziale la concentrazione del carbonio contenuto nell'acciaio.

Onde stabilire tale comportamento, ripetemmo le esperienze descritte nella memoria sopra citata, facendo variare il tenore

(1) " Gazz. Chim. Ital. „. vol. XXXVIII (1908), p. II, pag. 309-351.

Digitized by Google

in carbonio degli acciai sottoposti alla cementazione, e mantenendo invariate tutte le altre condizioni sperimentali.

Come materiale, adoperammo due tipi d'acciaio, che indicheremo nella presente memoria colle lettere *A* e *B*. La composizione di ciascuno dei due acciai era la seguente:

Acciaio A

Carbonio	0,18 %
Manganese	0,35 %
Silicio	0,05 %
Fosforo	0,07 %
Zolfo	0,05 %

Acciaio B

Carbonio	0,94 %
Manganese	0,90 %
Silicio	0,17 %
Fosforo	0,04 %
Zolfo	0,02 %

Per quanto riguarda i dispositivi sperimentali per l'esecuzione delle cementazioni, ci siamo valsi degli stessi già descritti nella memoria citata poco fa. Ad essa rimandiamo pei dettagli sperimentali, limitandoci qui ad esporre, per ora, nel modo più succinto possibile i fenomeni caratteristici dovuti al diverso tenore di carbonio degli acciai sottoposti all'azione carburante dei vari gas.

Ripetemmo, da prima, sull'acciaio *B* alcune prove di cementazione del tutto analoghe a quelle già eseguite sull'acciaio dolce, e costituenti la prima serie (dal N. I al N. XVIII) delle esperienze descritte nella precedente Nota, già più volte citata. Il fatto, stabilito in base a quelle esperienze, che il processo della cementazione si compie con grande lentezza alle temperature prossime agli 800° C., è nettamente riconfermato dalle nuove esperienze, nelle quali sottoponemmo successivamente il nostro acciaio *B* all'azione carburante dell'etilene, dell'ossido di carbonio, del metano, e di un gas illuminante di composizione

Digitized by Google

uguale a quello adoperato nelle esperienze precedenti (l. c.) (1). Ed anzi, possiamo aggiungere che, alla temperatura di 800°, a parità di ogni altra condizione, la cementazione è assai meno intensa per l'acciaio eutectico (*B*) che non per l'acciaio extra-dolce: ciò che conferma in modo evidente la nostra opinione — altra volta espressa — che nella cementazione abbiano anche una parte notevole i fenomeni di diffusione del carbonio " per differenza di concentrazione „ fra i vari punti della massa di ferro β o γ nella qualè è disciolto. È infatti chiaro che le differenze della concentrazione del carbonio fra le prime zone esterne e l'interno della massa metallica, debbono essere assai minori nel caso dell'acciaio eutectico, che non nel caso dell'acciaio extra-dolce.

Il fatto si verifica operando con uno qualunque dei gas or ora indicati, sia alla pressione ordinaria che a pressione ridotta.

Sottoponemmo, poi, all'azione carburante dei quattro gas già indicati (Etilene, Metano, Ossido di carbonio e Gas illuminante) vari cilindretti dei due acciai *A* e *B*, mantenendo in ogni esperienza la temperatura costante a 900° C. durante cinque ore, e facendo passare nella camera di cementazione sette litri di gas. L'acciaio *A* si comportava — naturalmente — in modo del tutto simile all'acciaio extra-dolce adoperato nelle esperienze descritte nella precedente Nota già citata: talchè esso ci potè servire come mezzo di controllo della comparabilità dei risultati ottenuti allora con quelli ottenuti nelle nuove esperienze coll'acciaio eutectico (*B*).

Nelle esperienze eseguite cementando l'acciaio *B* coll'etilene e col metano, tanto alla pressione ordinaria, quanto a pressioni più basse (600 e 450 mm.), la zona ipereutectica (la sola

---

(1) Riportiamo la composizione del gas illuminante da noi adoperato:

Anidride carbonica	1,60 %	in volume
Idrocarburi della serie etilenica	3.40 %	„
Ossigeno	0,20 %	„
Ossido di carbonio	10,80 %	„
Idrogeno	51,95 %	„
Metano	31.58 %	„
Azoto (per differenza)	0,47 %	„

Digitized by Google

che — com'è facile capire — possa apparire nell'acciaio *B* comprendendo in sè le *tre* zone che si formano negli acciai dolci) è sempre notevolmente più profonda della corrispondente zona che si forma nell'acciaio *A*. Dato quanto abbiamo osservato poco fa intorno alla diffusione del carbonio " per differenza di concentrazione ", negli acciai a diverso tenore di carbonio, ciò è prova evidente che a 900° C. comincia a manifestarsi in modo preponderante il secondo fattore del processo della cementazione: la diffusione dei gas carburanti nella massa metallica.

A titolo di esempio concreto citiamo i seguenti dati:

TABELLA I.

Gas cementante	Temperatura (C.)	Pressione (mm.)	Durata della cementazione (ore)	Volume del gas impiegato (litri)	Spessore della zona ipereutectica nell'acciaio A (mm.)	Spessore della zona ipereutectica nell'acciaio B (mm.)
Etilene	900°	760	5	7	0,3	0,8
Id.	"	609	"	"	0,15	0,5
Id.	"	460	"	"	0,08	0,2
Metano	"	761	"	"	0,20	0,8
Id.	"	462	"	"	0,05	0,5

Gli stessi fatti ritroveremo per le cementazioni eseguite a temperature più elevate: ciò che conferma sempre meglio la nostra interpretazione.

Per le cementazioni dell'acciaio *B* eseguite mediante l'ossido di carbonio, appare ancor più chiara la diffusione del gas nell'acciaio: quale, del resto, già appariva nella cementazione dell'acciaio dolce (V. mem. cit., pag. 341 e segg.). Infatti la zona ipereutectica che qui si ottiene coll'acciaio *B* corrisponde (a differenza di quanto avviene per le cementazioni eseguite con idrocarburi) all'*unica* zona (ipoeutectica) che si forma cementando l'acciaio dolce nelle stesse condizioni (1): talchè il

(1) V. l. c.

Digitized by Google

fatto da noi costantemente osservato, che — per le cementazioni eseguite a 900° — la profondità di tali zone è la stessa per l'acciaio *A* e per l'acciaio *B*, dimostra sempre meglio che nell'azione cementante dell'ossido di carbonio predomina il fenomeno della diffusione del gas nell'acciaio, diventando trascurabile il processo di diffusione per differenza di concentrazione del carbonio disciolto nel ferro γ.

La profondità della zona carburata ottenuta cementando a 900° durante 5 ore, con sette litri di ossido di carbonio sotto la pressione atmosferica ordinaria, fu di un millimetro per ambedue gli acciai. Sotto una pressione di soli 461 mm. di mercurio — ma a parità di ogni altra condizione — lo spessore della zona cementata si ridusse per ambedue gli acciai a 0,6 mm.

Gli stessi fenomeni si verificano adoperando come " cemento " un gas illuminante piuttosto ricco di ossido di carbonio. Così, operando collo stesso gas illuminante adoperato per le esperienze pubblicate nella precedente Nota (l. c.), nelle identiche condizioni or ora indicate per l'ossido di carbonio, ottenemmo nell'acciaio *A* e nell'acciaio *B* zone cementate — rispettivamente ipoeutectiche e ipereutectiche — dello spessore di 0,8 mm. (operando alla pressione ordinaria) e di 0,5 mm. (operando sotto la pressione di 463 mm. di mercurio).

Una terza serie di cementazioni eseguimmo, adoperando gli stessi gas e gli stessi acciai, alla temperatura di 1000° C., mantenuta costante durante cinque ore. Osservammo anche qui gli stessi fenomeni riscontrati nella precedente serie di cementazioni. Sebbene a 1000° tali fenomeni si presentino in grado più notevole che a 900°, non riteniamo necessario darne una descrizione dettagliata, poichè dovremmo subito ripetere tale descrizione per gli acciai cementati a 1100°, pei quali gli stessi fenomeni si verificano in modo ancor più evidente. Passiamo, perciò, subito alla quarta serie di cementazioni eseguite a 1100°.

Le cementazioni della quarta serie furono ancora eseguite cogli stessi gas e cogli stessi acciai già adoperati nelle serie precedenti. La temperatura fu mantenuta costante a 1100° C. durante tre ore.

Digitized by Google

In questa serie di cementazioni, assai più che non nelle precedenti, appaiono evidenti le differenze nell'andamento della carburazione, dovute alla diversa concentrazione iniziale del carbonio nell'acciaio sottoposto alla cementazione.

Per evitar di ripetere le singole osservazioni già fatte altre volte, riportiamo semplicemente in una tabella (Tab. II) i dati relativi alla profondità degli strati cementati ottenuti operando con materiali diversi, ma eseguendo sempre le cementazioni *a 1100°* C. durante *tre ore*.

È superfluo far rilevare che per l'acciaio *B* — avente già la composizione corrispondente all'eutectico — può apparire soltanto, per opera della cementazione, la zona ipereutectica.

Dai numeri contenuti nella nostra tabella si rileva subito come per le cementazioni eseguite a 1100° le differenze di comportamento fra l'acciaio dolce *A* e l'acciaio duro *B* siano assai più notevoli che non per le cementazioni eseguite a 900°. Infatti — mentre negli acciai cementati cogli idrocarburi a 900° avevamo potuto stabilire semplicemente (V. Tab. I e dati successivi) che lo spessore della zona ipereutectica formatasi nell'acciaio *B* superava costantemente quello della corrispondente zona ipereutectica formatasi, in uguali condizioni, nell'acciaio *A* — nelle esperienze eseguite a 1100° troviamo che lo spessore della zona ipereutectica formatasi in ciascun caso nell'acciaio *B* è costantemente superiore a quello complessivo delle tre zone che si formano, in uguali condizioni, nell'acciaio *A*.

Ciò conferma in modo evidente le deduzioni tratte già dalle precedenti esperienze, intorno alla funzione specifica dei gas nel processo della cementazione.

Le elevate concentrazioni (fino al 2 %) che il carbonio raggiunge nelle zone carburate che si ottengono cementando con idrocarburi gassosi, a 1100°, un acciaio eutectico (quale il nostro acciaio *B*), pongono in evidenza in modo eccezionalmente chiaro i fenomeni di liquazione della cementite: fenomeni che uno di noi ha già avuto occasione di studiare altra volta (1),

(1) V. " Rendiconti della Società Chimica di Roma „, 1908, pag. 354 e " Gazzetta Chim. Ital. „, 1909, pag. 386.

Digitized by Google

TABELLA II.

Numero	Gas cementante	Pressione (mm.)	Acciaio A — Spessore della zona ipereutectica (mm.)	Acciaio A — Spessore della zona eutectica (mm.)	Acciaio A — Spessore della zona ipoeutectica (mm.)	Acciaio A — Somma dei tre spessori (mm.)	Acciaio B — Spessore della zona ipereutectica (mm.)	Quantità del gas passato durante le tre ore nella camera di cementazione. (litri)
1	Etilene	760	1,8	0,6	0,4	2,8	4,7	5
2	Id.	458	0,9	0,4	0,4	1,7	2,6	5
3	Metano	757	1,5	0,5	0,5	2,5	3,2	5
4	Id.	463	1,1	0,4	0,3	1,8	3,1	5
5	Ossido di carbonio .	762	—	—	3,2	3,2	4,1 (1)	5
6	Id. .	461	—	—	3,0	3,0	3,8	5
7	Etilene	762	0,8	0,5	0,4	1,7	2,4	1
8	Id.	759	1,9	0,6	0,5	3,0	4,5	15

(1) L'aumento di concentrazione del carbonio, che si ottiene cementando con ossido di carbonio alle temperature superiori a 1000°, è assai piccolo (V. " Gazz. Chim. „ 1908, pag. 341 e segg.).

In queste cementazioni bastano piccole quantità di anidride carbonica (0,5-0,2 %) miste all'ossido di carbonio per " invertire „ la reazione, sostituendo un processo di affinazione a quello della cementazione. Una tale inversione è evidentemente impossibile per le cementazioni eseguite cogli idrocarburi.

Digitized by Google

giungendo a provare come in essi (accanto agli analoghi fenomeni di liquazione della ferrite negli acciai più dolci) debba sopra tutto ricercarsi la causa della sfaldatura dei pezzi meccanici in acciaio cementato superficialmente.

Appare quindi opportuno esaminare qui un po' meglio le cause e gli effetti pratici del fenomeno dell' " accumularsi „ della cementite: poichè è appunto negli acciai dei quali ora ci occupiamo, che il fenomeno si verifica in maggior misura. Quanto alla seconda causa della sfaldatura — la liquazione della ferrite — la lasciamo per ora da parte, come quella che non può presentarsi negli acciai dei quali ci occupiamo ora.

Il fotogramma 1 riproduce un tratto dell'orlo esterno di una sezione piana praticata — perpendicolarmente all'asse — nel cilindretto di acciaio *B* che ha servito per la 1ª esperienza riportata nella nostra Tabella II (cementazione di tre ore a 1100° con etilene sotto la pressione atmosferica ordinaria). La sezione — levigata e attaccata con soluzione alcoolica di acido picrico al 5 % — è riprodotta con un ingrandimento di 50 diametri (1). In questo fotogramma si nota subito l'esistenza di una zona *esterna eutectica* — dello spessore di circa un millimetro — accanto ad una zona *più profonda ipereutectica*. Ora questa caratteristica distribuzione del carbonio — già constatata altra volta da uno di noi (2) — si verifica (come fra poco vedremo) molto di frequente nei prodotti delle cementazioni eseguite con cementi gassosi, in condizioni tali da ottenere zone cementate ad alto tenore di carbonio. Essa è, evidentemente, *opposta* a quella che dovremmo prevedere partendo dall'ipotesi che la cementazione sia dovuta alla diffusione del carbonio per differenza di concentrazione; poichè non possiamo ammettere che una differenza di concentrazione di una sostanza in una soluzione solida produca la diffusione della sostanza stessa

(1) Come si vede facilmente, la nostra micrografia — che comprende una gran parte della zona ipereutectica — risulta dall'unione di quattro fotografie eseguite spostando la provetta d'acciaio parallelamente a sè stessa per mezzo di una vite micrometrica. — Nello stesso modo sono eseguite le micrografie 2, 4 e 5.

(2) Vedi Giolitti e Tavanti, " Gazz. Chim. It. „, 1909, pag. 386.

Digitized by Google

dai punti nei quali la sua concentrazione è minore a quelli nei quali essa è maggiore.

Il fenomeno (che abbiamo già detto — e vedremo più avanti — verificarsi frequentemente) si spiega facilmente in base a considerazioni del tutto analoghe a quelle che hanno già permesso ad uno di noi (1) di spiegare le brusche variazioni della concentrazione del carbonio lungo le superficie di raccordo delle tre zone (ipereutectica, eutectica e ipoeutectica) caratteristiche degli acciai cementati ad alto tenore di carbonio.

Abbiamo già dimostrato poco fa come — sopra tutto per le temperature superiori ai 1000° — intervenga nella cementazione l'azione *diretta* dei gas carburanti; azione diretta che si rivela in special modo nelle piccole differenze della concentrazione del carbonio degli strati successivi costituenti la zona esterna del pezzo cementato (2). Ora, data tale grande omogeneità della soluzione solida costituente — sopra 900° — la serie degli strati esterni della zona cementata, è ben naturale il prevedere che i cristalli di cementite che se ne separano per opera del raffreddamento, non debbano necessariamente formarsi da prima negli strati superficiali (come dovrebbe avvenire se in questi il carbonio avesse una concentrazione molto più elevata che non negli strati contigui) (3), ma si formino invece nei punti nei quali trovano dei " germi „ di cristallizzazione, la cui formazione è spesso dovuta — come è ben noto — ad eterogeneità del tutto accidentali della massa d'acciaio (grani di scorie, noduli di solfuri metallici... ecc.) o può provenire da leggere variazioni locali della concentrazione del carbonio, prodotte da momentanei cambiamenti della temperatura o della pressione del gas cementante. Intorno a tali germi si accumuleranno i cristalli di cementite primaria, a mano a mano che il raffreddamento procede; e la cristallizzazione procederà secondo lo schema già indicato altra volta da uno di noi per un caso analogo (4), fino a che — raggiunta la temperatura eutectica —

(1) Vedi Giolitti, " Rendiconti della Società Chim. di Roma „, 1908, pag. 354 e seg.

(2) Vedi Giolitti e Tavanti, l. c.

(3) Vedi l. c.

(4) " Gazz. Chim. „ 1909, pag. 401-404.

Digitized by Google

rimarranno ampie zone nelle quali il carbonio avrà la concentrazione costante 0,9 %: tali zone sono appunto quelle che appaiono al microscopio formate di perlite pura.

Una valida conferma del nostro modo di interpretare questi fenomeni, è fornita dall'esame di un cilindretto del solito acciaio *B*, cementato a 1100° C. durante dieci ore con undici litri di etilene sotto la pressione atmosferica ordinaria. Il nostro fotogramma 4° riproduce (coll' ingrandimento di 50 diam.) un tratto del lembo esterno di una sezione trasversale di tale cilindretto, levigata ed attaccata nel solito modo. In esso si vedono alcuni cristalli di cementite all'estremo orlo esterno della sezione: tale prima zona ipereutectica è seguita da una zona eutectica, la quale è a sua volta seguita da una seconda zona ipereutectica: una simile distribuzione della cementite non può evidentemente essere attribuita se non all'azione di " germi di cristallizzazione „ in una massa di soluzione solida di concentrazione praticamente uniforme. Del resto, la miglior prova che la distribuzione della cementite, quale l'abbiamo osservata, non è dovuta a variazioni della concentrazione del carbonio nei vari strati della zona cementata, causate da variazioni dell'andamento del processo della cementazione, la si trova nel fatto che la distribuzione della cementite negli strati successivi non è uguale in tutte le parti del cilindretto: ciò che invece dovrebbe necessariamente verificarsi se fosse vera l'ipotesi ora enunciata. Così il nostro fotogramma 3° riproduce un altro tratto della zona cementata della stessa provetta alla quale si riferisce il fotogramma 4°, e in questo secondo tratto abbiamo una sola zona ipereutectica all'orlo esterno della sezione.

Quest'ultima osservazione esclude anche immediatamente che la diminuzione della concentrazione del carbonio che si verifica, nei vari casi citati, alla superficie esterna dei pezzi cementati possa esser dovuta — invece che a fenomeni di liquazione della cementite — a fenomeni (del resto " a priori „ inverosimili, date le condizioni sperimentali nelle quali ci siamo posti) di " inversione „ del processo della cementazione (1). Alla

(1) A fenomeni di " inversione „ del processo dell'affinazione della ghisa (mediante miscele di anidride carbonica ed ossido di carbonio) attribuì il Wüst (" Metallurgie „ V, 1908, pag. 7-12) variazioni della concentrazione

Digitized by Google

stessa esclusione conduce, oltre che l'esame del fotogramma 4°, anche quello del nostro fotogramma 2°, il quale riproduce un altro tratto della stessa sezione della provetta alla quale si riferisce il fotogramma 1°: anche qui appare, infatti, una " vena „ di cementite la quale, attraversando tutta la zona eutectica, raggiunge l'estremo orlo esterno della sezione. Del resto apparrebbe anche assai poco verosimile che un supposto processo di affinazione si limitasse *sempre* a ridurre la concentrazione del carbonio esattamente al valore 0,9 % : e ciò sopra tutto quando si osservi che i fenomeni descritti si verificano in un grande numero di casi, per tutte le cementazioni eseguite con cementi gassosi e spinte fino a raggiungere elevate concentrazioni del carbonio nelle zone cementate. Così fra i cilindri cementati ottenuti nelle esperienze riferite nella Tabella II, oltre ai già citati, presentano una zona eutectica *esterna, seguìta* da una zona ipereutectica più profonda, ancora quelli di acciaio *B* corrispondenti alla 3ª, alla 4ª ed alla 8ª esperienza. Il nostro fotogramma 5 riproduce, ad esempio, l'orlo di una sezione del cilindretto cementato nella 3ª esperienza della Tabella II.

Sono ben note le difficoltà che si incontrano sempre nella pratica per far sì che il riscaldamento che precede la tempra dei pezzi cementati valga a far sparire tutti i cristalli di cementite, la cui presenza nel pezzo temprato è causa di pericolosi fenomeni di fragilità. È quindi facile capire quanto tali difficoltà siano accresciute dai fenomeni di liquazione che abbiamo studiati poco fa; abbiamo, infatti, veduto che tali fenomeni producono un " accumularsi „, in determinate regioni del pezzo cementato, di cristalli di cementite di grandi dimensioni, i quali ben di rado passano di nuovo totalmente in soluzione

del carbonio analoghe a quelle da noi osservate (ora ed altre volte) negli acciai cementati. — Abbiamo però già dimostrato l'inverosomiglianza dell'ipotesi del Wüst, sostituendola con un'altra, fondata sugli stessi principî sui quali ci basiamo per spiegare i fenomeni dei quali ora ci occupiamo (Vedi " Rendic. R. Acc. dei Lincei „, 1908, pag. 662-667 e 748-754). Abbiamo, poi, già accennato all'assoluta ed evidente impossibilità che tali fenomeni di inversione si verifichino nelle cementazioni eseguite mediante idrocarburi.

Digitized by Google

nel ferro γ, durante il riscaldamento che precede la tempra, qualora tale riscaldamento non venga prolungato in modo difficilmente compatibile colle esigenze della pratica. Le caratteristiche di questo fatto sono poste in evidenza — in condizioni appositamente esagerate, per renderle più chiare — dall'esame della superficie di frattura del cilindretto di acciaio *B*, cementato nelle condizioni indicate per la 3ª esperienza della nostra Tabella II, lasciato raffreddare lentamente dopo la cementazione, riscaldato per 10 minuti a 900° e temprato da 850° in acqua a 15°. Il nostro fotogramma 6° riproduce appunto, coll'ingrandimento di tre diametri, una tale superficie di frattura. In esso si vedono chiaramente i grossi cristalli fragili costituenti precisamente la zona nella quale — come dimostra il fotogramma 5° — si è accumulata la cementite. Il fotogramma 5° mostra infatti che tale " accumularsi „ della cementite si è verificato nella zona che segue lo strato eutectico superficiale dello spessore di un millimetro; ed è appunto questa la zona nella quale appare la struttura giù grossolanamente cristallina della superficie di frattura.

Da quanto abbiamo riferito risulta sempre più chiara l'importanza pratica di tutti quei mezzi che permettono di evitare i fenomeni di liquazione della cementite nei pezzi di acciaio cementati. Tali mezzi abbiamo già indicati altra volta (1), ed abbiamo veduto che possono dividersi in due gruppi principali, a seconda che consistono in una modificazione del processo di cementazione o del processo di tempra che segue la cementazione. Non vi è dubbio che i primi sono i più sicuri: ma quando non si possa ricorrere ad essi, l'eseguire almeno una doppia tempra, nelle condizioni che abbiamo altra volta indicate (2), potrà in molti casi evitare gravi accidenti. E ciò dimostrano chiaramente gli esempî riportati nelle pagine che precedono.

Torino. Laboratorio di Chimica metallurgica e Metallografia del R. Politecnico. Febbraio 1910.

(1) L. c.
(2) L. c.

Digitized by Google

Gradiente, rotazione e divergenza in una superficie.

Nota di C. BURALI-FORTI (Torino).

Le regole generali, ormai note (*), di calcolo assoluto delle *omografie*, sono stabilite nell'ipotesi che tali omografie operino in campi vettoriali continui a *tre dimensioni*. Se il punto, del quale i vettori del campo sono funzioni, varia in una superficie Σ, allora i suoi spostamenti, in ogni posizione, hanno luogo in un campo vettoriale a due dimensioni, e le regole di calcolo omografico possono subire delle modificazioni. Le questioni che si presentano in tale ipotesi si risolvono facilmente; pure crediamo utile esporle e risolverle, per toglier di mezzo alcune difficoltà che certamente si presentano a chi inizia lo studio del nuovo calcolo assoluto.

1. — Il punto P vari in una superficie Σ, e sia $\boldsymbol{N}$ un vettore unitario normale a Σ in P ed avente un verso stabilito rispetto a Σ.

Il vettore $\boldsymbol{N}$ è funzione del punto P e sorge spontanea la considerazione della omografia σ, *derivata di* $\boldsymbol{N}$ *rispetto a* P,

$$\sigma = \frac{d\boldsymbol{N}}{dP}. \tag{1}$$

Per definizione (O. v., n. 20) (**) σ è l'operatore che applicato ad uno spostamento dP qualsiasi di P, produce il *corrispondente* spostamento $d\boldsymbol{N}$ di $\boldsymbol{N}$,

$$\sigma dP = d\boldsymbol{N}. \tag{2}$$

(*) C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Omografie vettoriali con applicazioni alle derivate rispetto ad un punto e alla fisica-matematica* (G. B. Petrini, Torino 1909).

(**) Con l'abbreviazione "O. v." indichiamo il libro, già citato, *Omografie vettoriali...*

Digitized by Google

È chiaro che se gli spostamenti dP possono avvenire, *almeno*, in tre direzioni non complanari, allora la condizione (2) definisce (purchè esista) l'operatore σ in un campo a tre dimensioni. Ma se, come per P variabile in Σ, dP può variare soltanto in un piano α, allora la (2) definisce σ per *tutte* le direzioni parallele ad α, e occorre ancora conoscere, ad es., il valore di $\sigma\boldsymbol{N}$ perchè σ sia individuato come operatore in un campo a tre dimensioni.

Per P variabile in Σ la (2) definisce, dunque, σ per le direzioni giacenti nel piano tangente a Σ in P; vale a dire σ ha, *come i quaternioni* (*), un campo di applicazione a due dimensioni.

Ora se noi vogliamo applicare il calcolo omografico in tutta la sua generalità, e, quindi, non limitarne affatto la potenza, è necessario fare in modo che σ rimanga operatore in un campo a tre dimensioni. Tale scopo può raggiungersi in uno qualunque dei due modi A, B, seguenti.

A. — La (2) definisce σ per *tutte* le direzioni normali ad $\boldsymbol{N}$. Basterà dunque dare a $\sigma\boldsymbol{N}$ un valore determinato perchè σ risulti definita in un campo a tre dimensioni. È però certo che tale valore di $\sigma\boldsymbol{N}$ non è del tutto in nostro arbitrio.

Se per un momento supponiamo che P vari in un campo continuo a tre dimensioni e $\boldsymbol{N}$ sia vettore unitario funzione di P, allora da

$$\boldsymbol{N} \times d\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N} \times \sigma dP = 0$$

si trae subito (O. v., n. 9, [6])

$$\mathrm{K}\sigma\boldsymbol{N} \times dP = 0; \tag{3}$$

ma se P varia in un campo continuo a tre dimensioni dP può assumere tre direzioni non complanari e la (3) dice che $\mathrm{K}\sigma\boldsymbol{N}$ è normale a tre direzioni distinte, cioè

$$\mathrm{K}\sigma\boldsymbol{N} = 0. \tag{4}$$

Se, invece, P varia sulla superficie Σ la (3) dice soltanto che $\mathrm{K}\sigma\boldsymbol{N}$ è normale a qualsiasi direzione del piano tangente, cioè che $\mathrm{K}\sigma\boldsymbol{N}$ è vettore parallelo ad $\boldsymbol{N}$.

(*) Non è però un quaternione, ma un operatore più generale.

Digitized by Google

Non faremo dunque nulla di contrario alle proprietà *generali* delle omografie, anzi conserveremo la *continuità*, assumendo la (4) per assegnare a σ la condizione che le manca affinchè possa operare nel campo a tre dimensioni dei vettori (*).

B. — Si consideri il campo Γ *continuo a tre dimensioni* formato dai punti

$$Q = P + r\mathcal{N},$$

variando r in un intervallo, *contenente nel suo interno lo zero*, (o da $+\infty$ a $-\infty$) tale che da ogni punto Q del campo si possa condurre una sola normale QP a Σ (o ad una parte di Σ). In tali ipotesi ad ogni punto Q di Γ corrisponde un solo punto P di Σ, e $\mathcal{N}$, che è funzione di P, è pure funzione di Q, ed è *determinata* (supposta esistente) l'omografia

$$\alpha = \frac{d\mathcal{N}}{dQ}.$$

Ciò posto *definiremo* σ come il valore di α per $r = 0$

$$\sigma = (\alpha)_{r=0},$$

ovvero in punti nei quali si presentino delle singolarità

$$\sigma = \lim_{r=0} \alpha.$$

L'omografia σ così definita opera in un campo a tre dimensioni, il campo Γ *determinato da* Σ, e si ritrovano le proprietà già ottenute col metodo A (**).

2. — Una volta ottenuta σ come omografia in un campo a tre dimensioni, la *rotazione* e la *divergenza* di un vettore $\boldsymbol{u}$ funzione di P sono enti ben determinanti perchè si possono esprimere (O. v., n. 24, 2) mediante i corrispondenti rispetto

(*) Ho seguìto questo metodo nella mia nota, *Alcune nuove espressioni assolute delle curvature in un punto di una superficie* (Rendic. R. Accademia Lincei. vol. XVIII, s. 5ª, 1909).

(**) Cfr. la mia nota, *Sulla geometria differenziale assoluta delle congruenze e dei complessi rettilinei* (Atti Acc. Torino, 1909), specialmente i nⁱ 1 e 3.

Digitized by Google

a σ di due vettori normali ad $\mathcal{N}$ e del vettore $\mathcal{N}$ (*); inoltre risulta determinata la derivata di un qualsiasi vettore $\boldsymbol{u}$ funzione del punto P (O. v., p. 107, 108).

Lo stesso non avviene per il gradiente di un numero φ (e, più in generale, di una omografia) funzione del punto P.

Invero. Il gradiente di φ è definito in generale (O. v., n. 22) come una funzione dell'operatore lineare $\frac{d\varphi}{dP}$ che applicato allo spostamento dP produce il corrispondente incremento $d\varphi$ di φ

$$\frac{d\varphi}{dP}\, dP = d\varphi\,;$$

ed è chiaro che potendo avere dP soltanto delle direzioni normali ad $\mathcal{N}$ ci rimane, come col metodo A, da stabilire quale, almeno, è il valore, ad es., di

$$\frac{d\varphi}{dP}\, \mathcal{N}.$$

Anche per il gradiente si può operare in due modi, che esponiamo nei seguenti n^i 3, 4, corrispondenti ai modi A, B esposti nel n. 1.

3. — Per non fare confusione tra il gradiente, che si indica con grad, ottenuto nel campo a tre dimensioni, e quello che noi vogliamo ora considerare *nel piano tangente a* Σ *in* P, indicheremo quest'ultimo con Grad φ in luogo di grad φ.

Definiremo il Grad φ, *come vettore normale ad* $\mathcal{N}$, valendoci della ordinaria proprietà

$$\text{Grad}\,\varphi \times dP = d\varphi \tag{5}$$

inteso che dP possa avere soltanto direzioni normali ad $\mathcal{N}$.

Grad φ così definito è un vettore normale ad $\mathcal{N}$ e normale in P alla linea di Σ di equazione $\varphi = \text{cost}$ (**), e quindi

$$\mathcal{N} \wedge \text{Grad}\,\varphi$$

ha la direzione della tangente in P alla linea $\varphi = \text{cost}$.

(*) Cfr. la mia nota, *Sulla rappresentazione sferica di Gauss*, Atti Istituto Veneto, 1910.

(**) Cfr. le mie due note citate dei Lincei e Istituto Veneto.

Digitized by Google

Nel campo a tre dimensioni la rotazione del gradiente è costantemente nulla. Non avviene lo stesso per la

$$\text{rot Grad}\,\varphi$$

che, in generale, è vettore non nullo ma sempre normale ad N,

$$N \times \text{rot Grad}\,\varphi = 0 . \tag{6}$$

Ciò si dimostra facilmente. Siano dP e δP due spostamenti qualunque di P; si ha

$$\text{rot Grad}\,\varphi \times dP \wedge \delta P = (d\,\text{Grad}\,\varphi) \times \delta P - (\delta\,\text{Grad}\,\varphi) \times dP \ (*);$$

ma applicando δ e d alle due condizioni

$$d\varphi = \text{Grad}\,\varphi \times dP, \qquad \delta\varphi = \text{Grad}\,\varphi \times \delta P$$

si ha subito

$$\text{rot Grad}\,\varphi \times dP \wedge \delta P = 0$$

che per esser $dP \wedge \delta P$ parallelo ad N dimostra la (6).

Questa ed altre proprietà possono permettere di assegnare a $\frac{d\varphi}{dP}\,N$ un conveniente valore. Ma tutto ciò può essere evitato definendo σ nel modo B, cioè unendo alla superficie Σ il campo Γ a tre dimensioni.

4. — Inteso che si operi nel campo Γ il vettore $\text{grad}\,\varphi$ è ben determinato (se esiste). Noi *definiremo* il $\text{Grad}\,\varphi$ come *componente normale di* $\text{grad}\,\varphi$ *rispetto ad* N, cioè porremo

$$\text{Grad}\,\varphi = (N \wedge \text{grad}\,\varphi) \wedge N = \text{grad}\,\varphi - (N \times \text{grad}\,\varphi)\,N. \tag{7}$$

Questa def. di $\text{Grad}\,\varphi$ concorda con quella data nel n. 3. Moltiplicando $(\times)$ i due membri della (7) per dP e ricordando che $N \times dP = 0$ si ha la (5). Operando nei due membri della (6) con rot e ricordando che $\text{rot grad}\,\varphi = 0$ si ha (O. v., n. 24, [7])

$$\text{rot Grad}\,\varphi = -(N \times \text{grad}\,\varphi)\,\text{rot}\,N - \{\text{grad}\,(N \times \text{grad}\,\varphi)\} \wedge N;$$

(*) C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Elementi di calcolo vettoriale*..... (N. Zanichelli, Bologna, 1909), p. 66, n. 3. — Oppure O. v., n. 24, 8 [1].

Digitized by Google

ma (Lincei, l. c.) $\operatorname{rot} \boldsymbol{N} = 0$ e quindi moltiplicando ($\times$) i due membri per $\boldsymbol{N}$ si ha la (6).

Non moltiplicando per $\boldsymbol{N}$ i due membri si ha la formula

$$\operatorname{rot}\operatorname{Grad}\varphi = \boldsymbol{N} \wedge \{\operatorname{grad}(\boldsymbol{N} \times \operatorname{grad}\varphi)\}$$

che stabilisce l'esatta corrispondenza tra $\operatorname{rot}\operatorname{Grad}\varphi$ e $\operatorname{grad}\varphi$.

Risulta chiaramente da quanto abbiamo ora esposto che il modo B, cioè la considerazione del campo Γ a tre dimensioni, toglie qualsiasi incertezza sull'uso delle formule generali delle omografie vettoriali (*), e quindi il modo B è preferibile al modo A.

Volendo, per le superfici, considerare il gradiente di φ sul piano tangente è opportuno far uso della notazione $\operatorname{Grad}\varphi$ in luogo di $\operatorname{grad}\varphi$; ma ciò non è necessario purchè si tenga presente (come abbiamo fatto nei lavori precedenti) il significato speciale del gradiente sul piano tangente.

Quanto ora abbiamo esposto permette di ottenere, *senza coordinate,* resultati che si ottengono con cinque, o almeno, con due coordinate. Vediamone qualche esempio.

5. — Cominciamo col dimostrare che: *se* φ *è una soluzione della equazione differenziale* (di LAPLACE)

$$\operatorname{div}\operatorname{Grad}\varphi = 0 \tag{8}$$

allora $\boldsymbol{N} \wedge \operatorname{Grad}\varphi$ *è il gradiente di un numero* ψ *funzione di* P.

(*) Notiamo ancora che posto

$$\varphi = f(P)$$

alla (7) si può dare la forma

$$\operatorname{grad} f(P) = \operatorname{Grad} f(P) + \left\{\frac{\partial f(P + r\boldsymbol{N})}{\partial r}\right\}_{r=0} \boldsymbol{N}.$$

Invero. Per r infinitesimo si ha, a meno di infinitesimi, (O. v., n. 23, [3])

$$f(P + r\boldsymbol{N}) = f(P) + \frac{df(P)}{dP}\, r\boldsymbol{N} = f(P) + r\boldsymbol{N} \times \operatorname{grad} f(P)$$

che dimostra quanto abbiamo affermato.

Digitized by Google

Siano $\psi_1 = \text{cost.}$ le linee di Σ traiettorie ortogonali delle linee $\varphi = \text{cost.}$ soluzioni della (8). Allora $\text{Grad}\,\varphi$ è normale a $\text{Grad}\,\psi_1$, cioè esiste un numero h, funzione di P, per il quale

$$(a) \qquad \text{Grad}\,\varphi = h\,\mathcal{N} \wedge \text{Grad}\,\psi_1 .$$

Operando nei due membri con div e tenendo conto della (8) si ha (O. v., n. 24, [8], [9])

$$0 = h\{\text{Grad}\psi_1 \times \text{rot}\,\mathcal{N} - \mathcal{N} \times \text{rot}\,\text{Grad}\psi_1\} + \text{grad}h \times \mathcal{N} \wedge \text{Grad}\psi_1 ;$$

ma $\text{rot}\,\mathcal{N}$ è nulla e $\text{rot}\,\text{Grad}\,\psi_1$ è normale ad $\mathcal{N}$ (per la 6); inoltre, per la (7), si può nell'ultimo termine sostituire $\text{Grad}\,h$ a $\text{grad}\,h$; dunque

$$\text{Grad}\,h \wedge \text{Grad}\,\psi_1 \times \mathcal{N} = 0 .$$

Osservando ora che i due gradienti (in Σ) di h e ψ_1 sono normali ad $\mathcal{N}$, l'eguaglianza precedente dice che $\text{Grad}\,\psi_1$ è parallelo a $\text{Grad}\,h$, cioè che

$$\text{Grad}\,\psi_1 = k\,\text{Grad}\,h ;$$

moltiplicando ($\times$) per dP si ha, per la (5),

$$d\psi_1 = k\,dh$$

la quale prova che h *è funzione di* ψ_1.

Se allora poniamo

$$h\,\text{Grad}\,\psi_1 = \text{Grad}\int h\,d\psi_1 = -\,\text{Grad}\,\psi$$

da (a) risulta

$$\text{Grad}\,\varphi = -\,\mathcal{N} \wedge \text{Grad}\,\psi$$

e ancora

$$\mathcal{N} \wedge \text{Grad}\,\varphi = (\mathcal{N} \wedge \text{Grad}\,\psi) \wedge \mathcal{N}$$

ed eseguendo il doppio prodotto vettoriale

$$\mathcal{N} \wedge \text{Grad}\,\varphi = \text{Grad}\,\psi .$$

Digitized by Google

È chiaro che φ, ψ (soluzioni coniugate della (8) (*)) sono i *parametri isometrici* del *sistema isotermo* $\varphi = \text{cost.}$, $\psi = \text{cost.}$, perchè

$$\operatorname{Grad}\varphi \times \operatorname{Grad}\psi = 0 \qquad \text{e} \qquad (\operatorname{Grad}\varphi)^2 = (\operatorname{Grad}\psi)^2.$$

Risulta pure subito che: *se* θ *è numero funzione di* P *le linee* $\theta = \text{cost.}$ *formano con le loro traiettorie ortogonali un sistema isotermo solamente quando*

$$\frac{\operatorname{div}\operatorname{Grad}\theta}{(\operatorname{Grad}\theta)^2} \text{ } \textit{è funzione di } \theta.$$

Posto $\varphi = f(\theta)$ dovrà essere verificata la (8). Ma, indicando con gli apici le derivate rispetto a θ,

$$\operatorname{Grad}\varphi = f' \operatorname{Grad}\theta$$

$$\operatorname{div}\operatorname{Grad}\varphi = f' \operatorname{div}\operatorname{Grad}\theta + \operatorname{grad} f' \times \operatorname{Grad}\theta = 0$$

e per la (7)

$$f' \operatorname{div}\operatorname{Grad}\theta + \operatorname{Grad} f' \times \operatorname{Grad}\theta = 0;$$

ma si ha pure

$$\operatorname{Grad} f' = f'' \operatorname{Grad}\theta$$

e quindi

$$\frac{\operatorname{div}\operatorname{Grad}\theta}{(\operatorname{Grad}\theta)^2} = -\frac{f''}{f'}.$$

Viceversa, questa verificata vale la (8) per φ.

Dimostriamo infine che: *le linee* $\varphi = \text{cost.}$ *soddisfacenti alla equazione*

$$(\operatorname{Grad}\varphi)^2 = 1, \tag{9}$$

hanno per traiettorie ortogonali delle geodetiche delle quali φ *è l'arco.*

(*) Anche ψ è soluzione della (8) perchè essendo

$$\operatorname{Grad}\psi = \boldsymbol{N} \wedge \operatorname{Grad}\varphi$$

si ha subito

$$\operatorname{div}\operatorname{Grad}\psi = \operatorname{Grad}\varphi \times \operatorname{rot}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{N} \times \operatorname{rot}\operatorname{Grad}\varphi = 0.$$

Digitized by Google

Se $\psi = \text{cost.}$ sono le traiettorie ortogonali delle linee $\psi = \text{cost.}$ si ha

$$\frac{\text{Grad}\,\psi}{\text{mod Grad}\,\psi} = \pm\, \boldsymbol{N} \wedge \text{Grad}\,\varphi$$

e quindi

$$\text{div}\,\frac{\text{Grad}\,\psi}{\text{mod Grad}\,\psi} = \pm \{\text{Grad}\,\varphi \times \text{rot}\,\boldsymbol{N} - \boldsymbol{N} \times \text{rot Grad}\,\varphi\} = 0;$$

ma il primo membro è la curvatura geodetica (Lincei, l. c.) nella direzione della tangente in P alla linea $\psi = \text{cost.}$ e quindi il teorema è dimostrato.

6. — Sia O un punto fisso ed $\boldsymbol{i}$ un vettore unitario costante. Indichiamo: con x la distanza di P dal piano uscente da O e normale ad $\boldsymbol{i}$; con ρ il semiquadrato della distanza di P da O; con w la distanza di O dal piano tangente a $\boldsymbol{\Sigma}$ in P. Cioè poniamo

$$(10) \qquad x = (P - O) \times \boldsymbol{i}, \qquad \rho = \frac{1}{2}(P - O)^2, \qquad w = (P - O) \times \boldsymbol{N}.$$

Differenziando la prima delle (10) si ha

$$dx = \boldsymbol{i} \times dP$$

da cui, come è ben noto, $\text{grad}\,x = \boldsymbol{i}$, e quindi per la (7)

$$(11) \qquad \text{Grad}\,x = (\boldsymbol{N} \wedge \boldsymbol{i}) \wedge \boldsymbol{N} = \boldsymbol{i} - (\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{i})\,\boldsymbol{N}\ (*).$$

(*) Per gli ordinari simboli Δ_1, Δ_2, ∇ si ha

$$\Delta_1\varphi = (\text{Grad}\,\varphi)^2, \quad \Delta_2\varphi = \text{div Grad}\,\varphi$$
$$\nabla(\varphi, \psi) = \text{Grad}\,\varphi \times \text{Grad}\,\psi.$$

Con tali simboli la curvatura geodetica per φ è espressa dalla formula

$$\frac{\Delta_2\varphi}{\sqrt{\Delta_1\varphi}} + \nabla\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{\Delta_1\varphi}}\right)$$

che si ottiene dalla nostra, più semplice.

$$\text{div}\,\frac{\text{Grad}\,\varphi}{\text{mod Grad}\,\varphi}$$

operando con la [8] a pag. 57 delle O. v.

Si osservi ancora che dalla (11) si ha subito

$$\Delta_1 x = (\text{Grad}\,x)^2 = \text{sen}^2(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{i})$$

che è la formula ordinaria.

Digitized by Google

Per il gradiente del coseno dell'angolo che N forma con i, cioè per il gradiente di $N \times i$, si ha subito (O. v., p. 51, [5])

$$\operatorname{grad}(N \times i) = \sigma i$$

e poichè σi è normale ad N si ha pure

$$\text{(12)} \qquad \operatorname{Grad}(N \times i) = \operatorname{grad}(N \times i) = \sigma i \ (*).$$

Dalla seconda forma della (11) si trae (O. v., p. 57, [8])

$$\operatorname{div}\operatorname{Grad} x = \operatorname{div} i - (N \times i)\operatorname{div} N - N \times \operatorname{grad}(N \times i);$$

(*) Se x è vettore qualunque si ha (Cfr. la mia nota, *Una dimostrazione assoluta del teorema di Gauss*, ..., Rendic. Acc. Lincei 1909)

$$R\sigma x = R\sigma\{(N \wedge x) \wedge N + (N \times x) N\} =$$
$$= \sigma(N \wedge x) \wedge \sigma N + (N \times x) R\sigma N = (I_2\sigma)(N \times x) N$$

e quindi, per la nota identità (O. v., p. 24, [2])

$$\sigma^2 = (I_1\sigma)\sigma - I_2\sigma + R\sigma$$

si ha

$$\sigma^2 x = (I_1\sigma)\sigma x - \{(I_2\sigma) x - (N \times x) N\}.$$

Da questa formula si trae

$$(\sigma i)^2 = \sigma i \times \sigma i = i \times \sigma^2 i = (I_1\sigma)\, i \times \sigma i - (I_2\sigma)\{1 - (N \times i)^2\}.$$

Se ora i, j, k formano un sistema ortogonale destrogiro, e ricordiamo (O. v., p. 8, [4]) che

$$I_1\sigma = i \times \sigma i + j \times \sigma j + k \times \sigma k$$

si ha subito

$$(a) \qquad (\sigma i)^2 + (\sigma j)^2 + (\sigma k)^2 = (I_1\sigma)^2 - 2I_2\sigma$$

che, confrontata con la (12), dà una nota formula, osservando che il 2° membro è la somma dei quadrati delle curvature principali di Σ in P.

La (a) si può dimostrare più facilmente senza calcolare σ^2 (che a noi occorre in seguito). Da O. v., p. 20, [15] si ha, per $\alpha = \beta = \sigma$.

$$I_1\sigma^2 = (I_1\sigma)^2 + 2I_2\sigma - I_2(2\sigma) = (I_1\sigma)^2 - 2I_2\sigma$$

e quindi osservando che

$$(\sigma i)^2 + (\sigma j)^2 + (\sigma k)^2 = i \times \sigma^2 i + \ldots = I_1\sigma^2$$

si ha subito la (a).

Digitized by Google

ma la div $\boldsymbol{i}$ è nulla, la div $\boldsymbol{N}$ vale $I_1\sigma$ (Lincei, l. c.) e, per la (12), grad $(\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{i})$ è normale ad $\boldsymbol{N}$; dunque

$$\text{(13)} \qquad \text{div Grad}\, x = -(I_1\sigma)\, \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{i}$$

che è una notevole formula di BELTRAMI (*).

È notevole l'espressione della derivata rispetto a P di Grad x. Dalla seconda forma della (11) si ha (O. v., p. 53, [11])

$$\frac{d\,\text{Grad}\, x}{dP} = -\{(\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{i})\sigma - H\}\, \text{grad}\,(\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{i}),\, \boldsymbol{N}\}$$

e quindi per la (12)

$$\text{(14)} \qquad \frac{d\,\text{Grad}\, x}{dP} = -(\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{i})\sigma - H(\sigma\boldsymbol{i}, \boldsymbol{N}).$$

L'invariante primo di questa derivata dà la formula (13); il vettore dà (O. v., p. 21)

$$\text{(15)} \qquad \text{rot Grad}\, x = \boldsymbol{N} \wedge \sigma\boldsymbol{i}.$$

Da questa, con le formule precedenti e con l'espressione (in nota) di σ^2, si hanno le formule

$$\text{(16)} \qquad \sigma\boldsymbol{i} = (\text{rot Grad}\, x) \wedge \boldsymbol{N}$$

$$\text{(17)} \qquad \sigma^2\boldsymbol{i} = (I_1\sigma)\,(\text{rot Grad}\, x) \wedge \boldsymbol{N} - (I_2\sigma)\,\text{Grad}\, x.$$

Per il differenziale di ρ si ha

$$d\rho = (P - O) \times dP$$

e quindi

$$\text{grad}\,\rho = P - O$$

che, per la (7), dà

$$\text{(18)} \qquad \text{Grad}\,\rho = \{\boldsymbol{N} \wedge (P - O)\} \wedge \boldsymbol{N} = P - O - w\boldsymbol{N}\ (**).$$

(*) Applicando alla 1ª forma della (11) si ha

$$\text{div Grad}\, x = \boldsymbol{N} \times \text{rot}\,(\boldsymbol{N} \wedge \boldsymbol{i})$$

e da O. v., p. 58, [11] si ha

$$\text{div Grad}\, x = \boldsymbol{N} \times \{\sigma\boldsymbol{i} - (I_1\sigma)\,\boldsymbol{i}\}$$

che, per esser $\boldsymbol{N}$ normale a $\sigma\boldsymbol{i}$, dà ancora la (13).

(**) Da questa si ha subito la formola ordinaria

$$\Delta_1\rho = (\text{Grad}\,\rho)^2 = (P - O)^2 + w^2 - 2w(P - O) \times \boldsymbol{N} = 2\rho + w^2 - 2w^2 = 2\rho - w^2.$$

Digitized by Google

Per il differenziale di w si ha, osservando che dP è normale ad $\boldsymbol{N}$,

$$dw = dP \times \boldsymbol{N} + (P - O) \times d\boldsymbol{N} = (P - O) \times \sigma dP = \sigma (P - O) \times dP;$$

e poichè $\sigma(P - O)$ è normale ad $\boldsymbol{N}$ si ha

$$\text{Grad}\, w = \text{grad}\, w = \sigma (P - O). \tag{19}$$

Da questa e dalla (18) si ha subito

$$\text{Grad}\, w = \sigma\, \text{Grad}\, \rho \quad (*). \tag{20}$$

Dalla seconda forma della (18) si ha, per regole già citate,

$$\text{div Grad}\, \rho = \text{div}\,(P - O) - w \,\text{div}\, \boldsymbol{N} - \text{grad}\, w \times \boldsymbol{N};$$

osservando ora che

$$\text{div}\,(P - O) = \mathrm{I}_1 \frac{d(P - O)}{dP} = \mathrm{I}_1 1 = 2$$

perchè P varia in Σ, si ha, per la (19),

$$\text{div Grad}\, \rho = 2 - w(\mathrm{I}_1 \sigma). \tag{21}$$

Operando con rot nei due membri della (18), seconda forma, si ha

$$\text{rot Grad}\, \rho = \text{rot}\,(P - O) - w \,\text{rot}\, \boldsymbol{N} - (\text{grad}\, w) \wedge \boldsymbol{N};$$

ma $\text{rot}\, \boldsymbol{N} = 0$ e si ha pure

$$\text{rot}\,(P - O) = 2\,\mathrm{V} \frac{d(P - O)}{dP} = 2\,\mathrm{V}1 = 0,$$

e quindi, per la (19),

$$\text{rot Grad}\, \rho = \boldsymbol{N} \wedge \sigma (P - O), \tag{22}$$

mentre la rot grad ρ vale zero.

(*) Si noti ancora che

$$\text{Grad}\, w = \sigma\, \text{grad}\, \rho.$$

Digitized by Google

Volendo la divergenza di grad w, o, il che equivale per la (19), di Grad w, si ha (O. v., p. 57, [10])

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} w = \operatorname{div} K\sigma(P - O) = I_1\sigma + (\operatorname{grad} K\sigma) \times (P - O);$$

e poichè $K\sigma = \sigma$ si ha

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} w = \operatorname{div}\operatorname{Grad} w = I_1\sigma + (P - O) \times \operatorname{grad}\sigma. \tag{23}$$

La rotazione di grad w non sappiamo esprimerla sotto forma semplice.

Gennaio 1910.

Su di una estensione del teorema di Habich.

Nota di G. B. SANTANGELO, in Palermo.

Il MANNHEIM ha generalizzato il concetto di trocoide a base rettilinea e di podaria di una curva piana rispetto ad un punto del piano (1).

La trocoide può invero esser considerata come la traiettoria M di un punto B, trascinato nel moto di una curva piana A, che si sviluppa sopra una retta; e la podaria come il luogo P delle proiezioni del punto sulle tangenti alla curva medésima. Però nella ordinaria definizione delle curve M, P, il punto B è supposto fisso rispetto alla curva mobile, se noi gli diamo un movimento proprio, allora al punto di quest'ultima, che è centro istantaneo di rotazione nel moto di sviluppo, corrisponderà ad ogni istante un punto B, la di cui traiettoria assoluta ed il luogo che si ottiene proiettandolo sulla tangente alla curva A, nel punto che gli corrisponde, sono due curve evidentemente più generali della trocoide e della podaria ordinaria.

La trocoide M e la podaria P di una stessa curva A rispetto ad un punto fisso B godono, come è noto, la seguente

(1) Cfr. MANNHEIM, *Recherches géométriques sur les longueurs comparées d'arcs de courbes différentes* [Journal de l'École Impériale Polytechnique, 1ère série, XLe cahier (1863), pp. 205-230]. Vedi anche l'opera dello stesso autore: *Principes et développements de Géométrie cinématique* (Paris, 1894), pp. 511-528.

Digitized by Google

proprietà: se si fa sviluppare P sulla simmetrica di M rispetto alla retta base o viceversa la simmetrica di P su M, in modo che all'inizio del movimento siano a contatto due punti corrispondenti delle due curve, il punto B, trascinato nel movimento, descrive la retta base della trocoide stessa. Ciò precisamente costituisce il teorema di HABICH (2).

Questo teorema in generale non sussiste nel caso che il punto B sia dotato di un movimento proprio, cioè quando si tratti di trocoidi e podarie generalizzate alla maniera di MANNHEIM.

Nella presente Nota ci proponiamo perciò di ricercare la legge con cui il punto B deve muoversi sulla sua traiettoria affinchè il teorema si verifichi (3).

1. — Supponiamo che due punti propri A, B, funzioni definite nell'intervallo $t_0 \div t$ della variabile numerica t, descrivano due curve complanari e che, almeno per i valori di t dell'intervallo, le derivate di A, sino a quelle del secondo ordine, siano vettori determinati non nulli.

Indicando con s l'arco in $A(t)$ contato a partire dal punto $A(t_0)$, con $\boldsymbol{a}$ un vettore unità parallelo alla tangente in $A\left(\boldsymbol{a} = \frac{dA}{ds}\right)$ e supponendo che questo vettore debba rotare di φ radianti, nel senso delle rotazioni positive, per prendere la direzione ed il verso del vettore $B - A$, di cui indicheremo con r il modulo, avremo

$$B = A + re^{i\varphi}\boldsymbol{a}, \tag{1}$$

dove r, φ le supporremo, nell'intervallo considerato, funzioni derivabili e determinate di t.

Si faccia sviluppare la curva A sulla retta (*base*) $O\boldsymbol{u}$, cioè su quella condotta per un punto fisso O parallelamente ad un

(2) Cfr. Mathesis, Tome II (1884), p. 145; od anco: BURALI-FORTI, *Lezioni di Geometria metrico-projettiva* (Torino, 1904), pag. 305.

(3) Mi avvalgo, come strumento di ricerca, dei metodi del calcolo vettoriale sistematicamente esposti, con le notazioni del sistema minimo, dai Proff. C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO: Cfr. *Elementi di Calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria, alla meccanica ed alla fisica-matematica*, Bologna, 1909.

Digitized by Google

vettore unità costante $\boldsymbol{u}$, in modo che all'inizio del movimento il punto $A(t_0)$ coincida con O. Se la curva B è invariabilmente legata con la curva mobile A, al punto A, dove questa tocca la retta base, corrisponderà ad ogni istante un punto B, che sarà soggetto a due moti distinti: uno di trascinamento e l'altro proprio sulla curva B, secondo una legge dipendente da quella con cui si muove il punto A e definita dalle due funzioni r, φ.

La trocoide della curva A, rispetto al punto mobile B, che si viene allora a generare, sarà descritta dal punto

$$M = O + s\boldsymbol{u} + re^{i\varphi}\boldsymbol{u}. \tag{2}$$

Inoltre il punto

$$P = A + r\cos\varphi\,\boldsymbol{a} \tag{3}$$

descrive la podaria generalizzata di A rispetto al punto B e si ha pure, in virtù della (1),

$$P = B - r\sin\varphi\, i\boldsymbol{a}. \tag{4}$$

2. — Differenziamo la (3), tenendo presente la formula di FRENET [4]

$$d\boldsymbol{a} = \frac{ds}{\rho}\, i\boldsymbol{a}, \tag{5}$$

dove ρ misura in valore assoluto il raggio di curvatura in A; avremo

$$dP = d(s + r\cos\varphi)\boldsymbol{a} + r\cos\varphi\,\frac{ds}{\rho}\, i\boldsymbol{a}, \tag{6}$$

da cui

$$i\,dP = d(s + r\cos\varphi)i\boldsymbol{a} - r\cos\varphi\,\frac{ds}{\rho}\,\boldsymbol{a}.$$

Queste due relazioni ci forniscono facilmente l'altra

$$r\cos\varphi\,\frac{ds}{\rho}\,dP + d(s + r\cos\varphi)i\,dP = (\mathrm{mod}\,dP)^2 i\boldsymbol{a},$$

che ci permette di porre la (4) sotto la forma

$$P = B - \frac{r\sin\varphi}{(\mathrm{mod}\,dP)^2}\left[r\cos\varphi\,\frac{ds}{\rho} + id(s + r\cos\varphi)\right]dP$$

---

(4) Cfr. loc. cit. (3), pag. 89.

Digitized by Google

e dalla quale, se $\boldsymbol{p}$ dinota un vettore unità parallelo alla tangente in $P\left(\boldsymbol{p} = \frac{dP}{\mathrm{mod}\, dP}\right)$, si trae subito

$$B = P + \frac{r\sin\varphi}{\mathrm{mod}\, dP}\left[r\cos\varphi\,\frac{ds}{\rho} + id(s + r\cos\varphi)\right]\boldsymbol{p}.$$

3. — Facciamo sviluppare la curva P su quella descritta dal punto

$$M_1 = O + s\boldsymbol{u} + re^{-i\varphi}\boldsymbol{u}, \tag{7}$$

cioè sulla simmetrica di M rispetto alla retta $O\boldsymbol{u}$; supponendo che all'inizio del movimento i punti $P(t_0)$, $M_1(t_0)$ siano coincidenti, la trocoide rispetto al punto mobile B, che allora si ottiene, sarà descritta dal punto

$$\Gamma = M_1 + \frac{r\sin\varphi}{\mathrm{mod}\, dP}\left[r\cos\varphi\,\frac{ds}{\rho} + id(s + r\cos\varphi)\right]\frac{dM_1}{\mathrm{mod}\, dM_1}. \tag{8}$$

Analogamente, indicando con B_1 il simmetrico di B rispetto ad una direzione fissa, la curva descritta dal punto

$$P_1 = B_1 + \frac{r\sin\varphi}{\mathrm{mod}\, dP}\left[r\cos\varphi\,\frac{ds}{\rho} + id(s + r\cos\varphi)\right]\boldsymbol{p},$$

che rappresenta la simmetrica di P rispetto alla direzione precedente, sviluppandosi sulla curva M, darà luogo ad una trocoide generalizzata rispetto a B_1 descritta dal punto

$$\Gamma_1 = M - \frac{r\sin\varphi}{\mathrm{mod}\, dP}\left[r\cos\varphi\,\frac{ds}{\rho} + id(s + r\cos\varphi)\right]\frac{dM}{\mathrm{mod}\, dM}. \tag{9}$$

4. — Differenziando le relazioni (2), (7), si hanno le altre

$$\begin{cases} dM = d(s + r\cos\varphi)\boldsymbol{u} + d(r\sin\varphi)i\boldsymbol{u} \\ dM_1 = d(s + r\cos\varphi)\boldsymbol{u} - d(r\sin\varphi)i\boldsymbol{u}, \end{cases} \tag{10}$$

in virtù delle quali, le (8) e (9) assumono la forma

$$\begin{cases} \Gamma = O + \xi\boldsymbol{u} + \eta i\boldsymbol{u} \\ \Gamma_1 = O + \xi_1\boldsymbol{u} + \eta_1 i\boldsymbol{u}, \end{cases} \tag{11}$$

Digitized by Google

dove si è posto per brevità

$$(12)\quad \begin{cases} \xi = (s+r\cos\varphi) + \dfrac{r\sin\varphi}{\mathrm{mod}dP\,\mathrm{mod}dM_1}\left[r\cos\varphi\dfrac{ds}{\rho} + d(r\sin\varphi)\right]d(s+r\cos\varphi), \\ \eta = \dfrac{r\sin\varphi}{\mathrm{mod}dP\,\mathrm{mod}dM_1}\Big\{[d(s+r\cos\varphi)]^2 - \\ \qquad - d(r\sin\varphi)r\cos\varphi\dfrac{ds}{\rho} - \mathrm{mod}dP\,\mathrm{mod}dM_1\Big\}, \\ \xi_1 = (s+r\cos\varphi) - \dfrac{r\sin\varphi}{\mathrm{mod}dP\,\mathrm{mod}dM}\left[r\cos\varphi\dfrac{ds}{\rho} - d(r\sin\varphi)\right]d(s+r\cos\varphi), \\ \eta_1 = -\dfrac{r\sin\varphi}{\mathrm{mod}dP\,\mathrm{mod}dM}\Big\{[d(s+r\cos\varphi)]^2 + \\ \qquad + d(r\sin\varphi)r\cos\varphi\dfrac{ds}{\rho} - \mathrm{mod}dP\,\mathrm{mod}dM_1\Big\}. \end{cases}$$

Affinchè i punti Γ, Γ_1 descrivano la retta Ou, evidentemente è necessario e basta che si abbia

$$(\Gamma - O) \wedge u = (\Gamma_1 - O) \wedge u = 0,$$

cioè, per le (11),

$$\eta = \eta_1 = 0.$$

Queste condizioni, in virtù delle (12), si traducono nella seguente:

$$(13)\quad [d(s+r\cos\varphi)]^2 \pm d(r\sin\varphi)r\cos\varphi\frac{ds}{\rho} - \mathrm{mod}dP\,\mathrm{mod}dM = 0,$$

giacchè dalle (10) si ha

$$(\mathrm{mod}dM)^2 = (\mathrm{mod}dM_1)^2 = [d(s+r\cos\varphi)]^2 + [d(r\sin\varphi)]^2.$$

Per mezzo poi di questa relazione e dell'altra

$$(\mathrm{mod}dP)^2 = [d(s+r\cos\varphi)]^2 + \left(r\cos\varphi\frac{ds}{\rho}\right)^2,$$

che subito si ricava dalla (6), la (13) si trasforma facilmente e ci dà

$$(14)\qquad r\cos\varphi\frac{ds}{\rho} \pm d(r\sin\varphi) = 0,$$

Digitized by Google

che ci rappresenta adunque la condizione necessaria e sufficiente affinchè il teorema di HABICH si verifichi per le trocoidi e podarie generalizzate. Essa lega le due funzioni r, φ in modo che, lasciando arbitraria la traiettoria del punto B, determina la legge con cui esso vi si muove in dipendenza da quella con cui A si muove sulla propria traiettoria nel moto di sviluppo.

Una interpretazione geometrica della legge suddetta scaturisce dall'osservare che la condizione (14) è equivalente all'altra

$$\operatorname{mod} dM = \operatorname{mod} dP,$$

da cui si trae subito

$$\int_{t_0}^{t} \left(\operatorname{mod} \frac{dM}{dt}\right) dt = \int_{t_0}^{t} \left(\operatorname{mod} \frac{dP}{dt}\right) dt = s;$$

cioè: *affinchè il teorema di* HABICH *si verifichi per la trocoide e la podaria di una curva data rispetto ad punto mobile B, è necessario e basta che questo si muova sulla sua traiettoria in modo che in ogni istante siano eguali gli archi della trocoide e della podaria in questione.* Questo fatto si verifica quando il punto B è fisso in virtù del teorema di STEINER [5].

5. — Dalla relazione (1), differenziando e tenendo presente la (5), si ottiene

$$dB = \left[d(s + r\cos\varphi) - r\sin\varphi \frac{ds}{\rho}\right] \boldsymbol{a} + \left[r\cos\varphi \frac{ds}{\rho} + d(r\sin\varphi)\right] i\boldsymbol{a};$$

posto inoltre

$$K = P + (P - B),$$

od anche, per la (4),

$$K = P - r\sin\varphi i\boldsymbol{a},$$

si ha ancora, invocando le (5) e (6),

$$dK = \left[d(s + r\cos\varphi) + r\sin\varphi \frac{ds}{\rho}\right] \boldsymbol{a} + \left[r\cos\varphi \frac{ds}{\rho} - d(r\sin\varphi)\right] i\boldsymbol{a}.$$

---

[5] Cfr. STEINER, *Vom Krümmungsschwerpunkte ebener Curven* [Crelles Journal, Bd. XLI (1840), pp. 33-63]; vedi anco: BURALI-FORTI, loc. cit. [4], pag. 305.

Digitized by Google

Evidentemente le due condizioni

$$dB \wedge \boldsymbol{a} = dK \wedge \boldsymbol{a} = 0$$

sono equivalenti alla (14); quindi, la legge cercata, con cui il punto B deve muoversi sulla sua traiettoria, deve esser tale che in ogni istante la tangente in esso o nel punto K risulti parallela a quella nel punto A corrispondente (6).

6. — Se ci fermiamo a considerare il primo caso, in virtù del teorema dimostrato, potremo facilmente conchiudere che *se una curva A si sviluppa sopra una retta Ou, trascinando una curva B ad essa invariabilmente collegata, il luogo M dei punti in cui la curva B è successivamente toccata da una retta parallela alla retta base, ed il luogo dei vertici P di un angolo retto, avente un lato costantemente tangente alla curva A e l'altro normale alla B, sono due curve tali che, se la seconda si sviluppa sulla prima, la curva B, trascinata in tal movimento, inviluppa la retta Ou stessa* (7). Se la curva B si riduce ad un punto si ricade evidentemente nel teorema di Habich.

---

(6) Il Mannheim ha invero mostrato sinteticamente che, quando ciò avviene, si verifica la eguaglianza degli archi tra la trocoide e la podaria generalizzata. Cfr. *Géométrie cinématique*, pp. 519-522.

(7) Questo teorema può fornire proprietà cinematiche di curve speciali. Quando la curva A si riduce ad un punto si ottiene un teorema notissimo (Cfr. Mannheim, *Géométrie cinématique*, pp. 256-257).

Palermo, Dicembre 1909.

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 1.

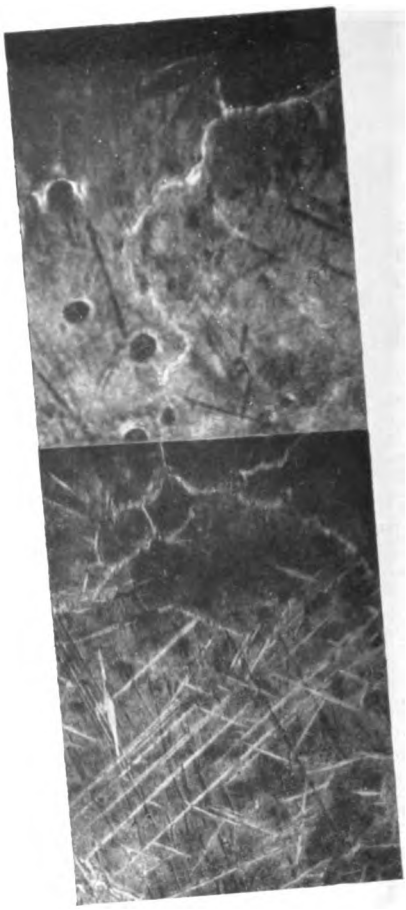


Fig. 2.

Fig. 3.

Digitized by Google

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

Digitized by Google

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 13 Marzo 1910.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti i Soci: NACCARI, Direttore della Classe, SEGRE, PEANO, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, MATTIROLO, SOMIGLIANA, FUSARI e PARONA ff. di Segretario.

Scusano l'assenza il Segretario Senatore CAMERANO ed il Socio SALVADORI.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

Il Presidente legge una lettera del prof. E. SCHIAPARELLI, che ringrazia per il conferimento del XVI premio Bressa, e le lettere dei signori Senatore Benedetto CROCE e prof. G. GENTILE, colle quali ringraziano per il premio loro assegnato.

Si presentano in omaggio all'Accademia:

1° Luigi MOSCA, parole commemorative del Socio MATTIROLO;

2° Francesco VERCELLI, *Le teorie idrodinamiche delle sesse e loro applicazione al calcolo dei periodi e dei nodi delle sesse del Benaco,* dal Socio SOMIGLIANA, a nome del Socio corrispondente Prof. G. CELORIA, Presidente della Commissione per lo studio dei laghi lombardi.

Digitized by Google

Si presentano per la pubblicazione negli *Atti* le note seguenti:

1° P. Voglino, *Ricerche intorno alla " Sclerotinia Ocymi „ n. sp. parassita del Basilico,* dal Socio Mattirolo;

2° M. Ghiglieno, *Su alcuni nuovi derivati trimetilenpirrolici,* dal Socio Guareschi;

3° M. Gramegna, *Serie di equazioni differenziali lineari ed equazioni integro-differenziali,* dal Socio Peano.

Digitized by Google

LETTURE

Ricerche intorno alla " Sclerotinia Ocymi „ n. sp. parassita del " Basilico „.

Nota del Prof. PIERO VOGLINO.

Negli orti di Venaria Reale, in sul finire del settembre (1908), si verificava una disastrosa infezione nei seminati a *Basilico* (*Ocymum basilicum*). Le piante, già ben sviluppate, apparivano di color bruno-rugginoso nelle infiorescenze. Nei fiori terminali, le corolle non potevano svolgersi, il calice imbruniva, mentre, nella porzione basilare dell'infiorescenza, i frutti si mostravano piccoli ed atrofici. Nell'ottobre, i $^2/_3$ superiori della pianta erano di colore giallo-castaneo ed una muffa grigia ne rivestiva la superfice esterna. Poche foglie ancora restavano attaccate ai fusti ed in gran parte marcescenti.

Fra gli individui rivestiti dalla muffa grigia ve n'erano molti colla epidermide che, marcescente e secca, si staccava in strisce lasciando fusti biancastri con numerosi corpuscoli o sclerozii emisferici, duri, neri, disposti in serie longitudinali.

L'esame microscopico mise in evidenza, nei tessuti sotto-epidermici, numerose ife jaline, larghe 4-6-8 μ, ramificate, intrecciantesi a croce ed in fasci di 3 a 4 e con frequenti anastomosi, irregolari nel decorso, con loculi corti e grossi, sferoidali, ellissoidali, clavati, oppure lunghi, stretti, cilindrici. Da fasci di ife ingrossate e prolungantesi a l'esterno, hanno origine dei conidiofori bruno-fuligginosi, inducenti la muffa grigia superficiale.

I conidiofori, a completo sviluppo, sono quasi sempre un po' ingrossati alla base, quindi cilindrici, a numerose ramificazioni ad angolo retto e terminate da ciuffi di conidii inseriti od all'apice del conidioforo, sopra speciali ingrossamenti, o lungo il suo decorso sopra esili e brevi filamenti.

Digitized by Google

I conidii, sferoidali od ovali, hanno un colore grigio-sbiadito e misurano una lunghezza di 10-14-16 μ per 10-12μ di larghezza.

Gli sclerozii appaiono solo nell'ottobre sulle porzioni di fusto essiccate, raramente nei tratti fuligginosi ancora ricoperti dai tessuti corticali e dal deposito grigio-bruno, vellutato, dei conidiofori. Essi sono o strettamente aderenti a l'epidermide od alla porzione legnosa dei cauli o debolmente fissati ai cordoni fibrosi. Hanno forma emisferica od ellissoidale-allungata, colore nero, ed una lunghezza di $^1/_2$ a $^3/_4$ di mm. sino ad un mm. e $^1/_2$; raramente isolati, si formano, per lo più, in serie lineari di 4-5-6 od anche 7 ad 8, per un decorso di 4-5-6 cm., mantenendosi però staccati l'uno dall'altro. In sezione, essi presentano una zona avvolgente tegumentale con una o due serie di loculi romboidali, pentagonali, poliedrici, ovoidali, a membrana nero-fuligginosa e molto resistente dal lato esterno. I loculi grossi sono, in senso radiale, lunghi sino a 14-16μ per 8-10μ, i più piccoli misurano 8-10-12μ per 4-6μ. Sotto alla zona dei loculi colorati si distinguono ancora una o due serie di loculi a membrana incolora, tondeggianti, ovoidali o poliedrici, del diam. di 15-12-8μ: quindi vi è un fitto intreccio di ife larghe 3-5μ, con piccole porzioni, qua e là, dei tessuti della pianta ospite.

I conidiofori ed i conidii non si possono che riferire alla specie fungina *Botrytis cinerea* Pers.. Per definirne bene il rapporto cogli sclerozii ed il parassitismo, ho creduto opportuno sottoporre a germinazione gli sclerozii e procedere quindi ad infezioni artificiali.

Nel novembre, da un certo numero di piante di *Basilico*, che erano state portate in laboratorio (Temper. 14-18° C), ed ivi lasciate per qualche giorno, presi alcuni sclerozii e li misi in sabbia sterilizzata, e tenuta continuamente umida. Altri sclerozii furono staccati, nel gennaio, da piante lasciate a l'aperto e collocati pure in sabbia umida ma sotto a campane. I primi si mantennero, in gran parte, nello stato di quiescenza e quindi si disgregarono. Solo alcuni produssero, dopo pochi giorni, ciuffi di conidiofori e conidii di *Botrytis*. In quelli invece lasciati prima a l'aperto e perciò ben formati, poi collocati in camera umida, si potè ottenere la formazione di apotecii.

Digitized by Google

In uno sclerozio, dopo due mesi, si notò una piccola sporgenza che si prolungò in un esile peduncolo nero, duro, della lunghezza di un mm.. Da questo si svolse, lentamente, un filamento bruno-violaceo poi cereo-violaceo (lungo 2-2,5 mm.), che si allargò in una minuta cupola concolore, larga 1 $^1/_2$-2 mm..

Dopo una ventina di giorni non verificando più alcun ulteriore accrescimento, esaminai il corpo che si era formato e riscontrai in esso tutti i caratteri di un apotecio di *Sclerotinia*. Il peduncolo è formato da filamenti cilindrici, strettamente aderenti fra loro, incolori nell' interno, a membrana leggermente colorata a l'esterno: nella porzione superiore, imeniale, fra numerose parafisi cilindriche ingrossate a clava a l'apice, lunghe 70-75μ, larghe 2 e 4μ nella porzione superiore, spiccano aschi clavato-allungati, di solito più corti delle parafisi (55-60-70 ∪ 6-8) contenenti otto spore ovoidali, in colore (5-8 ∪ 4-5 rar. 6) (fig. 1).

Fig. 1. — Porzione di imenio con parafisi ed aschi (Mic. Kor. oc. 3 ob. 9*).

Per il colore del peduncolo, la grandezza dell'apotecio, delle spore, nonchè per la matrice, credo sia opportuno distinguere questa forma come specie a sè e propongo di indicarla col nome di *Sclerotinia Ocymi*.

" ***Sclerotinia Ocymi*** Voglino. - Stipitata, minuta, carnoso-
" ceracea, castaneo-violacea; stipite tenui, cylindraceo, 2-2,5 mm.
" longo, basim atro, sursum castaneo-violaceo; cupula minuta
" cyathiformi, 1, 5-2 mm. lata, castaneo-violacea; ascis cylin-
" draceo-clavatis, 8 - sporis, 55-70 ∪ 6-8, sporidiis ovoideis, hya-
" linis, 5-8 ∪ 4-5, rar. 6; paraphysibus filiformibus, supra cla-
" vato-incrassatis, 70-75 ∪ 2-4.

" *Hab.* In sclerotio, ad caules *Ocymi basilici*, quae morbo
" efficiuntur. Venaria Reale (Ital. bor.).

Digitized by Google

" Status conidicus, *Botrytem cineream* sistens, in floribus et " caulibus oritur. Sclerotium globosum, vel ellipsoideo-oblongum, " nigrum, 0,5-1,5 mm. diam. „.

Lo sviluppo completo potei osservarlo solo in due apotecii, forse perchè sollevavo troppo di frequente la campana per seguire, colla lente, l'accrescimento. In parecchi sclerozii gli apotecii si mantennero sterili. La germinazione avviene sempre dalla parte piana dello sclerozio ed in seguito alla formazione di una minutissima sporgenza.

Dalle sezioni fatte in quattro sclerozii e nelle varie fasi di germinazione, potei verificare quanto segue.

Verso la zona corticale si spinge un fascio dalla porzione interna, incolora. Le ife disposte senza alcun ordine negli sclerozii in riposo, a l'inizio della germinazione o si allungano direttamente per le estremità od emettono rami i quali, riuniti in fasci, tendono a portarsi verso l'esterno. Il cuneo che si viene così a formare fa ernia dapprima, poi rompe la zona corticale bruna. L'allungamento delle ife avviene dapprima lentamente e la porzione periferica si divide, verso i lati, in brevi loculi i quali si addensano in una fitta zona corticale, con membrana esterna bruna ed indurita. Ma allungandosi più rapidamente, il fascio di ife si protende dal cilindretto nero e si mantiene di consistenza carnosa, di forma cilindrica, di color porporino o bruno-ocraceo. Nel peduncolo, in sezione longitudinale, appaiono ife cilindriche, regolari, larghe 3,5-4μ, con rami verticali ed anastomosi (fig. 2). Verso l'esterno, le ife emettono brevi rami a guisa di loculi ingrossati a clava, ovoidali, sferoidali, larghi da 7 a 12μ. con membrana a tinta ocracea ma non indurita. A l'apice del peduncolo, le ife si restringono nel mezzo ma si ingrossano verso l'esterno e diventano fuligginose. Nella porzione imeniale le ife si intrecciano variamente e prime a protendersi, verso l'alto, sono le parafisi, quindi si originano gli aschi (fig. 3). Quando la cupola è formata, nella zona esterna, periferica, avvolgente l'imenio, e che sporge a guisa di sottile anello dal peduncolo, le ramificazioni delle ife si addensano in un fitto intreccio con membrana bruno-fuligginosa, come nella massa avvolgente dello sclerozio. Ai lati od all'apice dei peduncoli in via di prolungamento, alcuni loculi si ingrossano a clava a guisa di basidi, e producono uno o parecchi microconidi uniti anche in catenelle di 4 o 5, sferici (fig. 4),

Digitized by Google

del diametro di 3 a 4μ come quelli già indicati da altri autori nello

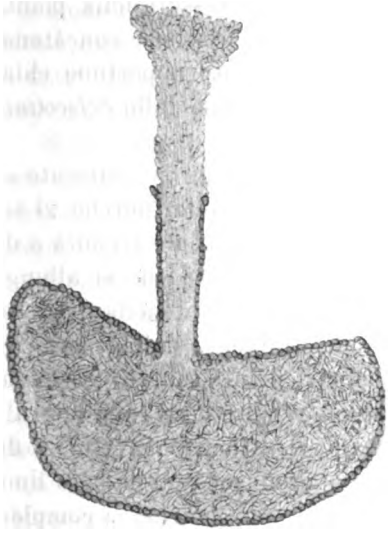


Fig. 2. — Sezione di sclerozio con apotecio in via di formazione (Micros. Koristka, oc. 2, ob. 2).

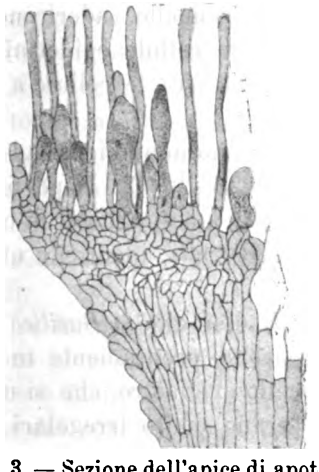


Fig. 3. — Sezione dell'apice di apotecio con parafisi ed aschi in via di formazione (Mic. Kor. oc. 3, ob. 8*).

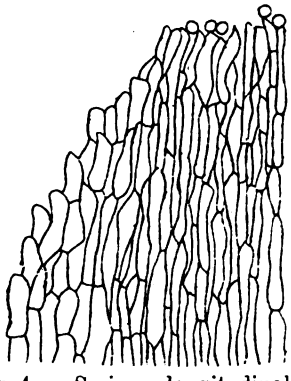


Fig. 4. — Sezione longitudinale di un peduncolo in via di allungamento (Micr. Kor., oc. 3, ob. 8*).

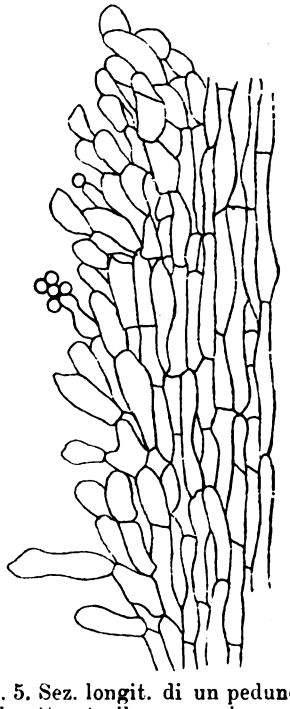


Fig. 5. Sez. longit. di un peduncolo rimasto sterile e con microconidi lateralm. (Mic. Kor., oc. 3, ob. 8*)

sviluppo di varie specie di *Sclerotinia*. Questi microconidi sono abbondanti sui peduncoli che non producono apotecio (fig. 5).

Digitized by Google

La presenza degli sclerozii quasi contemporanea a quella dei conidiofori della *Botrytis*, sui medesimi tessuti della pianta ospite, non potrebbe lasciare dubbio sulla intima concatenazione fra *Botrytis* e *Sclerotinia*, ma ho creduto opportuno chiarire bene il fatto con colture di ascospore prese dalla *Sclerotinia* e di conidi di *Botrytis*.

Le ascospore di *Sclerotinia* germinano anche se collocate su vetrini con goccioline d'acqua, in camere umide, purchè vi sia una temperatura di 12° C. a 20°-22° C.. Da una estremità o da un lato, la spora emette un filamento incoloro che si allunga ben poco, e produce numerosi microconidi a catenella. I microconidi si possono anche formare direttamente dalla spora; di essi non si potè ottenere la germinazione. Il tubetto germinativo della ascospora può anche allungarsi, produrre rami laterali, con ingrossamenti a guisa di organi di attacco, ma non si distende mai in un fitto micelio, le ife producono un numero limitatissimo di ramificazioni, raggiungendo una lunghezza complessiva di 150-200μ.

Le spore germoglianti, trasportate sopra quattro piante sane di *Basilico*, coltivate in vaso e tenute in Laboratorio (temperatura 16-20-22° C), produssero in breve, lateralmente alle ife, numerose ramificazioni che, a guisa di pennello, aderirono ai tessuti della pianta sana disgregandone le cellule epidermiche, e svolgendosi in fitto micelio, specialmente fra le cellule a clorofilla.

Due delle piante infettate si collocarono in ambiente ad alto grado di umidità, con temperatura di 16°-20°-22° C.. Dopo pochi giorni, sulle zone infettate, apparivano fitti cespuglietti di conidiofori fuligginosi con conidi jalini di *Botrytis*, identici a quelli osservati sulle piante a l'aperto.

Seminai anche ascospore in decotti di foglie di *Basilico* resi leggermente gelatinosi. Esse germinarono prontamente in numerose ife, disponendosi in fitto micelio grigiastro, che si mantenne, però, sempre sterile. Le ife erano molto irregolari nel loro decorso, per lo più ingrossate a clava od a fuso (diametro 12-14-16μ) o ristrette sino a 4-6μ; da corti e grossi rami laterali si protendevano numerose proliferazioni di lunghi ed esili (diam. 4μ) filamenti. Altri rami invece si ingrossavano a l'estremità, si contorcevano gli uni sugli altri, con numerose

Digitized by Google

anastomosi, formando dei noduli sferici a fitto intreccio, a guisa di ammassi scleroziali. Ed infatti, in una placca, si osservarono piccoli corpuscoli bruni, lunghi $^1/_2$-1 mm. Questi erano costituiti da fitto intreccio di ife incolore a l'interno, giallo-brune verso l'esterno, molto simili agli sclerozi.

Si può quindi affermare che: *l'ascospora della Sclerotinia produce un micelio parassita, che si svolge in conidiofori, e conidi di Botrytis. Essa può anche produrre micelio sterile e masse scleroziali.*

Nuove colture potranno definire meglio la formazione degli sclerozi che per ora si ottennero, ma imperfetti; bisognerà anche studiare la funzione dei microconidi.

Le spore di *Botrytis*, prese nell'autunno da piante di *Basilico* molto infette, germinano in acqua, in rapporto col grado di calore dell'ambiente. Alle temperature fra 10° C. e 26° C. il tubetto germinativo viene emesso in due o tre ore, ma si allunga molto lentamente. A 30°-32° C. c'è ancora emissione di tubetto germinativo ma di breve durata. A 36° C. cessa lo sviluppo. L'allungamento delle ife si continua sino alla temperatura di 6° C. con un *optimum* fra 14°-20°-24° C.. Nell'acqua, qualunque sia il grado di calore, lo sviluppo si arresta dopo 2 od al più 3 giorni.

Nei decotti, anche molto diluiti, di piante di *Basilico*, ed alle temperature sopra indicate, l'allungamento delle ife, se non più rapido, è molto più prolungato, tanto che si forma, dopo 3 giorni, un fittissimo intreccio di ife bianchicce, che si distendono sino a coprire tutta la placca. Sopra vetrini, in camere umide aerate, il micelio, in pochi giorni, produsse conidiofori e conidi.

La formazione dei conidiofori, alle temperature indicate, è sempre in relazione colla umidità e colla aerazione, aumentando queste è facilitata la produzione dei conidi. Essi si staccano in breve dal conidioforo e, cadendo in ambiente umido, germinano prontamente.

Il conidio germina da una o dalle due estremità, qualche volta emette anche rami laterali. Di solito, da protuberanze sferoidali si allungano ife cilindriche che, a 20-30μ, emettono rami laterali contorti, di varia larghezza e che si dividono, alla lor

Digitized by Google

volta, in altre ramificazioni. Dopo breve sviluppo, a l'estremità di alcuni rami principali, si protendono numerosi rametti a ciuffo, a pennello, i quali tendono a portarsi verso la periferia della coltura ed aderiscono alle pareti del vetrino. Sono questi gli organi d'attacco che inducono l'adesione e la penetrazione del micelio nelle pianticine di *Basilico*.

La facoltà germinativa nei conidi si mantiene anche per due mesi purchè siano tenuti in ambiente non molto umido.

Anche dai loculi bruni dei conidiofori si può avere proliferazione in ife che si distendono in micelio con nuovi conidiofori e conidi.

In due placche a gelatina di succo di *Basilico*, a fitto micelio, e con conidiofori nel solo centro, tenute in ambiente a 12°-14° C., si potè ottenere, verso il margine, dopo circa un mese, la formazione di piccole masse scleroziali, costituite da un nucleo centrale di ife contorte ed addossate strettamente le une alle altre, e da strati avvolgenti di ife segmentate in loculi sferoidali e con membrana giallastra.

Dall'esame di materiale preso dalle colture, a varie riprese, risulterebbe che gli sclerozi si formano da fittissimi ciuffi di ife, disposte parallelamente, e che emettono, verso la base, grossi rami laterali che si allungano in senso orizzontale, si contorcono gli uni sugli altri, e formano, successivamente, l'intreccio di ife che si accresce per nuove unioni, finchè da un lato, e così tutt'attorno, si vanno differenziando le estremità dei rami in loculi a membrana gialliccia.

Conclusioni.

La forma di *Botrytis* parassita del Basilico è uno stadio di sviluppo della *Sclerotinia Ocymi*.

Le ascospore di questa *Sclerotinia* possono produrre, in ambiente poco aerato, micelio che si riduce direttamente in ammassi a forma di sclerozi.

In via normale, il micelio sporifica in forma di *Botrytis* e poi da sclerozi.

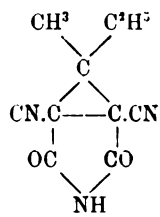
Le spore di *Botrytis* germinano in abbondante micelio con nuovi conidiofori e sclerozi.

Digitized by Google

Su alcuni nuovi derivati trimetilenpirrolici.

Nota II del Dott. MARIO GHIGLIENO.

In una Nota precedente (1) ho descritto due metil·etil·dician·trimetilen·dicarbonimidi isomere (e probabilmente stereoisomere) corrispondenti alla formola:



le quali cogli alcali diluiti anche a temperatura ordinaria svolgono una molecola di ammoniaca.

La prima interpretazione che si presentava alla mente per questa così facile idratazione era che l'azoto che in essa si elimina provenisse dal gruppo imidico, con apertura del corrispondente anello e formazione di acidi dialchil·dician·trimetilen·dicarbonici. La preparazione di questi acidi trimetilenici senza più idrogeno attaccato all'anello sarebbe stata di un certo interesse, viste le difficoltà finora incontrate per ottenere siffatti composti. Con questo scopo avevo anzi cominciato il presente lavoro.

Nella accennata reazione di idratazione non si ha però, com'era supponibile, assorbimento di *due* molecole d'acqua secondo l'equazione:

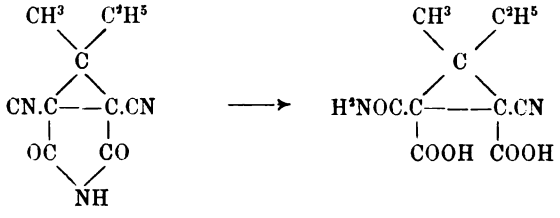
$$C^{10}H^9N^3O^2 + 2H^2O = C^{10}H^{10}N^2O^4 + NH^3$$

(1) *Su alcuni nuovi derivati trimetilenpirrolici*, Nota I, " Atti R. Accad. delle Scienze di Torino „ vol. XLV, Febbraio 1910.

Digitized by Google

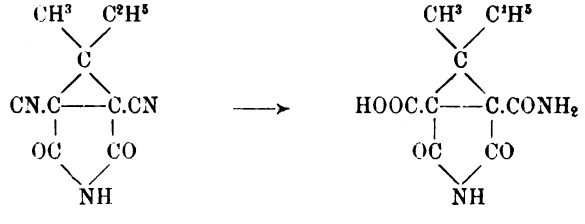
ma invece di *tre*, perchè dai due isomeri primitivi si formano due acidi che corrispondono entrambi alla formola $C^{10}H^{12}N^2O^5$ e non contengono acqua di cristallizzazione.

Per spiegare questa composizione, ammessa l'apertura dell'anello imidico, bisognava pure ammettere che già a freddo e con alcali così diluito (4 %) si fosse anche parzialmente idratato uno dei due gruppi nitrilici, così:



E difatti l'esperienza dimostrò nei due nuovi acidi l'esistenza di un gruppo $— CONH^2$.

Ma una volta stabilita una così facile idratabilità di uno dei gruppi cianici, nasceva logicamente il dubbio che l'idratazione potesse anche avvenire esclusivamente a spese di questi gruppi, restando l'anello imidico inalterato:



E le successive esperienze confermarono pienamente questa supposizione.

Si ha dunque qui un caso degno di nota di due gruppi nitrilici terziari che si idratano — l'uno totalmente e l'altro in parte — con grande facilità, pur essendo per di più in condizioni tali che a priori si potevano ritenere molto sfavorevoli all'idratazione.

È noto infatti che per i nitrili aromatici ed anche piridinici la presenza di radicali alcoolici oppure di gruppi molto

Digitized by Google

negativi in immediata prossimità del —CN ne ostacola più o meno fortemente l'idratazione. Questo fatto fu anche verificato da G. Piccinini (1) appunto nella metiletildicianglutarimide, che differisce dai miei composti solo per due atomi di idrogeno in più e la conseguente mancanza del legame trasversale fra i due atomi di carbonio cui sono attaccati i gruppi —CN, i quali sono perciò secondari. Questi gruppi non poterono infatti essere completamente idratati se non per via indiretta mediante l'acido nitroso. È abbastanza curioso che nei miei composti, con una così grande analogia di costituzione, i gruppi nitrilici, qui diventati terziari, si idratino tanto più facilmente. A meno che la causa di ciò non consista proprio nella formazione del legame trasversale e forse nella conseguente deformazione del nucleo centrale.

In presenza della soda diluita e fredda, in quantità tale che durante la reazione viene anche completamente salificata, uno dei —CN si trasforma in carbossile e l'altro si arresta invece allo stadio di gruppo amidico. In queste condizioni la cosa si capisce facilmente, perchè salificandosi il carbossile formatosi viene a mancare la soda per continuare l'idratazione. Ma anche in presenza di un eccesso di alcali la completa idratazione del secondo gruppo cianico non si raggiunge che con grande stento, dopo varie ore di ebullizione con soda concentratissima.

Di questo così diverso comportamento dei due gruppi nitrilici, o per meglio dire dei due gruppi amidici che da questi si formano, non si riesce a vedere una ragione soddisfacente. Per quanto la formola, così com'è scritta, possa a prima vista far apparire altrimenti, essi sono infatti nella molecola in posizione simmetrica e in condizioni del tutto analoghe. Come già dissi nella mia Nota precedente, essendo i due gruppi nitrilici certamente in posizione *cis* rispetto all'anello trimetilenico, essi devono perciò trovarsi entrambi dalla stessa parte con uno o con l'altro dei due diversi radicali alcoolici.

Solo ammettendo per entrambi i composti la forma ossi-

---

(1) *Idrolisi delle dialchil-dician-glutarimidi,* " Rendic. Soc. Chimica di Roma „, Anno VI, N. 14.

Digitized by Google

drilica vi sarebbe una differenza nei gruppi che fiancheggiano i due —CN, differenza che, sebbene non molto grande, potrebbe essere la causa del diverso comportamento (1). Oppure si potrebbe pensare che l'influenza ostacolante la idratazione del secondo gruppo amidico sia esercitata appunto dal carbossile che si va formando a spese del primo. Riflettendo, anche per spiegare il comportamento tanto diverso degli atomi di idrogeno acidi negli acidi bi- e poli-basici a molecola simmetrica bisogna in fondo ricorrere a supposizioni di questa natura.

Un altro fatto pure degno di nota che emerse dallo studio di questi composti si è che in essi l'aggruppamento imidico, lungi dall'aprirsi con facilità per azione degli alcali, si mostra invece di fronte a questi del tutto stabile, resistendo anche a un'ebollizione di parecchie ore con idrato sodico concentratissimo. Uno studio sistematico della resistenza del gruppo imidico nelle non molte imidi finora note manca tuttora, e credo sia questo il primo caso in cui si constata in esso una stabilità così forte.

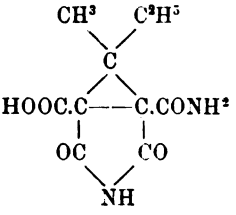
Dal più abbondante dei due amidoacidi isomeri già nominati (forma α) ho ottenuto successivamente tre prodotti di trasformazione in cui la struttura fondamentale non può essere stata modificata. L'esame del potere acido di questi composti, riassunto a pagina seguente insieme colle due formole di struttura possibili per ognuna di essi, rende senz'altro persuasi della conservazione dell'anello imidico inalterato in tutti questi composti.

Ricorderò che nei due isomeri derivati bicianici l'idrogeno imidico ha carattere di acido monobasico.

---

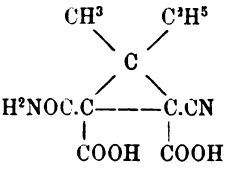
(1) Ciò non è sufficiente a giustificare una preferenza per la isomera forma ossidrilica anzichè per quella chetonica, ma comunque resti inteso che l'aver io conservato quest'ultima nella scrittura non implica punto una scelta fra le due forme possibili, che ritengo per ora tutt'e due ugualmente probabili.

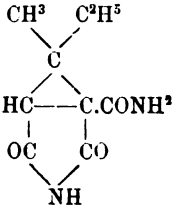
Digitized by Google



$C^{10}H^{12}N^2O^5$

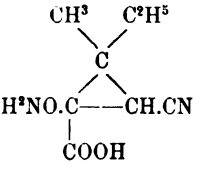
2 basicità, di cui una debolissima, non titolabile con fenolftaleina.

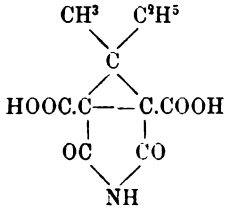




$C^9H^{12}N^2O^3$

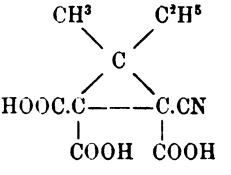
1 basicità deboliss.; non titolabile con fenolftaleina.

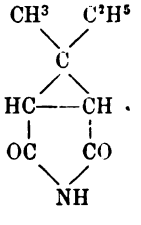




$C^{10}H^{11}NO^6$

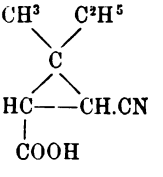
Nettamente bibasico





$C^8H^{11}NO^2$

Una basicità estremamente debole (19 % titolab. con fenolft.).



In conclusione, se pure il primitivo scopo del lavoro, cioè la preparazione degli acidi trimetilenici, non è stato ancora raggiunto (ciò che del resto spero di poter fare fra non molto mediante l'azione degli acidi minerali), si è però preparata una serie di composti derivanti da uno speciale nucleo trimetilenpirrolico, e dall'insieme dei fatti raccolti si può per intanto dedurre:

1° Che i nitrili terziari, generalmente ritenuti assai difficilmente idratabili, si possono invece idrolizzare in certi casi con grande facilità;

2° Che l'influenza dei gruppi alchilici o dei radicali negativi nel senso di ostacolare l'idratazione del —CN non è del

Digitized by Google

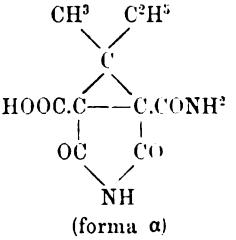
tutto generale, o almeno varia di molto secondo la natura del nucleo fondamentale;

3° Che il gruppo imidico è forse in genere più resistente agli alcali di quel che generalmente si creda, e in certi casi può mostrare una notevolissima stabilità;

4° Che, mentre l'atomo di idrogeno imidico possiede un debolissimo carattere acido quando non ci sono in prossimità che atomi o gruppi neutri o quasi, questo carattere sembra essere influenzato con una certa regolarità per l'introduzione di gruppi sostituenti più attivi, nel senso che aumenta notevolmente in presenza di gruppi molto elettronegativi come il —CN, e diminuisce fino ad annullarsi del tutto quando si trova vicino ad uno o più gruppi acidi di per sè (carbossili).

Lo studio, che ho già intrapreso, dei composti analoghi a questi, ma con due radicali alcoolici eguali, permetterà, oltre alla migliore dilucidazione delle isomerie osservate, di verificare anche meglio le suesposte conclusioni.

Acido metil·etil·trimetilen·α·α'·pirrolidon·β amido·β'·carbonico



(forma α)

Si può anche considerare come imide 2·3 dell'acido 1·1·metiletil·2·amido·2·3·3·trimetilentricarbonico.

Si forma dal dinitrile corrispondente $C^{10}H^9N^3O^2$ (forma α, fusib. ist. a 247°-248°) per azione di due molecole o più di idrato sodico, diluito o concentrato e tanto a freddo quanto all'ebollizione, svolgendosi una molecola di ammoniaca (dosata in diverse esperienze).

Si prepara comodamente facendo agire sopra 5-10 grammi del dinitrile, in largo cristallizzatore, la quantità di soda normale corrispondente a due molecole per una del composto. Ope-

Digitized by Google

rando sotto campana a tenuta in presenza della quantità di acido titolato corrispondente all'ammoniaca che si deve svolgere, arrossato con una goccia di metilarancio, dopo 4-5 giorni, secondo la temperatura dell'ambiente, l'indicatore avverte che la reazione è finita. Salificando allora la soda impiegata con l'occorrente di acido cloridrico normale, precipita l'acido ben cristallizzato. Rendimento diretto 83-84 %.

Con una sola cristallizzazione dall'acqua si ha subito l'acido puro in prismetti rombici tabulari, incolori, che nei tubi capillari fondono decomponendosi con forte sviluppo di gas verso 194° (1). Sul blocco Maquenne si ha la fusione istantanea solo a 232°-235°.

È poco solubile in acqua fredda (0,79 in 100 a 15°), più facilmente all'ebullizione. Solubile in alcool e in acetone, poco o nulla in etere, cloroformio, benzene ed etere di petrolio.

All'analisi la sostanza asciutta all'aria diede:

I. — Da gr. 0,1134 gr. 0,2058 di CO^2 e 0,0526 di H^2O;
II. — „ 0,1184 cm.³ 12,2 di N a 16° e 727 mm.;
III. — „ 0,1177 gr. 0,2152 di CO^2 e 0,0558 di H^2O;
IV. — „ 0,1162 cm.³ 12,0 di N a 15° e 726 mm.

	trovato				calcolato per $C^{10}H^{12}N^2O^5$
	I	II	III	IV	
C %	49,49	—	49,86	—	49,95
H %	5,19	—	5,30	—	5,05
N %	—	11,65	—	11,67	11,69

Non contiene acqua di cristallizzazione; infatti non solo non perde apprezzabilmente di peso restando un'ora a 100° in istufa e un'ora e mezza a 90°-95° nel vuoto su acido solforico,

(1) Questa, che non è una vera temperatura di fusione, ma piuttosto di decomposizione, varia molto secondo la rapidità del riscaldamento. Il solo dato che costituisce una vera costante della sostanza è la temperatura di fusione o decomposizione istantanea sul blocco Maquenne, intesa come la definì quest'autore (Bulletin, *31* (1904) pag. 471) cioè nel senso che delle particelle minutissime di sostanza, cadendo sul blocco, vi si fondono istantaneamente o almeno entro un secondo.

Digitized by Google

ma anche si decompone per ulteriore riscaldamento senza svolgere acqua.

La presenza di un gruppo amidico è dimostrata dal fatto che con acido nitroso svolge, lentamente a freddo e a caldo prontamente, una molecola di azoto, dando l'acido carbossilico corrispondente, descritto a pag. 16.

Due determinazioni di questo azoto, fatte col metodo di Gattermann leggermente modificato (in acido solforico al 20 % scaldando a 100° per un'ora) diedero:

I. — Da gr. 0,1728 di acido cm.^{3} 14,5 di N puro ridotto a 0° e 760 mm.;

II. — Da gr. 0,1931 di acido cm^3 18,1 di N puro ridotto a 0° e 760 mm.

N % ottenuto: I) 10,50 — II) 11,66.

Calcolato per una molecola: 11,66 %. L'acido di per sè, scaldato per un'ora a 100° con acido solforico al 20 %, si depone poi inalterato per raffreddamento.

Scaldato da solo sopra 100° si decompone a una temperatura tanto più bassa quanto più è lento il riscaldamento, dando una molecola di CO^2 e un residuo giallognolo che è liquido a quella temperatura ed è l'amide dell'acido metiletil·trimetilen-pirrolidon·β·carbonico (V. pag. 15).

In una decomposizione di 6 gr. circa di acido asciutto all'aria, durata un'ora circa, a 160°-165°, si ebbe:

Acido impiegato	CO^2 (assorbiti da KOH)	H^2O (1) (assorbiti da $CaCl^4$)	Perdita di peso della sost.	CO^2 % avuta	Calcolato per 1 mol.
gr. 6,0050	1,0970	0,0254	1,1290	18,27	18,32

La sostanza ha proprietà acide ben spiccate e si comporta come un acido bibasico, però debolissimo — più debole della fenolftaleina — per la seconda basicità, dovuta all'idrogeno imidico. Il carattere acido di questo idrogeno, che nel corrispondente dinitrile è nettamente titolabile, viene dunque note-

(1) Nella decomposizione si forma pure una traccia non dosabile di ammoniaca e un po' di un prodotto liquido che distilla, talchè il piccolo aumento del tubo a $CaCl^2$, in immediata prossimità colla sostanza, non si può nemmeno tutto attribuire ad acqua (acqua igroscopica).

Digitized by Google

volmente diminuito sostituendo i due gruppi cianici con un carbossile e un gruppo amidico.

I. — Gr. 0,1990 di acido, in 20 di acqua più una goccia di fenolftaleina, diedero colore roseo persistente con cm.^{3} 24,6 di NaOH $\frac{N}{20}$;

II. — Gr. 0,3983, sospesi in 10 di acqua, si sciolsero e diedero colorazione rosea sensibile con cm.^{3} 25,2 di soda decimonormale:

	Soda impiegata	Soda teorica per 2 basicità	% del teorico
I.	0,0492	0,0663	74,2
II.	0,1008	0,1328	75,9

Forma sali con due e con un equivalente di metallo.

Sale acido di ammonio — $C^{10}H^{11}(NH^4)N^2O^5$. — Sciogliendo l'acido in eccesso di ammoniaca e lasciando evaporare fino a peso costante in essiccatore a calce si ottiene questo sale in croste bianche cristalline, molto solubili in acqua, con reazione acida debole. Da gr. 1,0000 di acido ottenni così gr. 1,0682 di sale secco. Teorico gr. 1,0708.

Sale neutro di sodio. — Si ha in prismetti allungati disposti a raggiera per lenta evaporazione della soluzione acquosa, ottenuta aggiungendo all'acido la quantità di soda corrispondente a due molecole. È molto solubile in acqua, ha reazione nettamente alcalina e contiene acqua di cristallizzazione.

Sale biargentico — $C^{10}H^{10}Ag^2N^2O^5 + 2H^2O$. — Precipita come fina polvere bianca, un po' solubile in acqua, trattando con nitrato d'argento la soluzione dell'acido in due molecole di ammoniaca.

I. — Gr. 1,4062 di sale asciutto all'aria persero in 2 ore e mezza a 105°-110° gr. 0,1106, dei quali 0,0942 nei primi 80 minuti. Poi continuarono a perdere regolarmente 16-20 decimilligrammi per ogni mezz'ora, mentre il sale si andava ingiallendo;

II. — Gr. 0,4455 di sale asciutto all'aria diedero gr. 0,1968 di Ag;

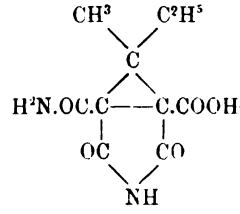
III. — Gr. 0,5369 di sale asciutto all'aria diedero gr. 0,2359 di Ag.

Digitized by Google

	trovato			calcolato per $C^{10}H^{10}Ag^2N^2O^5 + 2H^2O$
	I	II	III	
H^2O %	7,86	—	—	7,35
Ag %	—	44,17	43,94	44,08

Altri sali. — I sali di bario e di calcio, discretamente solubili, precipitano come polveri microcristalline dalle soluzioni abbastanza concentrate del sale di sodio. Assai poco solubili in acqua fredda i sali di piombo, bianco, e di rame, azzurro-verde. Tutti prontamente solubili negli acidi, anche nell'acetico.

Acido metil·etil·trimetilen·α·α'·pirrolidon·β'·amido·β·carbonico



(forma β).

Ottenuto dalla forma isomera β del composto bicianico, fusibile a 203°-204°, in modo perfettamente analogo a quello descritto per l'acido α. Solo il rendimento minore e la maggiore difficoltà a depurare l'acido grezzo fanno supporre la formazione di prodotti secondari in quantità notevolmente maggiore (Forse la seconda forma stereoisomera che è possibile per ognuno di questi due acidi?).

Cristallizza da molta acqua bollente in minuti cristallini assai brillanti, fusibili con decomposizione e forte sviluppo di gas verso 206° nei tubi capillari (1). La decomposizione istantanea sul blocco Maquenne, neanche questa ben nettamente determinabile, avviene solo intorno ai 280°.

Assai poco solubile in acqua fredda (0,21 in 100 a 18°), così pure in alcool e in acetone, meno ancora negli altri solventi.

(1) Valgono qui le stesse restrizioni fatte nella nota di pag. 9 per il corrispondente isomero α.

Digitized by Google

L'analisi del composto asciutto all'aria diede:

I. — Da gr. 0,0944 cm.^{3} 10,2 di N a 25° e 726 mm.;
II. — „ 0,1416 gr. 0,2582 di CO^2 e 0,0702 di H^2O.

	trovato		calcolato per $C^{10}H^{12}N^2O^5$
	I	II	
C %	—	49,73	49,95
H %	—	5,54	5,05
N %	11,82	—	11,69

Scaldato per un'ora a 100° non perse di peso. A cagione della scarsità del composto il comportamento a temperatura più elevata non fu studiato che qualitativamente, constatando che, come l'isomero α, si scompone liquefacendosi a temperatura variabile e sviluppando molta anidride carbonica.

Quanto all'esistenza del gruppo amidico, tre dosamenti eseguiti come per l'isomero α diedero risultati più largamente approssimativi (dal 75 all'85 % del teorico), ma sufficienti a dimostrare l'esistenza di questo gruppo, essendochè anche questo acido ricristallizza inalterato dopo un'ora di riscaldamento a 100° con acido solforico al 20 %.

Anche il potere acido è uguale a quello del suo isomero:

I. — Gr. 0,2502, sospesi in 20 di acqua con fenolftaleina, dànno colorazione sensibile con cm.^{3} 16,4 di soda decimonormale;

II. — Gr. 0,2526 ne richiedono nelle stesse condizioni cm.^{3} 16,6.

	Soda impiegata	Calcolata per 2 basicità	% del teorico
I.	gr. 0,0656	0,0834	78,7
II.	„ 0,0664	0,0842	78,8

Sospettando che il minor rendimento della preparazione e le ripetute cristallizzazioni dipoi necessarie potessero dipendere dalla facile trasformazione di questo acido nella forma isomera α per la sola azione dell'acqua, ne feci bollire per due ore la soluzione acquosa, riottenendolo però quasi completamente inalterato.

Digitized by Google

Sale d'argento — $C^{10}H^{10}Ag^2N^2O^5 + 2H^2O$. — Precipitato col nitrato d'argento dalla soluzione dell'acido in due molecole di ammoniaca. È bianco, microcristallino, facilmente alterabile alla luce e abbastanza solubile in acqua.

Ha la stessa composizione del sale d'argento dell'isomero α, ma perde però l'acqua assai più facilmente, anzi in piccola parte fors'anche a temperatura ordinaria, come sembra indicare l'analisi del sale asciutto all'aria (temperatura ambiente 25° circa):

I. — Gr. 0,2145 arrivano a peso costante in mezz'ora a 95°, perdendo gr. 0,0140;

II. — Gr. 0,2324 di sale asciutto all'aria dànno gr. 0,1040 di Ag:

III. — Gr. 0,2142 dello stesso dànno gr. 0,0962 di argento:

	trovato			calcolato per $C^{10}H^{10}Ag^2N^2O^5 + 2H^2O$
	I	III	III	
H^2O %	6,53	—	—	7,35
Ag %	—	44,75	44,91	44,08

Altri sali. — Anche gli altri sali hanno aspetto e proprietà uguali a quelli dell'isomero α; solo il sale di piombo è notevolmente più solubile.

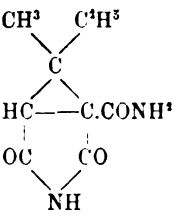
Come si vede adunque, in tutte le proprietà studiate e perfino nei sali vi è fra questi due isomeri, come per i corrispondenti dinitrili, perfetta analogia, il che conforta l'ipotesi di una semplice isomeria nello spazio.

Curioso è anche il fatto che da quello dei due nitrili che è meno solubile e ha un punto di fusione più alto si ha il derivato acido più facilmente solubile e fondente a temperatura più bassa del suo corrispondente isomero.

Di questo isomero β non ho preparati gli ulteriori derivati come per l'isomero α a cagione della scarsità del composto.

Digitized by Google

Amide dell'acido metil·etil·trimetilen·α·α'·pirrolidon·β·carbonico



(forma α).

Ottenuta, come già dissi, dall'acido metiletil·trimetilenpirrolidon·amido·carbonico (forma α) per eliminazione di una molecola di CO^2 riscaldando per circa un'ora a 165°-170°. Determinata l'anidride carbonica svolta e la perdita di peso che si corrispondono (V. pag. 10).

Con qualche cristallizzazione dall'acqua si ottiene pura in bei cristallini brillanti, anidri, fondenti a 141°-143° nei tubi capillari e a 142°-143° sul blocco Maquenne.

Poco solubile in acqua fredda, discretamente nell'alcool e facilmente nell'acetone, pochissimo o niente in etere, benzene ed etere di petrolio.

Disseccata a 100° non perde peso e all'analisi dà:

I. — Da gr. 0,1900 di sostanza gr. 0,3842 di CO^2 e 0,1070 di H^2O;

II. — Da gr. 0,856 di sostanza cm.³ 11,0 di N a 18° e 728 mm.:

	trovato		calcolato per $C^9H^{12}N^2O^3$
	I	II	
C %	55,14	—	55,05
H %	6,30	—	6,17
N %	—	14,45	14,31

Con acido nitroso dà, come il composto da cui proviene, una molecola d'azoto. Un dosamento, fatto collo stesso metodo seguito per gli altri composti, diede da gr. 0,2016 di sostanza, cm.³ 24,8 di N ridotto a 0° e 760 mm., pari a gr. 0,0310, che corrispondono a 15,4 %. Calcolato 14,3.

Digitized by Google

Il composto ha carattere acido, dovuto all'idrogeno imidico, ma di acido debolissimo, non dosabile colla fenolftaleina. Gr. 0,1996, sciolti in 10 di acqua (soluzione decimonormale per la sostanza considerata monobasica) diedero arrossamento sensibile con cm.^{3} 7,7 di idrato sodico decimonormale.

Soda adoperata	Calcolata per 1 basicità	% del teorico
gr. 0,0308	0,0407	75,6

L'acidità dell'idrogeno imidico viene dunque leggermente accresciuta per la soppressione del carbossile in β'.

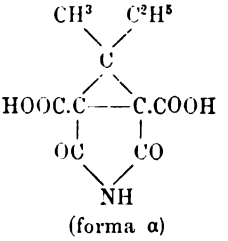
Questa amide-imide forma regolarmente dei sali con un equivalente di metallo.

Sale d'argento. — Polvere bianca, amorfa, insolubile in acqua, che precipita trattando con nitrato d'argento la soluzione dell'amide neutralizzata con ammoniaca.

Gr. 0,3880 di sale asciutto all'aria diedero gr. 0,1362 d'argento, corrispondenti al 35,13 %. Calcolato per $C^9H^{11}AgN^2O^3$ = = 35,60.

Altri sali. — I sali di sodio e di potassio sono facilmente solubili in acqua, i sali di piombo e di bario sono precipitati bianchi, azzurro quello di rame, assai poco solubili in acqua, ma facilmente negli acidi, compreso l'acetico.

Acido metil·etil·trimetilen·α·α'·pirrolidon·β·β'·dicarbonico.



(forma α)

Si può anche considerare come la 2·3·imide dell'acido 1·1·metil·etil·2·2·3·3·trimetilentetracarbonico.

Per prepararlo, gr. 8 di acido metiletil·trimetilenpirrolidon·amidocarbonico (forma α) vennero sospesi in 200 circa di acido solforico 20 % e trattati a freddo con gr. 2,3 di nitrito di sodio

Digitized by Google

(una molecola) sciolti in poca acqua. Il miscuglio, bene agitato, fu scaldato lentamente a bagno d'acqua fino a dissoluzione della sostanza, aggiungendovi poi ancora un'altra molecola di nitrito e continuando a scaldare fintantochè, dopo un'ora circa, non si aveva più svolgimento di gas. Estratto ripetutamente con etere il liquido acido così ottenuto, distillata la maggior parte del solvente e lasciate evaporare all'aria le ultime porzioni di questo, rimase un residuo costituito da una massa di fini aghetti lievemente colorati in giallognolo che, fortemente premuti fra carta, divennero quasi bianchi e pesavano circa cinque grammi. Questo prodotto, cristallizzato dall'etere acquoso, diede in una prima cristallizzazione due grammi circa di minuscoli aghetti bianchi, contenenti due molecole di acqua di cristallizzazione.

L'acido asciutto all'aria, messo nel vuoto su acido solforico concentrato, perde lentissimamente quest'acqua, arrivando dopo circa venti giorni a peso costante. Gr. 0,5308 di acido perdettero così gr. 0,0697, corrispondenti al 13,13 %. Calcolato per $C^{10}H^{11}NO^6 + 2H^2O = 13{,}0$ %.

Scaldato in stufa-termostato a 48°-50° perdette in 20 ore 8,9 % del proprio peso (corrispondente a 1 molecola e un terzo circa di acqua) restando poi a peso costante. Portando la temperatura a 60° si eliminò in circa quattro giorni anche la rimanente acqua di cristallizzazione, ma contemporaneamente l'acido subiva una lenta e regolare decomposizione.

L'acido asciutto all'aria diede all'analisi:

I. — Da gr. 0,2335 gr. 0,3738 di CO^2 e 0,1198 di H^2O;
II. — „ 0,2522 cm.³ 11,6 di azoto a 19° e 734 mm.:

	trovato		calcolato per $C^{10}H^{11}NO^6+2H^2O$
	I	II	
C %	43,6	—	43,29
H %	5,7	—	5,45
N %	—	5,20	5,06

È molto solubile in acqua anche a freddo e nell'etere acetico, facilmente solubile in etere e in acetone, discretamente nell'alcool e poco o niente in benzene.

Digitized by Google

Nei tubi capillari non ha un punto di fusione fisso, decomponendosi a temperatura variabile. Anche qui la sola costante è la temperatura di decomposizione istantanea sul blocco Maquenne, che avviene a 182°-183°.

Per azione del calore quest'acido perde dapprima, da 50° a 100° circa, la sua acqua di cristallizzazione, poi fra 100° e 140° elimina due molecole di anidride carbonica dando origine a un metil·etil·trimetilen·α·α′·pirrolidone (V. pag. 20). Le due reazioni non sono però del tutto separate e successive l'una all'altra.

In un'esperienza in cui gr. 0,9756 di acido idrato furono scaldati per un'ora e mezza circa da 70° a 100° in comunicazione con un tubo a cloruro di calcio e un apparecchio a potassa, il cloruro di calcio assorbì gr. 0,1220 di acqua (= 12,53 %: teorico per $2H^2O$ = 13,0 %) e contemporaneamente la potassa aumentò di gr. 0,0390 (= 3,9 %). Scaldato poi ancora nello stesso apparecchio per mezz'ora a 130°-135° l'acido non diede più che gr. 0,0016 di acqua e invece gr. 0,2780 di anidride carbonica, corrispondenti al 28,48 %. In totale:

	Ottenuti nell'esperienza	Calcolati per $2H^2O$ e $2CO^2$
H^2O	gr. 0,1236 corrisp. a 12,66 %	13,00 %
CO^2	„ 0,3170 „ 32,49 %	31,75 %

E la perdita di peso subita dall'acido corrispondeva alla somma dell'acqua e dell'anidride carbonica dosate.

Alla titolazione con idrato sodico e fenolftaleina questo acido si mostra nettamente bibasico. Gr. 0,1186 di acido anidro sciolti in 9,8 di acqua (soluzione decimonormale per l'acido considerato bibasico) diedero netto passaggio al color roseo con cm.³ 9,8 di alcali decimonormale.

Soda adoperata	Soda calcolata per 2 basicità	% del teorico
gr. 0,0392	0,0393	99,75

Questo è il solo composto di questa serie in cui l'idrogeno imidico dell'anello pirrolico non mostra reazione acida, il che può esser dovuto appunto alla presenza in β e β′ di due gruppi carbossilici già acidi di per sè.

Digitized by Google

Sale acido di sodio — $C^{10}H^{10}NaNO^6 + H^2O$. — Ottenni questo sale quando cercai di preparare l'acido libero distillando per parecchie ore il dinitrile corrispondente con idrato sodico concentrato fino ad avere due molecole di ammoniaca, precipitando poi il liquido alcalino con nitrato d'argento e decomponendo col gas solfidrico il sale d'argento così ottenuto. Bisogna dunque che in queste condizioni invece del sale biargentico si formi un sale argentico-sodico.

Cristallizza da molto alcool a 95° in sottili pagliette solubilissime in acqua. Cristallizzato e asciugato all'aria con una temperatura dell'ambiente di 25°-30°, diede all'analisi:

	Na %	C %	H %	N %
Trovato	8,07	42,86	4,79	5,05
Calcol. p. $C^{10}H^{10}NaNO^6 + H^2O$	8,20	42,68	4,30	4,99

Pare che cristallizzando a temperatura più bassa si separi con due molecole di acqua; da una cristallizzazione eseguita con una temperatura ambiente di 10°-14° ebbi infatti un sale che asciugato all'aria fino a peso costante e posto nel vuoto su acido solforico perdette prima, in circa tre giorni, il corrispondente a poco più di una molecola d'acqua, arrivando poi dopo nove giorni a peso costante con una perdita totale del 12,28 %. Calcolato per $C^{10}H^{10}NaNO^6 + 2H^2O = 12,04$ %.

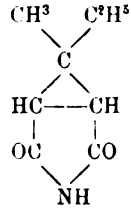
Questo sale ha ancora, come lo mostra la formola, un carbossile non salificato, che è infatti perfettamente dosabile con soda e fenolftaleina.

Altri sali. — Il sale bisodico, neutro, è ben cristallizzato e pure solubilissimo in acqua. Più o meno solubili sono pure i sali di bario, di calcio, di rame e di zinco. Il sale di piombo è un precipitato fioccoso solubile in molta acqua. Insolubile invece è il sale d'argento. Il sale mercuroso è un precipitato bianco che tosto rapidamente imbrunisce.

La soluzione del sale bisodico dà con una goccia di cloruro ferrico diluito una debole colorazione gialla, troppo debole e incerto indizio in favore della formola ossidrilica.

Digitized by Google

Metil·etil·trimetilen·α·α′·pirrolidone.



(forma α)

Questo composto, che si può anche considerare come 1·1·metil·etil·2·3·trimetilendicarbonimide e rappresenta come il nucleo fondamentale comune a tutti i composti fin qui descritti, proviene, come è detto a pagina 18, dalla decomposizione al calore del corrispondente acido β·β′·carbossilico, secondo l'equazione:

$$C^{10}H^{11}NO^6 = C^8H^{11}NO^2 + 2CO^2.$$

Il prodotto della reazione è una massa semisolida gialla, facilmente solubile in acqua. Per evaporazione spontanea della soluzione acquosa si separano delle sottilissime lamelle ancora un po' colorate in giallo e miste con un poco di sostanza amorfa, e ripetendo la cristallizzazione per evaporazione si ottiene il composto puro in belle laminette sottili con lucentezza quasi madreperlacea, fusibili a 61°-63° nei tubi capillari e più nettamente a 61°-62° sul blocco Maquenne.

La sostanza asciutta all'aria non perdette peso nel vuoto su acido solforico e all'analisi diede:

I. — Da gr. 0,1604 cm.³ 13,0 di azoto a 16° e 735 mm.;
II. — „ 0,1096 gr. 0,2512 di CO^2 e gr. 0,0726 di H^2O:

	trovato		calcolato per $C^8H^{11}NO^2$
	I	II	
C %	—	62,50	62,69
H %	—	7,36	7,24
N %	9,27	—	9,17

Digitized by Google

Discretamente solubile in acqua fredda, solubilissima in alcool, etere, acetone, etere acetico, e anche nel benzene, insolubile nell'etere di petrolio.

In questo composto in cui non vi sono più gruppi sostituenti elettronegativi l'idrogeno imidico — sia poi esso veramente nel gruppo NH o nell'isomera forma ossidrilica — ha ancora proprietà acide ma però estremamente deboli, appena sensibili in soluzione concentrata alle carte di tornasole. Il sale di sodio è in conseguenza assai fortemente idrolizzato e in un tentativo di titolazione con idrato sodico decimonormale e fenolftaleina con gr. 0,1098 di sostanza sciolti in 7 di acqua (soluzione decimonormale nell'ipotesi di una basicità) si ebbe già colorazione rosea con cm.^{3} 1,4 appena di soluzione alcalina.

Soda impiegata	Soda calcolata per 1 basicità	% del teorico
gr. 0,0056	0,0287	19;5

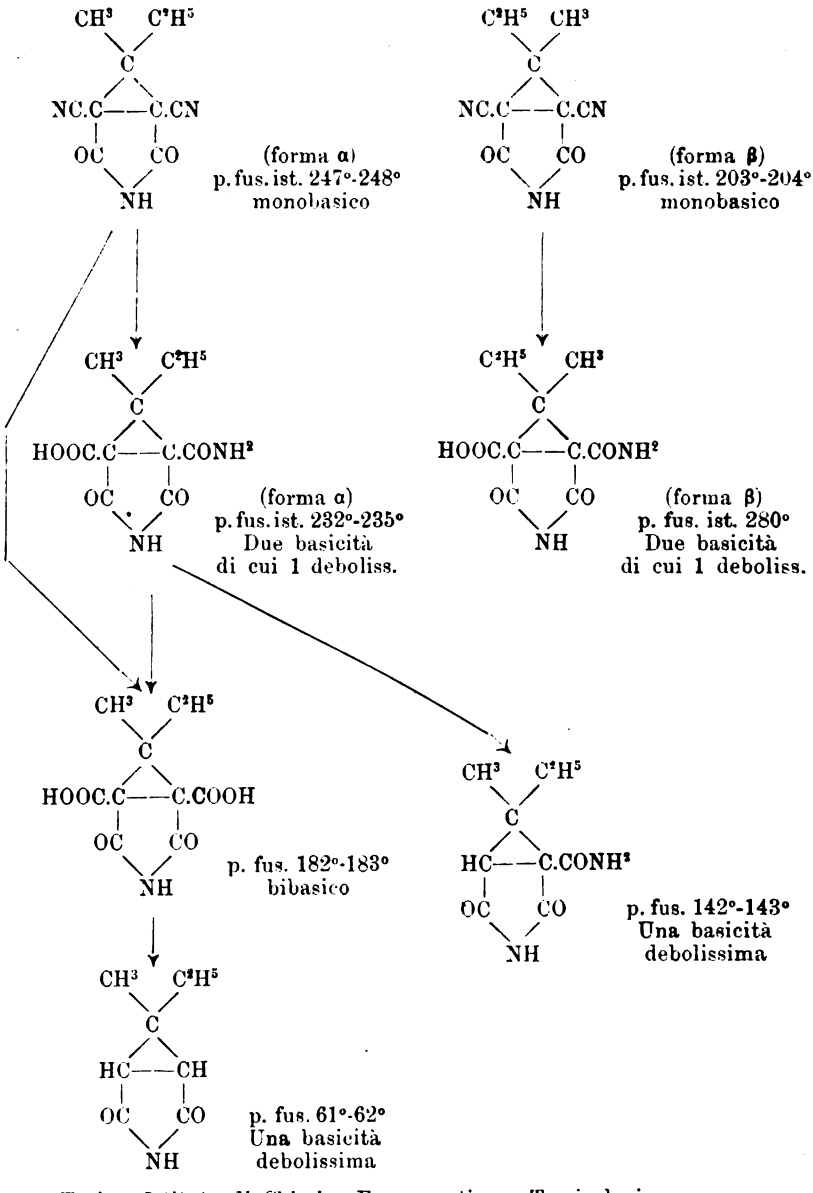
Sarà interessante vedere se anche in questo composto meno sostituito sia ancora così grande la resistenza dell'anello imidico o pirrolidonico all'azione degli alcali.

Sali. — Dalla soluzione della sostanza, neutralizzata con la piccola quantità di soda occorrente, si ha direttamente precipitato bianco dei rispettivi sali con nitrato d'argento e con acetato di piombo. Analogamente col solfato di rame precipita il sale di rame, azzurro. Col cloruro di bario il sale, bianco, cristallino, non precipita che in presenza di acetato sodico, ma poi non è più solubile neanche in un eccesso di acido cloridrico. Col nitrato mercuroso non si ha niente. Anche questo composto dà col cloruro ferrico una debole colorazione gialla.

***

Nella pagina seguente sono raccolte le formole dei composti descritti in questa e nella precedente mia Nota, colle loro relazioni di formazione e alcune proprietà.

Digitized by Google



Torino. Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologica della R. Università. Marzo 1910.

Digitized by Google

Serie di equazioni differenziali lineari ed equazioni integro-differenziali.

Nota di MARIA GRAMEGNA.

È noto come si integrino le equazioni differenziali lineari:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \ldots + u_{1n}x_n \\
\frac{dx_2}{dt} &= u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + \ldots + u_{2n}x_n \\
\frac{dx_n}{dt} &= u_{n1}x_1 + u_{n2}x_2 + \ldots + u_{nn}x_n .
\end{aligned}$$

Detto x il complesso $(x_1\, x_2 \ldots x_n)$, e u la sostituzione $\begin{vmatrix} u_{11} \ldots u_{1n} \\ \ldots\ldots \\ u_{n1} \ldots u_{nn} \end{vmatrix}$, le equazioni precedenti si possono scrivere:

$$\mathrm{D}x = ux . \tag{1}$$

Se la sostituzione u è costante, cioè gli u_{rs} sono indipendenti dal tempo t, l'integrale di questa equazione è:

$$x_t = e^{tu}x_0 . \tag{2}$$

Se la u dipende da t si ha:

$$x_t = \left(1 + \int_0^t u\,dt + \int_0^t u\,dt \int_0^t u\,dt + \ldots\right) x_0 . \tag{3}$$

Le formole (1), (2), (3) furono date dal Prof. Peano nel 1887. Vedasi il suo *Formulario Mathematico* (t. V, pag. 433, del quale libro userò le notazioni). La formula (3) costituisce il metodo detto delle *integrazioni* o *approssimazioni* successive.

Mi propongo di estendere questa teoria ad n infinito. Dipendentemente dal modo di passare all'infinito, i secondi membri

Digitized by Google

delle equazioni date diventano serie infinite oppure integrali, e si avrà o una serie di infinite equazioni differenziali lineari, o un'equazione integro-differenziale.

Perciò premetto la teoria delle sostituzioni o funzioni lineari con infinite variabili, od omografie in uno spazio ad infinite dimensioni.

§ 1. — *Complessi infiniti.*

Siano a, b dei complessi o successioni di infiniti numeri reali, cioè:

$$a, b \in \mathrm{qF}\, \mathrm{N}_1 .$$

Il numero di posto r si indica con a_r anzichè con ar, e dicesi coordinata del complesso, o elemento di posto r.

Risulta dalla definizione di eguaglianza di 2 funzioni, che due complessi d'ordine infinito .sono eguali quando hanno rispettivamente eguali tutte le coordinate:

$$(1) \qquad a = b . = : n \in \mathrm{N}_1 . \supset_n . a_n = b_n .$$

Per la somma si può definire in generale:

$$u \in \mathrm{Cls} . f, g \in \mathrm{qF}\, u . \supset . f + g = [fx + gx \,|\, x, u] \qquad \text{Def.}$$

cioè somma di due funzioni numeriche degli individui di una stessa classe u, è la funzione tale che $(f + g)x = fx + gx$, per ogni x nel campo u. Così si può definire:

$$h \in \mathrm{q} . \supset . hf = [hf.x \,|\, x, u]. \qquad \text{Def.}$$

E sussistono le comuni proprietà come pei complessi d'ordine finito, scritte nel *Formulario Mathematico*, t. V, pag. 144-45. P 1·1·2·3·4·5·6·7. Non si definisce il prodotto di due complessi perchè nessuna definizione che si può dare presenta interesse: hanno interesse invece i prodotti di sostituzioni. § 4.

Digitized by Google

§ 2. — *Modulo e mole d'un complesso.*

Veniamo ora a trattare per i qFN_1 la questione analoga a quella del modulo per i complessi d'ordine n, dove n è un numero finito.

Il Prof. Peano nel 1887 definisce per modulo d'un complesso d'ordine n la radice quadrata della somma dei quadrati delle coordinate:

$$n \epsilon N_1 \,.\, x \epsilon C n \,.\, \supset \,.\, \mathrm{m}x = \sqrt{[\Sigma (x_r^2 \mid r, 1 \cdots n)]} \qquad \text{Def.}$$

che è la generalizzazione del modulo d'un vettore, o modulo d'un imaginario, o distanza di 2 punti in coordinate cartesiane ortogonali.

Il Jordan, *Cours d'analyse*, a. 1893, t. I, pag. 18, invece del modulo considera l'*écart*, che definisce come la somma dei moduli delle coordinate:

$$x \epsilon C n \,.\, \supset \,.\, \text{Scarto}\, x = \Sigma [\mathrm{m} y_r \mid r, 1 \cdots n] \,.$$

Si può considerare una terza quantità che indicherò con μx e che chiamerò mole di x, secondo Leibniz, e che è il massimo dei moduli delle coordinate:

$$\mu x = \max (\mathrm{m}\, x_r \mid r\, 1 \cdots n).$$

Se $n = 1$, modulo, scarto, mole coincidono.

Se $n = 2$, i punti del piano il cui modulo è 1 formano un cerchio che ha per raggio 1 e per centro l'origine delle coordinate; i punti del piano che hanno scarto $= 1$ formano il quadrato iscritto nel cerchio precedente e avente i vertici sugli assi coordinati; i punti del piano per cui $\mu x = 1$ sono i punti del quadrato circoscritto al cerchio di raggio 1 avente i lati paralleli agli assi coordinati. Valgono per lo scarto e per la mole relazioni analoghe a queste:

$$x, y \epsilon C n \,.\, \supset \,.\, \mathrm{m}(x + y) = \mathrm{m}x + \mathrm{m}y$$

Digitized by Google

e tutte le conseguenze, sicchè per i complessi d'ordine finito, modulo, scarto e mole sono idee praticamente equivalenti.

Per i complessi d'ordine infinito possiamo estendere i tre concetti:

$$\mathrm{m}x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots} \qquad \text{Def.}$$

$$\text{scarto}\, x = \mathrm{m}x_1 + \mathrm{m}x_2 + \dots \qquad \text{Def.}$$

$$\mu x = \mathrm{l}'\mathrm{m}x\,\text{`}\,\mathrm{N}_1 . \qquad \text{Def.}$$

Risulta:

$$\text{scarto}\, x \epsilon \mathrm{Q} \,.\, \supset \,.\, \mathrm{m}x \epsilon \mathrm{Q} .$$

$$\mathrm{m}x \epsilon \mathrm{Q} \,.\, \supset \,.\, \mu x \epsilon \mathrm{Q} .$$

Quindi l'ente che può essere finito mentre gli altri possono essere infiniti è l'ultimo; perciò ci conviene di considerare la mole.

Noi considereremo in modo speciale le successioni limitate, e le diremo semplicemente " complessi d'ordine infinito „ o " complessi infiniti „, e li indicheremo con $\mathrm{C}\infty$, cioè:

$$x \epsilon \mathrm{C}\infty \,.=.\, x \epsilon \mathrm{qF}\,\mathrm{N}_1 \,.\, \mu x \epsilon \mathrm{Q} . \qquad \text{Def.}$$

Si ha che:

$$x, y \epsilon \mathrm{C}\infty \,.\, \supset \,.\, \mu(x + y) \leqq \mu x + \mu y .$$

Ossia la mole della somma è minore o eguale alla somma delle moli.

Se la mole è nulla, il complesso è nullo, e viceversa:

$$\mu x = 0 \,.=.\, x = 0 .$$

§ 3. — *Limiti.*

I limiti dei complessi infiniti si debbono trattare un po' diversamente dai limiti dei complessi finiti. Diremo che la successione variabile x ha per limite la successione a, quando ogni elemento x ha per limite il corrispondente elemento di a.

In simboli, mettendo tutte le ipotesi sottintese:

$$u \epsilon \mathrm{Cls'q} \,.\, t_0 \epsilon \mathrm{d}u \,.\, x \epsilon \mathrm{C}\infty \mathrm{F}u \,.\, a \epsilon \mathrm{C}\infty \,.\, \supset \,.\, a = \lim(x, u, t_0) \,.=:$$
$$.\, n \epsilon \mathrm{N}_1 \,.\, \supset_n \,.\, \lim[(xt)_n \mid t, u, t_0) = a_n \qquad \text{Def.}$$

Digitized by Google

Ossia, se u è una classe di quantità, e t_0 è un elemento appartenente al campo derivato di u, x è un complesso infinito funzione degli u, ed a è pure un complesso infinito, allora dire che a è il limite del complesso x, quando la variabile varia in u e tende a t_0 equivale a dire che il limite della coordinata ennesima quando la variabile varia nel campo u e tende a t_0 è a_n.

Se il limite della mole di $x - a$ è zero, anche x ha per limite a:

$$\lim \mu (x - a) = 0 \,.\, \supset \,.\, \lim x = a.$$

Infatti se il massimo o limite superiore di più quantità verge a 0, altrettanto fanno ognuna di queste.

La proposizione inversa, vera per i complessi d'ordine finito, cessa di valere per i C∞. La condizione $\lim \mu (x - a) = 0$ dice che x converge equabilmente ad a.

Le Unità dei complessi infiniti.

Chiamiamo i_r, corrispondente ad unit (∞, r) del *Formulario*, pag. 145, il complesso d'ordine infinito, di cui l'erresima coordinata è 1, e tutte le altre sono nulle:

$$r \epsilon N_1 \,.\, \supset \,.\, i_r = (1 ; r) \cup (\iota 0 : N_1 \sim \iota r). \qquad \text{Def.}$$

Si avrà:

$$a \epsilon C\infty \,.\, \supset \,.\, a = \Sigma (a_r i_r | r, N_1)$$

espressione del complesso mediante le sue coordinate. La serie nel 2° membro si deve trattare estendendo le definizioni date per le serie reali, ossia a è il limite della somma $\Sigma (a_r i_r | r, 1 \cdots n)$ ove n tende ad ∞; purchè il limite sia definito come sopra si è fatto; altrimenti questa somma non converge equabilmente al suo limite.

Digitized by Google

§ 4. — *Sostituzioni.*

Generalizzando le note definizioni, diremo che a è una sostituzione od omografia dei complessi d'ordine infinito o sostituzione infinita, e scriveremo: $a \epsilon$ Subst $C\infty$, quando:

1° Ad ogni complesso d'ordine infinito x corrisponde un altro complesso ax

$$x \epsilon C\infty \,.\, \supset \,.\, ax \epsilon C\infty \,.$$

2° Al complesso somma corrisponde la somma dei valori di a

$$x, y \epsilon C\infty \,.\, \supset \,.\, a(x + y) = ax + ay \,.$$

3° Il limite superiore della mole di ax ove x è un complesso qualunque di mole minore od uguale ad 1, sia finito

$$l' \mu a \, ' \, C\infty \cap x \ni (\mu x \leqq 1) \, \epsilon Q \,.$$

Dalla seconda e terza condizione risulta che se h è una quantità, $a(hx) = h(ax)$.

Questa conseguenza esige la terza condizione già per i complessi d'ordine finito, anzi per i numeri reali. Vedi *Formulario*, pag. 148, P 1.

Si estendono alle sostituzioni le definizioni di somma, prodotto funzionale, potenza con esponente intero e positivo, come nel *Formulario*, pag. 150.

Mole d'una sostituzione.

$$a \epsilon \text{ Subst } C\infty \,.\, \supset \,.$$

$$\mu a = l' \left[\frac{\mu ax}{\mu x} \mid x \, ' \, C\infty \sim 0 \right] \qquad \text{Def.}$$

ossia se a è una sostituzione infinita, consideriamo per ogni x il rapporto $\frac{\mu ax}{\mu x}$; facciamo variare x nei complessi non nulli: il limite superiore di questo rapporto variabile è la mole della sostituzione.

Digitized by Google

Si deduce dalla definizione che la mole d'una sostituzione dei complessi d'ordine infinito ha sempre valore finito:

$$a \in \text{Subst } C\infty \,.\, \mathfrak{O} \,.\, \mu a \in Q \,.$$

Infatti, se $x \in C\infty$ non è nullo, si ha:

$$\frac{\mu ax}{\mu x} = \mu\left(a \frac{x}{\mu x}\right).$$

Ora siccome $\frac{x}{\mu x}$ ha per mole 1, e siccome, per la terza ipotesi fatta, il limite superiore delle moli dei complessi di mole eguale ad 1 è finito, si deduce che il limite superiore dei rapporti $\frac{\mu ax}{\mu x}$ è eguale al precedente, ossia è finito.

Quindi se x è un complesso d'ordine infinito qualunque, $\mu ax \leqq \mu a \mu x$.

$$x \in C\infty \,.\, \mathfrak{O} \,.\, \mu ax \leqq \mu a \mu x \,.$$

La mole della somma di due sostituzioni è $\leqq$ alla somma delle moli:

$$a, b \in \text{Subst } C\infty \,.\, \mathfrak{O} \,.\, \mu(a + b) \leqq \mu a + \mu b \,.$$

La mole del prodotto di due sostituzioni è $\leqq$ al prodotto delle moli:

$$\mathfrak{O} \,.\, \mu(ab) \leqq \mu a \times \mu b \,.$$

Per queste ultime due proposizioni basta ripetere le stesse dimostrazioni del *Formulario*, pag. 149, P . 2 · 1, · 3.

Esponenziale d'una sostituzione.

Data una sostituzione a definiremo per e elevato ad a la serie

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \ldots$$

Questa serie è assolutamente convergente; infatti la serie delle moli dei suoi termini ha i termini minori od eguali a quelli della serie che dà lo sviluppo di $e^{\mu a}$.

Digitized by Google

§ 5. — *Germe d'una sostituzione.*

Se $a \in \text{Subst } C\infty$, e se $s \in N_1$, ai_s è un complesso d'ordine infinito, ed il suo elemento di posto r che chiamerò:

$$u_{r,s} = (ai_s)_r$$

è una quantità. Quindi $u \in qF(N_1 : N_1)$, cioè u è una quantità reale funzione d'una coppia di numeri naturali. Questa funzione u si suole chiamare *matrice*, poichè spesso si rappresenta sotto forma di matrice infinita in due direzioni:

$$\begin{array}{l} u_{11}\, u_{12} \ldots \\ u_{21}\, u_{22} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Si dice anche funzione generatrice o funzione caratteristica della sostituzione, o Kern, o germe (*).

Sia u una quantità funzione di 2 variabili numeriche, cioè $u \in qF(N_1 : N_1)$, o come si suol dire abbiasi una matrice infinita in due direzioni di cui $u_{r,s}$ sia l'elemento generico; indicherò con su la sostituzione rappresentata da u, ossia:

$$u \in qF(N_1 : N_1) \,.\, \supset \,.\, su = \{\Sigma[(u_{r,s}\, x_s \mid s, N_1) \mid r, N_1] \mid x, qFN_1\}. \quad \text{Def.}$$

(*) Hilbert, nel caso degli integrali di cui parleremo più tardi § 8, la chiamò *Kern*, che secondo i vocabolari comuni significa *granello, nocciolo, nucleo*. Secondo i vocabolarî etimologici, il tedesco *Kern* è parola germanica affine al tedesco *Korn*, inglese *corn*, che significa *grano*, e deriva dall'indo-europeo; ha infatti per rappresentanti il latino *grano*, il russo *zerno* (зерно), ed il sanscrito *girna* (गिर्ण). Non essendo comoda la traduzione *Kern* per il letteralmente identico *grano*, adotterò la parola *germe*, già usata dal Prof. Peano nelle sue lezioni e che ha le tre prime lettere comuni con *Kern*.

La corrispondenza del *g* latino col *k* germanico è secondo la legge di Grimm.

Queste indicazioni sono tratte dal " Vocabulario commune ad linguas de Europa " di G. Peano.

Digitized by Google

Scriveremo sux anzichè $(su)x$. Quindi sotto forma sviluppata si ha:

$$(sux)_1 = u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \dots$$
$$(sux)_2 = u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

sux sarà effettivamente una successione di quantità, se ognuna delle serie nel 2° membro è convergente. E affinchè quelle serie siano convergenti per ogni valore del complesso x, è necessario e sufficiente che siano assolutamente convergenti le serie che formano le varie orizzontali della matrice u. Infatti se pongo $x_1 = \operatorname{sgn} u_{11}$, $x_2 = \operatorname{sgn} u_{12}$, ... sarà:

$$(sux)_1 = \mathrm{m}u_{11} + \mathrm{m}u_{12} + \dots$$

che dovrà esser convergente.

La notazione " signum a " ove $a \epsilon \mathrm{q}$ è stata introdotta da Kronecker, *Werke*, t. 2, pag. 39, e si definisce così:

$$a \epsilon \mathrm{q} \,.\, \supset \,.\, \operatorname{sgn} a = 1 \,.\, \operatorname{sgn}(-a) = -1 \,.\, \operatorname{sgn} 0 = 0. \qquad \text{Def.}$$

Inoltre affinchè su sia una sostituzione è necessario, per la 3ª condizione data nella definizione di sostituzione, che la mole di sux, per ogni x di mole 1, abbia un limite superiore finito, μsu; quindi ognuna delle serie:

$$\sum(\mathrm{m}u_{r,s} \mid s, \mathrm{N}_1) \leqq \mu su;$$

onde:

se u è un germe, o matrice, e se ogni serie formata coi valori assoluti degli elementi posti su una orizzontale è convergente, e il limite superiore delle somme di queste serie corrispondenti alle varie orizzontali è finito, allora:

su è effettivamente una sostituzione, ed il modulo di su è precisamente eguale al limite superiore detto. Cioè:

$$u \epsilon \mathrm{qF}(\mathrm{N}_1 ; \mathrm{N}_1) \,.\, \mathrm{l}'[\textstyle\sum(\mathrm{m}u_{r,s} \mid s, \mathrm{N}_1) \mid r \,\text{`}\, \mathrm{N}_1] \,\epsilon \mathrm{Q} \,.\, \supset \,.\, su \epsilon \operatorname{Subst} C\infty \,.$$
$$\mu su = \mathrm{l}'[\textstyle\sum(\mathrm{m}u_{r,s} \mid s, \mathrm{N}_1) \mid r \,\text{`}\, \mathrm{N}_1].$$

Digitized by Google

Infatti:

$$x \epsilon C\infty \,.\, r \epsilon N_1 \,.\, \supset \,.\, \mu(sux)_r = \mu \sum (u_{r,s} x_s \,|\, s, N_1) \leqq \sum (\mu u_{r,s}\, \mu x_s \,|\, s, N_1) \leqq$$
$$\leqq \mu x \sum (\mu u_{r,s}\, 's, N_1) = (\mu x)\, l$$

ove si ponga:

$$l = l' [\sum (\mu u_{r,s} \,|\, s, N_1) \,|\, r \,' N_1]$$

quindi:

$$x \epsilon C\infty \,.\, \supset \,.\, \mu(sux) \leqq (\mu x)\, l$$

quindi ad un complesso infinito fa corrispondere un complesso infinito. Divido per μx, ho:

$$\frac{\mu(sux)}{\mu x} \leqq l$$

quindi:

$$l' \frac{\mu(sux)}{\mu x},$$

cioè $\mu(su)$ è una quantità minore o eguale ad l. Allora data una quantità positiva h, ci sarà un r tale che:

$$\sum (\mu u_{r,s} \,|\, s, N_1) < l - h.$$

Pongo

$$x = \sum (\operatorname{sgn} u_{r,s} i_s \,|\, s, N_1)$$

sarà

$$\mu(sux)_r = \sum (\mu u_{r,s} \,|\, s, N_1) > l - h$$

ma

$$\mu(sux) \geqq \mu(sux)_r$$

dunque

$$\mu(sux) \geqq l - h$$

e siccome $\mu x = 1$

$$\frac{\mu(sux)}{\mu x} \geqq l - h$$

e quindi

$$l' \frac{\mu(sux)}{\mu x}$$

cioè

$$\mu(su) \geqq l - h$$

quindi

$$\mu(su) = l\,.$$

Digitized by Google

Sussistono evidentemente le proposizioni:

$$u, v \epsilon \mathrm{qF}(\mathrm{N}_1 : \mathrm{N}_1) \,.\, \supset \,.$$
$$su + sv = s(u + v).$$
$$sv\, su = s[\Sigma(u_{r_q} v_{q_s}, q, \mathrm{N}_1) | (r, s), \mathrm{N}_1 : \mathrm{N}_1].$$

Ossia la somma di due sostituzioni rappresentate dalle matrici u, v è la sostituzione rappresentata dalla matrice somma.

Il prodotto delle sostituzioni di germe v ed u è rappresentata da un germe il cui elemento di indice r, s è formato moltiplicando gli elementi dell'erresima orizzontale del primo fattore, cioè u, per gli elementi della verticale di posto s nel secondo fattore, cioè v, e sommando.

§ 6. — *Serie di equazioni differenziali.*

Avendo data la definizione di limite d'un complesso funzione d'una variabile reale t, possiamo definirne la derivata fatta rispetto a t, come è fatto già nel *Formulario* per i complessi d'ordine finito (*Formulario*, pag. 284, P . 15), e si verifica che per essi valgono le comuni regole di derivazione.

Allora abbiasi un sistema di infinite equazioni differenziali lineari con infinite incognite:

$$\frac{dx_1}{dt} = u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \ldots$$
$$\frac{dx_2}{dt} = u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

dove le u sono costanti rispetto al tempo.

Indichiamo con a la sostituzione rappresentata dalla matrice delle u, supposto che rappresenti una sostituzione, cioè $\mu s u \epsilon Q$. Chiamo x il complesso $(x_1\ x_2 \ldots)$, e sia x_0 il suo valore iniziale.

Le equazioni differenziali date si potranno scrivere:

(1) $$\mathrm{D}x = ax\,.$$

E l'integrale è:

(2) $$x_t = e^{ta} x_0$$

Digitized by Google

ossia i diversi valori di x corrispondenti ai diversi valori di t si hanno applicando al complesso x_0 la sostituzione e^{at} cioè la sostituzione:

$$1 + ta + \frac{t^2a^2}{2!} + \frac{t^3a^3}{3!} + \dots$$

In simboli:

$$a \in \text{Subst C}\infty \,.\, \Omega : x \in \text{C}\infty \text{ Fq} \,.\, \text{D}x = ax \,.=.\, x = (e^{ta}x_0 \,|\, t, \text{q}).$$

Infatti, da $\text{D}x = ax$, si ha che la funzione $\text{D}x - ax$ è identicamente nulla, cioè:

$$\text{D}x - ax = (\iota 0 : \text{q}) .$$

ossia

$$[e^{-at}(\text{D}x_t - ax_t) \,|\, t, \text{q}] = (\iota 0 : \text{q})$$

quindi

$$\text{D}[e^{-at}x_t \,|\, t, \text{q}] = (\iota 0 : \text{q})$$

ossia

$$t \in \text{q} \,.\, \Omega \,.\, e^{-at}x_t = x_0$$
$$t \in \text{q} \,.\, \Omega \,.\, x_t = e^{at}x_0$$
$$x = (e^{at}x_0 \,|\, t, \text{q}).$$

***

Consideriamo le equazioni differenziali lineari non omogenee, cioè la serie di equazioni:

$$\frac{dx_1}{dt} = h_1 + u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \dots$$
$$\frac{dx_2}{dt} = h_2 + u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

dove le u sono costanti date, e le h sono funzioni date di t; le x funzioni di t da determinare. Supponiamo che il germe u determini effettivamente una sostituzione, cioè che la sostituzione rappresentata da u abbia mole finita.

Posto $a = su$, la serie di equazioni differenziali si riduce a:

$$\text{D}x = ax + h.$$

Digitized by Google

In simboli:

$$a \in \text{Subst}\, C\infty \,.\, h \in C\infty\, \text{Fq} \,.\, \supset : x \in C\infty\, \text{Fq} \,.\, Dx = ax + h \,.\, = \,.$$
$$. = . x = \{ e^{at} [x_0 + S (e^{-at} h t \,|\, t ; 0, t)] \,|\, t, q \}.$$

Infatti:

$$t \in q \,.\, \supset_t \,.$$
$$Dx_t = a x_t + h_t$$

ossia

$$Dx_t - a x_t = h_t$$
$$e^{-at} (Dx_t - a x_t) = e^{-at} h_t$$
$$D (e^{-at} x_t \,|\, t, q) = (e^{-at} h_t \,|\, t, q).$$

Integrando ambo i membri da 0 a t:

$$t \in q \,.\, \supset \,.$$
$$e^{-at} x_t - x_0 = S (e^{-at} h_t \,|\, t ; 0, t)$$

da cui

$$e^{-at} x_t = x_0 + S (e^{-at} h_t \,|\, t ; 0, t)$$

ossia

$$x_t = e^{at} [x_0 + S (e^{-at} h_t \,|\, t ; 0, t)]$$

cioè, separando la x dalla t:

$$x = \{ e^{at} [x_0 + S (e^{-at} h_t \,|\, t ; 0, t] \,|\, t, q \}.$$

Il valore di x corrispondente ad un valore qualunque di t è:

$$x_t = e^{at} x_0 + \int_0^t e^{a(t-u)} h_u \, du \,.$$

***

Supponiamo ora che le u, da cui è rappresentata la sostituzione a, siano funzioni continue della t. Allora la funzione x si ricava col metodo delle integrazioni successive e si ha:

$$(3) \qquad x_t = x_0 + \int_0^t a_t x_0 \, dt + \int_0^t a_t \, dt \int_0^t a_t x_0 \, dt + \ldots$$

Digitized by Google

In simboli:

$$a\epsilon\,(\mathrm{Subst\,C}\infty\,\mathrm{Fq})\,\mathrm{cont}\,.\,0 : x\epsilon\mathrm{C}\infty\,\mathrm{Fq}\,.\,\mathrm{D}x = ax\,.=.$$
$$.=.\,x = \Sigma\,[\,\{\,[\,\mathrm{S}\,(av\,;\,0,\,t)\,|\,t]\,|\,v\,\}^r\,|\,r,\,\mathrm{N}_0]\,x_0\,.$$

Infatti il limite superiore della classe formata dalle moli della sostituzione a per i vari valori di t è finito; indichiamolo con m: allora la serie μx ha i suoi termini minori o eguali a quelli della serie $(\mu x_0)e^{mt}$; ossia la serie x è di convergenza normale.

Formando la serie delle derivate, e ricordando la proprietà associativa delle sostituzioni, si ha che è

$$a_t\,[x_0 + \mathrm{S}\,(a_t x_0\,|\,t\,;\,0,\,t) + \ldots],$$

ossia che è la serie

$$a_t x_t$$

e che è quindi di convergenza normale.

Allora la serie delle derivate è la derivata della serie, e quindi

$$\mathrm{D}x_t = a_t x_t$$

ossia la x soddisfa all'equazione differenziale proposta.

***

Ora vogliamo integrare il sistema:

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = h_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = h_2 + a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots$$

dove le a_{rs} e le h_r sono funzioni date di t.

Allora, se a è una sostituzione dei C∞, funzione d'una variabile reale e continua, e se t_0 è una quantità reale, indicheremo con

$$\mathrm{E}(a\,;\,t_0,\,t)$$

la serie

$$1 + \int_{t_1}^{t} a\,\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t} a\,\mathrm{d}t \int_{t_0}^{t} a\,\mathrm{d}t + \ldots$$

Digitized by Google

Coi simboli del Formulario:

$$a \epsilon (\mathrm{Subst}\, C\infty\, \mathrm{Fq})\, \mathrm{cont}\, .\, t_0, t_1 \epsilon \mathrm{q}\, .\, \mathrm{O}\, .$$
$$\mathrm{E}(a\,;t_0,t_1) = \Sigma\,[\,\hat{\imath}\,[\mathrm{S}\,|\,(av\,;t_0,t)\,|\,t]\,|\,v\,|\,r,\mathrm{N}_0]t_1 \qquad \text{Def.}$$

si ha:

$$\mathrm{E}(a\,;t_1,t_2) = \mathrm{E}(a\,;t_2,t_1)^{-1}$$
$$\mathrm{E}(a\,;t_2,t_3)\,\mathrm{E}(a\,;t_1,t_2) = \mathrm{E}(a\,;t_2,t_3)$$
$$\mathrm{E}(a\,;t,t) = 1$$
$$\mathrm{D}\,[\mathrm{E}(a\,;t_0,t)\,|\,t,\mathrm{q}]\,t = a_t\,\mathrm{E}(a\,;t_0,t)$$
$$\mathrm{D}\,[\mathrm{E}(a\,;t,t_0)\,|\,t,\mathrm{q}]\,t = -\,a_t\,\mathrm{E}(a\,;t,t_0).$$

Se a è costante, si ha:

$$\mathrm{E}(a\,;t_0,t) = \mathrm{e}^{a(t-t_0)}.$$

L'integrale (3) della serie d'equazioni differenziali omogenee prima considerata si potrà scrivere:

$$x_t = \mathrm{E}(a\,;0,t)\,x_0$$

Ritornando alla nostra serie di equazioni si ha:

$$a \epsilon (\mathrm{Subst}\, C\infty\, \mathrm{Fq})\, \mathrm{cont}\, .h \epsilon C\infty\, \mathrm{Fq}\, .\, \mathrm{O}\, :$$
$$x \epsilon C\infty\, \mathrm{Eq}\, .\, \mathrm{D}x = [a_t x_t + h_t\,|\,t,\mathrm{q}]\, .\, =\, .$$
$$x = [\mathrm{E}(a\,;0,t)\,;x_0 + \mathrm{S}\,[\mathrm{E}(a\,;t,0)\,h_t\,|\,t\,;0,t]\,\{\,|\,t,\mathrm{q}].$$

Infatti:

$$t \epsilon \mathrm{q}\, .\, \mathrm{O}\, .$$
$$\mathrm{D}x_t = a_t x_t + h_t$$

ossia

$$\mathrm{D}x_t - a_t x_t = h_t$$
$$\mathrm{E}(a\,;t,0)\,[\mathrm{D}x_t - a_t x_t] = \mathrm{E}(a\,;t,0)\,h_t$$
$$\mathrm{D}\,[\mathrm{E}(a\,;t,0)\,x_t\,|\,t,\mathrm{q}] = [\mathrm{E}(a\,;t,0)\,h_t\,|\,t,\mathrm{q}].$$

Integrando:

$$\mathrm{E}(a\,;t,0)\,x_t - x_0 = \mathrm{S}\,[\mathrm{E}(a\,;t,0)\,ht\,|\,t\,;0,t]$$

da cui se $t \epsilon \mathrm{q}\, .\, \mathrm{O}\, .$

$$\mathrm{E}(a\,;t,0)\,x_t = x_0 + \mathrm{S}\,[\mathrm{E}(a\,;t,0)\,ht\,|\,t\,;0,t]$$

Digitized by Google

ossia

$$x = [\mathrm{E}(a\,;0,t)\}\,x_0 + \mathrm{S}\,[\mathrm{E}(a\,;t,0)\,ht\,|\,t\,;0,t]\,\}\,|\,t,\mathrm{q}] =$$
$$= [\}\,\mathrm{E}(a\,;0,t)\,x_0 + \mathrm{S}\,[\mathrm{E}(a\,;u,t)\,hu\,]\,u\,;0,t]\,\{\,t,\mathrm{q}].$$

Dando all'integrale la forma oggi più comune, il valore di x_t sarà:

$$x_t = \mathrm{E}(a\,;0,t)\,x_0 + \int_0^t \mathrm{E}(a\,;u,t)\,h_u\,\mathrm{d}u\,.$$

§ 7. — *Determinanti d'una sostituzione infinita.*

Se $u \epsilon \mathrm{qF}(\mathrm{N}_1 : \mathrm{N}_1)$ cioè è una matrice di quantità reali, infinita a due sensi, cioè il germe d'una sostituzione infinita, si chiama determinante u, in simboli $\mathrm{Dt}u$, il limite del determinante formato colle prime n orizzontali e verticali di u, per n vergente ad infinito:

$$\mathrm{Dt}\,(u\,;\mathrm{N}_1 : \mathrm{N}_1) = \lim \mathrm{Dt}\,(u\,;1 \cdots n : 1 \cdots n). \qquad \text{Def.}$$

Per riconoscere che un determinante d'ordine infinito ha valore, si ha la regola di Poincaré (1886). Se i termini della diagonale principale sono tutti l'unità e gli altri formano serie doppia convergente, il determinante infinito ha valore, cioè quel limite esiste.

Von Koch (1891) ha esteso il criterio di convergenza al caso in cui gli elementi della diagonale principale formano un prodotto infinito convergente, e tutti gli altri una serie doppia convergente.

Premesso che: Determinante d'una sostituzione è il determinante del suo germe:

$$a \epsilon \,\mathrm{Subst}\,\mathrm{C}\infty\,.\,\mathfrak{O}\,.\,\mathrm{Dt}a = \mathrm{Dt}\,\mathrm{s}^{-1}a. \qquad \text{Def.}$$

Questi casi noti si possono riassumere nel seguente teorema:

$$u \epsilon \mathrm{qF}\,(\mathrm{N}_1 : \mathrm{N}_1)\,.\,\Sigma\,(\mathrm{m}u\,;\mathrm{N}_1 : \mathrm{N}_1) \epsilon \mathrm{Q}\,.\,\mathfrak{O}\,.\,\mathrm{Dt}(1 + \mathrm{s}u) \epsilon \mathrm{q}$$

Digitized by Google

cioè se u è una matrice infinita in due direzioni e la serie doppia formata coi valori assoluti degli u è convergente, il determinante della sostituzione $1 + su$ ha valore determinato e finito.

Si dicono invarianti della sostituzione a, o del suo germe, i coefficienti dello sviluppo di

$$\mathrm{Dt}(1 + la)$$

secondo le potenze ascendenti del numero l.

Conviene però di definirli direttamente come è fatto nel *Formulario* per il caso delle sostituzioni d'ordine n. Indicando con I l'invariante primo, si ha:

$$\mathrm{I}u = u_{11} + u_{22} + \ldots = \sum (u_{rr} | r, \mathrm{N}_1). \qquad \text{Def.}$$

Si ha allora il notevole teorema:

$$a \in \mathrm{Subst\,C}\infty \,.\, \mathrm{I}a \in \mathfrak{q} \,.\, \mathfrak{O} \,.\, \mathrm{Dt}\, e^a = e^{\mathrm{I}a}.$$

Ossia: Essendo a una sostituzione infinita, se la serie che rappresenta il suo invariante primo è convergente, allora il determinante della sostituzione esponenziale e^a vale l'esponenziale dell'invariante di a.

Pel caso di n finito vedi *Formulario*, pag. 249, Prop. 11·4.

Siccome le sostituzioni infinite sono limiti di quelle d'ordine finito, così il teorema varrà anche in questo caso. Ecco così dimostrata l'esistenza del determinante d'una sostituzione in cui non sono verificate nè le ipotesi del Poincaré, ne quelle di Von Kock.

§ 8. — *Sostituzioni continue.*

Le sostituzioni si incontrano di nuovo nell'equazione che il Fredholm (*) chiamò di Abel:

$$gx = \int_0^1 k(x, y) f y \mathrm{d}y.$$

(*) *Acta Mathematica*, 1903, t. 27.

Digitized by Google

k qui è una funzione delle due variabili, varianti entrambe fra 0 ed 1; la suppongo continua per semplicità:

$$k \epsilon \mathrm{qF}(\theta : \theta) \text{ cont.}$$

Dirò complesso continuo una funzione reale definita nell'intervallo da 0 ad 1, e continua; e scriverò:

$$\mathrm{Cc} = (\mathrm{qF}\theta) \text{ cont.} \qquad \text{Def.}$$

Nell'equazione precedente, $f \epsilon \mathrm{Cc}$, ed $x \epsilon \theta$. Supponendo x variabile, cioè posto:

$$g = \} \mathrm{S}[k(x,y) fy | y, \theta] | x, \theta \{ ,$$

quest'equazione fa corrispondere ad ogni complesso continuo f. un altro complesso continuo g; e la g è funzione lineare di f.

Chiamiamo sk, cioè sostituzione di germe k, la sostituzione che trasforma f in g; cioè poniamo la definizione:

$$k \epsilon [\mathrm{qF}(\theta : \theta)] \text{ cont} . \supset .$$
$$sk = [\} \mathrm{S}[k(x,y) fy | y, \theta] | x, \theta \{ | f, \mathrm{Cc}] \qquad \text{Def.}$$

e la chiameremo sostituzione continua.

Scriveremo skf invece di $(sk)f$, e $skfx$ invece di $(skf)x$.

Estendo le definizioni di mole ai Cc:

$$\mu f = \mathrm{l}' \mathrm{m} f ' \theta . \qquad \text{Def.}$$

Definiamo, come in § 4, la mole d'una sostituzione continua:

$$\mu sk = \mathrm{l}' \left[\frac{\mu skf}{\mu f} | f ' \mathrm{Cc} \sim \imath 0 \right] . \qquad \text{Def.}$$

Ripetendo quanto si è visto al § 4, si ha:

$$\mu sk = \mathrm{l}' \{ \mathrm{S}[\mathrm{m}k(x,y) | y, \theta] | x ' \theta \} .$$

Ossia la mole della sostituzione che ha per germe k è eguale al limite superiore dei valori che l'integrale, preso fra 0 ed 1.

Digitized by Google

del modulo di $k(x,y)$, considerando y come variabile d'integrazione, assume ove x varii fra 0 ed 1.

Si ha subito:

$$f \epsilon \mathrm{Cc} \,.\, \Omega \,.\, \mu(\mathrm{s}kf) \leqq \mu \mathrm{s}k \times \mu f.$$

Abbiamo poi la formula per il prodotto funzionale di due sostituzioni continue:

$$k, h \epsilon [\mathrm{qF}(\theta : \theta)] \,\mathrm{cont} \,.\, \Omega \,.\, (\mathrm{s}k)(\mathrm{s}h) =$$
$$\} \mathrm{S} [k(x,z)\, h(z,y) \,|\, z' \theta] \,|\, (x,y), \theta : \theta \{.$$

Cioè il prodotto delle sostituzioni di germe k ed h corrispondentemente ai valori x e y, amendue compresi fra 0 ed 1, è dato da:

$$\int_0^1 k(x,z)\, h(z,y)\, \mathrm{d}z \,.$$

Porremo per definizione:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{s}k} = 1 + \mathrm{s}k + \frac{(\mathrm{s}k)^2}{2!} + \ldots$$

che è di convergenza normale, come quella del § 4.

§ 9. — *Equazioni integro-differenziali.*

Passo ora a considerare l'equazione integro-differenziale:

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = \int_0^1 k(x,y)\, f(t,y)\, \mathrm{d}y$$

dove k è una funzione data di 2 variabili, varianti tra 0 e 1, ed f è la funzione incognita da determinarsi; f è funzione di t, ove t varia nel campo delle quantità reali, e di x, ove x varia fra 0 ed 1.

Pongo $(ft)x$ invece di $f(t,x)$.

L'equazione (1) si scriverà:

$$\mathrm{D}f = (\mathrm{s}k)f. \tag{1}$$

Digitized by Google

E il suo integrale è come prima:

$$ft = e^{t\,sk} f0. \tag{2}$$

In simboli ideografici si ha:

$$k \epsilon \mathrm{qF}(\theta : \theta) \text{ cont} . \supset : f \epsilon \mathrm{Cc\,Fq} .$$
$$\mathrm{D}f = skf . = . f = (e^{t\,sk} f0 \mid t, \mathrm{q}).$$

Scrivendo i primi termini della serie che dà l'integrale dell'equazione integro-differenziale data:

$$f(t,x) = f(0,x) + t \int_0^1 k(x,y) f(0,y)\, dy +$$
$$\frac{t^2}{2!} \int_0^1 k(x,y)\, dy \int_0^1 k(y,z) f(0,z)\, dz + \ldots$$

Ossia l'equazione (1) si integra con una serie. Il primo termine è $f(0,x)$. Un termine qualunque si ottiene dal precedente moltiplicandolo per $\frac{t}{n}$, sostituendolo al posto di x, una nuova variabile y, moltiplicandolo per $k(x,y)$ e integrando rispetto a y fra 0 ed 1.

Per la dimostrazione si ripete letteralmente la dimostrazione data al § 6, ove, naturalmente, invece di a si metta sk.

***

L'equazione differenziale lineare non omogenea:

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = \int_0^1 k(x,y) f(t,y)\, dx + y(t,x)$$

si tratta come la corrispondente del § 6, e si ha:

$$k \epsilon \mathrm{qF}(\theta : \theta) \text{ cont} . h \epsilon \mathrm{Cc\,Fq} . \supset :$$
$$f \epsilon \mathrm{Cc\,Fq} . \mathrm{D}f = skf + h . = .$$
$$f = [e^{t\,sk} \mid f0 + \mathrm{S}[e^{-t\,sk} ht \mid t ; 0, t] \mid t, \mathrm{q}].$$

Per la dimostrazione si ripete la stessa data al § 6, ove si ponga invece di a, sk.

Digitized by Google

***

Veniamo ora al caso d'una sostituzione continua e variabile: ossia vogliamo integrare l'equazione:

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = \int_0^1 k(t,x,y)\, f(t,y)\, dy .$$

In simboli si ha il teorema:

(3) $$k \epsilon \mathrm{qF}(\theta : \theta) \operatorname{cont} \mathrm{Fq} \,.\, \mathfrak{O} : f \epsilon \mathrm{CcFq} \,.$$
$$\mathrm{D}f = \mathrm{s}kf \,.=.\, f = [\mathrm{E}(\mathrm{s}k\,;\, 0, t)\, f0 \,|\, t, \mathrm{q}] \,.$$

La $\mathrm{E}(\mathrm{s}k\,;\, t_0, t)$ è definita in modo identico alla $\mathrm{E}(a\,;\, t_0, t)$ del § 6.

Per essa valgono le stesse proprietà che valgono per la $\mathrm{E}(a\,;\, t_0, t)$.

La dimostrazione del teorema è identica a quella data al § 6.

***

Vogliamo ora integrare l'equazione:

$$\frac{\partial f(t,y)}{\partial t} = \int_0^1 k(t,x,y)\, f(t,y)\, dy + h(t,x).$$

Si ha:

$$k \epsilon \mathrm{qF}(\theta : \theta) \operatorname{cont} \mathrm{Fq} \,.\, h \epsilon \mathrm{CcFq} \,.\, \mathfrak{O} :$$
$$f \epsilon \mathrm{CcFq} \,.\, \mathrm{D}f = \mathrm{s}kf + h \,.=.$$
$$f = [\mathrm{E}(\mathrm{s}k\,;\, 0, t) \,\}\, f0 + \mathrm{S}\,[\mathrm{E}(\mathrm{s}k\,;\, t, 0)\, ht \,|\, t\,;\, 0, t] \,\{\,|\, t, \mathrm{q}].$$

La dimostrazione è identica a quella data al § 6.

§ 10. — *Sostituzioni continue e discontinue.*

Non ogni sostituzione dei Cc è necessariamente della forma:

$$\mathrm{s}kfx = \int_0^1 k(x,y)\, fy dy.$$

Digitized by Google

Non è tale l'identità, o la moltiplicazione per un fattore costante:

$$g = cf,$$

o per un fattore variabile, ecc.

In generale sia ψx una classe di numeri compresi fra 0 ed 1, determinata quando sia determinato x compreso fra 0 ed 1, cioè:

$$\psi \epsilon (\mathrm{Cls}' \theta)\, F\theta.$$

Se ψx è una classe d'un numero finito di elementi, pongo:

$$gx = \Sigma\, [h(x,y)\, fy \,|\, y, \psi x],$$

avremo che g è funzione lineare di f, cioè una sostituzione dei Cc. Lo stesso avviene se ψx è un insieme di infiniti numeri, ma un insieme numerabile, e i coefficienti sono presi in modo che la serie precedente sia convergente. Un esempio è $\psi x = x^{N_1}$, cioè le successive potenze di x. Se poi ψx è un intervallo, nell'intervallo θ, si trovano integrali che sono però riduttibili alla natura di quelli considerati nel § 8, in cui il germe k presenta discontinuità senza impedire l'integrazione.

Se a è una sostituzione del tipo espresso con integrale, o del tipo sommatorio, o somma d'una d'un tipo e d'un'altra dell'altro, si applicano senz'altro tutte le formule precedenti.

Tale è l'equazione:

$$(1) \qquad \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = \int_0^1 k(x,y)\, f(t,y)\, dy + cf(t,x) + g(t,x),$$

che si integra coll'esponenziale e^{c+k}.

Un'equazione simile alla (1) è trattata da V. Volterra nei " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei „, 6 febbr. 1910 (*).

(*) Nella nota V. Volterra, *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*, " R. Accademia Lincei „, 20 febbraio 1910, l'autore indica il procedimento col quale possono trasportarsi le considerazioni svolte nel caso dei limiti variabili in quello più generale dei limiti costanti.

Recentissimamente il Moore dell'Università di Chicago nell' " Intro-

Digitized by Google

In generale l'equazione:

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = \int_0^1 k(t;x,y)\, f(t,y)\, dy + \Sigma\,[h(t;x,y)\, f(t,y)\,|\,y,\psi x] + g(t,x)$$

si integra colla serie E.

Supposto $g = 0$, vale a dire che l'equazione in f sia omogenea, chiamisi a la somma della sostituzione continua di germe k e della discontinua di germe h.

Allora l'equazione differenziale si scriverà:

$$Df = af, \tag{1}$$

e il suo integrale è dato dalle formule (2) e (3) del principio della presente nota, ovvero dalle corrispondenti (2) e (3) del § 6, ovvero da quelle del § 9. I primi termini dello sviluppo di $f(t,x)$ sono:

$$f(t,x) = f(0,x) + \int_0^t dt \Big\{ \int_0^1 k(t;x,y) f(0,y)\, dy + \Sigma\,[h(t;x,y) f(0,y)\,|\,y,\psi x] \Big\} +$$
$$\int_0^t dt \Big[\int_0^1 k(t;x,y)\, dy \int_0^t dt \Big\{ \int_0^1 k(t;y,z) f(0,z)\, dz + \Sigma\,[h(t;y,z) f(0,z)\,|\,z,\psi y] \Big\} +$$
$$\Sigma \Big[h(t;x,y) \int_0^t dt \Big\{ \int_0^1 k(t;y,z) f(0,z)\, dz + \Sigma\,[h(t;y,z) f(0,z)\,|\,z,\psi y] \Big\} \,|\, y,\psi x \Big] \Big] + \ldots.$$

Se l'equazione contiene anche il termine $g(t,x)$, alla serie scritta bisogna aggiungere la serie indicata in simboli dall'ultimo termine della formula del § 6, o dalla corrispondente del § 9.

duction to a form of general analysis », 1910, tratta coi metodi e coi simboli della logica matematica (pag. 11) le equazioni integro-differenziali.

Però mi pare che tutti i risultati contenuti nel presente mio scritto siano nuovi, come pure i metodi per trovarli, cioè l'esponenziale d'una sostituzione e la sua mole, che permette di riconoscere la convergenza assoluta di questa serie, come per le serie comuni.

Digitized by Google

Adunanza del 3 Aprile 1910.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: SPEZIA, SEGRE, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, PARONA, MATTIROLO, SOMIGLIANA, FUSARI e CAMERANO Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente. — Scusa la sua assenza il Socio NACCARI.

Il Presidente comunica il ringraziamento del Vice Presidente S. E. BOSELLI per l'interessamento dell'Accademia alla salute della sua signora.

Il telegramma che nell'atto di assumere la carica di Ministro della Pubblica Istruzione, S. E. CREDARO ha inviato all'Accademia. La Classe incaricò il Presidente di ringraziare S. E. il Ministro.

Gli inviti all'Accademia per i Congressi seguenti: " Congrès scientifique international Américain „ di Buenos Aires „ e del " IX^e Congrès Géologique international „ di Stoccolma.

La Classe dà mandato al Presidente per designare chi possa rappresentare l'Accademia a detti Congressi.

Il Socio GUARESCHI presenta in omaggio la 1ª parte di un suo lavoro: *La Chimica in Italia dal 1750 al 1800*, con una introduzione *Sullo stato dell'Italia nella seconda metà del sec. XVIII*, specialmente riguardo all'istruzione.

Il Socio JADANZA presenta per l'inserzione negli *Atti* una nota intitolata: *Determinazione delle costanti in un cannocchiale distanziometro.*

Il Socio MATTIROLO presenta per l'inserzione nelle *Memorie* il lavoro del Dr. Angelo CASU, intitolato: *Lo stagno di S.ta Gilla (Cagliari) e la sua vegetazione.* Parte 1ª.

Il Presidente delega i Soci MATTIROLO e PARONA per esaminare il detto lavoro.

Digitized by Google

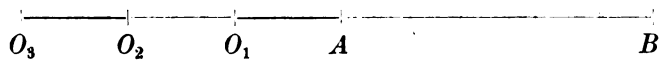
LETTURE

Determinazione delle costanti in un cannocchiale distanziometro.

Nota del Socio NICODEMO JADANZA.

I.

Su di un terreno piano si misuri colla massima diligenza possibile la distanza D tra due punti A e B fissati sul terreno mediante



due picchetti; quindi sull'allineamento BA si facciano diverse stazioni in diversi punti O_1, O_2 ... O_n le cui distanze da A sieno rispettivamente d_1, d_2, d_3 ... d_n. Poste due stadie, debitamente campionate, in A e B si leggano da ciascuna stazione i segmenti di stadia compresi tra i fili estremi del reticolo (il cannocchiale essendo orizzontale) tanto sulla stadia situata in B quanto su quella situata in A.

Sieno S_B', S_B'', S_B''' ... $S_B^{(n)}$

ed S_A', S_A'', S_A''' ... $S_A^{(n)}$

i segmenti compresi tra i fili estremi del reticolo letti rispettivamente sulle stadie in B ed in A, si avranno, per l'equazione della stadia:

$$\text{in } O_1 \begin{cases} d_1 + D = c + KS_B' \\ d_1 \quad\quad = c + KS_A' \end{cases}$$

$$\text{in } O_2 \begin{cases} d_2 + D = c + KS_B'' \\ d_2 \quad\quad = c + KS_A'' \end{cases}$$

. . . . . .

$$\text{in } O_n \begin{cases} d_n + D = c + KS_B^{(n)} \\ d_n \quad\quad = c + KS_A^{(n)} \end{cases}$$

Digitized by Google

Da queste per sottrazione si ottengono le diverse equazioni di 1° grado:

$$(1)\qquad \begin{cases} D \cdot \frac{1}{K} = S_B' - S_A' \\ D \cdot \frac{1}{K} = S_B'' - S_A'' \\ \cdots\cdots\cdots \\ D \cdot \frac{1}{K} = S_B^{(n)} - S_A^{(n)} \end{cases}$$

le quali servono a trovare il valore più probabile di $\frac{1}{K}$.

Esso sarà dato da

$$(2)\qquad \frac{1}{K_0} = \frac{(S_B' - S_A') + (S_B'' - S_A'') + \ldots + (S_B^{(n)} - S_A^{(n)})}{n\,D}$$

Ponendo

$$r_1 = \frac{1}{K_0} - \frac{S_B' - S_A'}{D}$$

$$r_2 = \frac{1}{K_0} - \frac{S_B'' - S_A''}{D}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$r_n = \frac{1}{K_0} - \frac{S_B^{(n)} - S_A^{(n)}}{D}$$

L'errore medio di $\frac{1}{K}$ sarà dato da

$$(3)\qquad m_{\frac{1}{K}} = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$

e quello di K, poichè è

$$K = K^2 \cdot \frac{1}{K}$$

dall'altra

$$(4)\qquad m_K = K^2 \cdot \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$

Digitized by Google

Esempio numerico.

Il reticolo di un tacheometro del Costruttore *Simms* è composto di 5 fili orizzontali ed uno verticale. Ai due fili estremi è assegnato dal costruttore il rapporto 50 ed alla coppia formata dai fili 2° e 4° è assegnato il rapporto 100. I risultati delle esperienze fatte nel modo indicato innanzi sono i seguenti:

	Coppia dei fili estremi	Coppia dei fili 2° e 4°
$d_1 = 6$ metri	$S_B' = 1^m,1190$	$S_B' = 0^m,5590$
	$S_A' = 0\ ,1200$	$S_A' = 0\ ,0600$
$d_2 = 7$ „	$S_B'' = 1\ ,1425$	$S_B'' = 0\ ,5705$
	$S_A'' = 0\ ,1405$	$S_A'' = 0\ ,0700$
$d_3 = 8$ „	$S_B''' = 1\ ,1600$	$S_B''' = 0\ ,5795$
	$S_A''' = 0\ ,1600$	$S_A''' = 0\ ,0800$

$$D = 50^m.$$

Ponendo per brevità $\Sigma = S_B - S_A$, si ottiene:
per la coppia dei fili estremi

$$\Sigma_1 = 0^m,999\ ; \qquad \Sigma_2 = 1^m,002\ ; \qquad \Sigma_3 = 1^m,000$$

e per la coppia dei fili 2° e 4°

$$\Sigma_1 = 0^m,4990\ ; \qquad \Sigma_2 = 0^m,5005\ ; \qquad \Sigma_3 = 0,4995.$$

Si avrà quindi per la coppia dei fili estremi:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{50} \cdot \frac{0,999 + 1,002 + 1,000}{3} = 0,0200067$$

$$K = 49,98$$

e per la coppia dei fili 2° e 4°:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{50} \cdot \frac{0,4990 + 0,5005 + 0,4995}{3} = 0,0099934$$

$$K = 100,07.$$

Digitized by Google

Per il calcolo dell'error medio si ottiene:

Per la coppia dei fili estremi

$$c_1 = + 0{,}0000267$$
$$c_2 = - 0{,}0000333$$
$$c_3 = + 0{,}0000067$$

e perciò

$$m_{\underset{K}{1}} = \pm 0{,}00003037$$

ed

$$m_K = \pm 0{,}076 .$$

Per la coppia dei fili 2° e 4°

$$c_1 = + 0{,}0000134$$
$$c_2 = - 0{,}0000166$$
$$c_3 = + 0{,}0000034$$

e quindi

$$m_{\underset{K}{1}} = 0{,}0000152$$

ed

$$m_K = 0{,}152 .$$

II.

Le diverse osservazioni S_B ed S_A non debbono, a rigore, ritenersi dello stesso peso; conviene quindi esaminare come si modifica la (2) quando si tien conto dei pesi di ciascuna osservazione.

L'error medio m_S di una S qualunque è dato, in generale, indicando con D la distanza dalla relazione

$$m_D = K m_S = m_0 . D$$

dove m_0 è l'error medio dell'unità di distanza.

Sarà quindi:

$$m_{S_B} = \frac{m_0}{K} (D + d)$$

$$m_{S_A} = \frac{m_0}{K} . d .$$

Digitized by Google

Indicando con Σ la differenza $S_B - S_A$ si otterrà:

$$m^2_\Sigma = m^2_{S_B} + m^2_{S_A}$$

ossia:

$$m^2_\Sigma = \frac{m_0^2}{K^2}(D+d)^2 + \frac{m_0^2}{K^2}d^2$$

e quindi, ponendo

$$p = \frac{1}{m^2_\Sigma}$$

sarà:

$$p = \frac{K^2}{m_0^2[(D+d)^2+d^2]} = \frac{K^2}{m_0^2 D^2\left[1+\frac{2d}{D}+\frac{2d^2}{D^2}\right]}$$

ed anche

$$p = \frac{1}{1+\frac{2d}{D}+\frac{2d^2}{D^2}}$$

Pel valore più probabile di $D\frac{1}{K}$ si prenderà la media ponderata:

$$D\frac{1}{K_0} = \frac{p_1\Sigma_1 + p_2\Sigma_2 + \ldots + p_n\Sigma_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} \tag{5}$$

dove è

$$p_1 = \frac{1}{1+\frac{2d_1}{D}+\frac{2d_1^2}{D^2}} \cdots\cdots p_n = \frac{1}{1+\frac{2d_n}{D}+\frac{2d_n^2}{D^2}}$$

I valori di $p_1, p_2 \ldots p_n$ si calcolano facilmente nella pratica.

Esempio numerico.

Calcolando il valore di K per la coppia dei fili 2° e 4° del reticolo di cui è parola nell'esempio precedente si ottiene:

$$\Sigma_1 = 0{,}4990 \qquad p_1 = 0{,}79$$
$$\Sigma_2 = 0{,}5005 \qquad p_2 = 0{,}76$$
$$\Sigma_3 = 0{,}4995 \qquad p_3 = 0{,}73$$

Digitized by Google

$$p_1\Sigma_1 = 0{,}394210\,; \qquad p_2\Sigma_2 = 0{,}380350\,; \qquad p_3\Sigma_3 = 0{,}364635$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 2{,}28$$

$$p_1\Sigma_1 + p_2\Sigma_2 + p_3\Sigma_3 = 1{,}139195$$

e quindi:

$$\frac{1}{K_0} = \frac{1}{50} \cdot \frac{1{,}139195}{2.28} = 0{,}009993$$

ossia:

$$K_0 = 100{,}07\,.$$

Si ottiene così lo stesso valore che si è avuto considerando le osservazioni dello stesso peso. Ciò era da prevedersi visto che i diversi pesi sono presso a poco eguali tra loro.

Nella pratica si ottiene facilmente tale proprietà facendo i valori di d_2, d_3 ... poco differenti tra loro.

Considerando adunque che si può sempre applicare la formola (2) con opportune disposizioni delle esperienze, si vede facilmente come il metodo da noi proposto sia il più semplice tra tutti quelli finora indicati dai cultori della Geometria Pratica.

La costante c che entra nell'equazione della stadia è sempre conveniente misurarla direttamente.

Ciò si vede subito osservando che si ha:

$$c = D - KS$$

e quindi:

$$m_c = K m_S\,. \tag{6}$$

Se m_i indica l'errore medio di una lettura sulla stadia si ha:

$$m_S = m_i\sqrt{2}$$

e perciò:

$$m_c = K\sqrt{2}\,.\,m_i\,. \tag{7}$$

Ponendo $m_i = 0^m{,}001$ e $K = 50$, si ottiene per m_C il valore $0^m{,}07$ che è inammissibile. Qualunque misura diretta di c non darà mai un errore così grande.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 17 Aprile 1910.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: NACCARI, Direttore della Classe, SPEZIA, SEGRE, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA, GRASSI, SOMIGLIANA, FUSARI e CAMERANO Segretario. — Scusa la sua assenza il Socio MATTIROLO.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente.

Il Presidente annunzia la morte del Prof. Francesco ARDISSONE Socio corrispondente. La presidenza già inviò le condoglianze alla famiglia.

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° Prof. Vincenzo FINO, *Brucite di Viù*, dal Socio SPEZIA;

2° Dr. A. ROCCATI, *Ricerche petrografiche sulle Valli del Gesso - Aplite del lago delle Rorine - I suoi fenomeni di contatto ed i suoi inclusi*, dal Socio SPEZIA;

3° *Sopra alcuni presunti effetti chimici e fisici della pressione uniforme in tutti i sensi*, del Socio SPEZIA;

4° Prof. F. GIOLITTI e G. TAVANTI, *Ricerche sulla fabbricazione dell'acciaio cementato; VII. Studio di un processo di cementazione fondato sull'azione specifica dell'ossido di carbonio*, dal Socio GUIDI;

Digitized by Google

5° Prof. Pietro Gambèra, *Alcune conseguenze dedotte dall'ipotesi moderna sulla entità del calorico e della temperatura,* dal Socio Fileti.

Il Socio Parona, a nome anche del Socio Mattirolo, legge la relazione sulla Memoria del Dr. A. Casu, *Lo Stagno di S.ta Gilla (Cagliari) e la sua vegetazione.* La relazione favorevole è approvata all'unanimità e pure con votazione segreta unanime la Classe approva la stampa del lavoro nelle *Memorie* accademiche.

Digitized by Google

LETTURE

Brucite di Viù.

Nota del Prof. VINCENZO FINO.

Durante la perforazione di una galleria sotto il colle di Fubina, eseguita dalla Società Elettrica dell'Alta Italia per il nuovo impianto idroelettrico di Pian Funghera, nel quale si trae partito dalle acque della Stura di Viù, si trovò, alla profondità di metri 163 dall' imbocco ovest, un minerale bianco incluso nel serpentino che costituisce la roccia di cui è formato il colle.

Devo alla cortesia dell' Ingegnere Arnold von Gunten, direttore dei lavori, un campione di questo minerale il quale attirò tosto la mia attenzione. Nelle mie precedenti esplorazioni delle roccie di quella zona delle pietre verdi, colà largamente rappresentata, io non avevo mai incontrato nulla di simile. Lo sottoposi ad alcuni saggi per conoscerne la composizione e siccome il risultato delle mie ricerche dimostra l'esistenza di una specie mineralogica finora non constatata nelle valli di Lanzo e finitime, parmi meritevole di darne una breve relazione.

Il campione che ebbi a mia disposizione si presenta costituito da una massa avente superficialmente una crosta bianca a struttura nettamente mamellonare, translucida cristallina dello spessore di circa tre millimetri nella quale sono sparsi, da un lato dei cristalli incolori prismatici i quali sono tappezzati da una materia bianca quasi opaca.

Sotto a questa crosta havvi uno strato di talco e nuclei di serpentina incastrati in una massa bianca cristallina sfaldibile in tavole rombiche trasparenti incolore.

Staccata con cura una parte della crosta dal talco aderente e priva di cristalli prismatici trasparenti, la sottoposi all'azione dell'acido cloridrico diluito freddo, e poi constatai che poco a poco si discioglieva senza produrre effervescenza. Ripetei il saggio a caldo ed osservai che la dissoluzione si fece rapida-

Digitized by Google

mente e con leggerissima effervescenza. Nel liquido non trovai altro che magnesia, solo traccie di ferro, e totale assenza di calce. Un po' di materia primitiva sottoposta al riscaldamento in un tubettino di vetro mi diede abbondante sviluppo di acqua. Non vi era dubbio, questa crosta doveva essere costituita da idrato magnesico. Infatti all'analisi quantitativa ottenni:

		Quantità teorica
Ossido di magnesio	68.97	68.96
Acqua	30.38	31.03
	99.35	100.00

Il rimanente era materia insolubile in acido cloridrico, ossido ferroso ed anidride carbonica e data la quantità esigua totale, non credetti il caso di determinarne le singole quantità.

Il peso specifico mi risultò di 2.28.

Il minerale calcinato assume un leggero colore rossastro dovuto alle traccie di ferro che contiene.

Colla soluzione di nitrato d'argento (saggio di Lemberg) a freddo si annerisce dopo un certo tempo, mentre i cristalli prismatici trasparenti non si colorano.

Con una soluzione alcoolica, molto diluita, di curcuma, si colora in giallo più o meno ranciato.

Polverizzato e trattato con cloruro ammonico in polvere ed umettando leggermente con acqua il miscuglio, già alla temperatura ordinaria, mette in libertà dell'ammoniaca riconoscibile all'odore ed ai fumi bianchi con una bacchetta di vetro bagnata di acido cloridrico diluito a pari volume con acqua.

Questo saggio eseguito di confronto sopra un campione di brucite fornitomi cortesemente dal prof. G. Spezia, diede lo stesso risultato. Tale saggio, che non vidi finora accennato per la ricerca della brucite, mi sembra molto convincente.

Questi caratteri mi dimostrano che la crosta esaminata è costituita da *brucite*.

Per contro la materia cristallina trasparente sopradescritta mi risultò essere sostanzialmente carbonato di calcio sotto forma di calcite, ma contenente disseminato dell'idrato di magnesio

Digitized by Google

ossia brucite, allo stesso modo come ebbe Cossa (1) ad osservare in una roccia del monte Somma. Questa constatazione la potei eseguire col nitrato d'argento, come già dissi, col cloruro ammonico e colla soluzione di curcuma.

Data questa associazione in quantità evidentemente variabile da un punto all'altro, mi dissuase dall'eseguire l'analisi quantitativa di questa parte del minerale. Anche il talco con cloruro ammonico dà i fumi bianchi con acido cloridrico, ciò che dimostra che anch'esso contiene disseminata della brucite.

Se ora noi paragoniamo la brucite di Viù con quella di Cogne, che fu pure trovata nel serpentino e che fu studiata da Friedel (2) noi vediamo che differisce sia nella struttura come nella composizione chimica. Mentre la prima è a struttura mamellonare e corrisponde quasi esattamente alla formola $Mg(OH)^2$ con solo traccie minime di ferro e di anidride carbonica, la seconda si presenta in grandi lamine d'un bianco leggermente giallastro, tenera ed a facile sfaldatura, rassomigliante quindi alla nota brucite di Hoboken e che dedotta la silice e la parte insolubile nell'acido cloridrico conterrebbe secondo Friedel:

Ossido magnesiaco	68.53
Protossido di ferro	1.15
Acqua	30.13
	98.81

Io ritengo pertanto che forse non sarà difficile ritrovare lo stesso minerale da me studiato in altre località delle nostre Alpi e che forse sia passato finora inosservato perchè si presenta con una struttura diversa da quella delle comuni bruciti.

(1) " Atti della R. Accademia dei Lincei „, vol. III, serie II e *Ricerche chimiche mineralogiche su roccie e minerali d'Italia*, pag. 204.

(2) " Atti R. Accademia delle Scienze di Torino „, vol. XVIII, pag. 75.

Digitized by Google

Ricerche petrografiche sulle Valli del Gesso.

Aplite del Lago delle Rovine.
I suoi fenomeni di contatto ed i suoi inclusi.

Nota del Dr. ALESSANDRO ROCCATI.

(Con 1 Tavola).

In alcune delle precedenti Note (1) in cui ho trattato della costituzione litologica delle Valli del Gesso (che si aprono nel noto massiccio gneissico dell'Argentera nelle Alpi Marittime), ho già avuto occasione di indicare la presenza di numerose roccie filoniane, le quali, con una certa frequenza, specialmente nella parte centrale del massiccio, intersecano con potenza e posizione variabili la massa gneissica.

Queste roccie filoniane sono rappresentate da microgranitì, microgranuliti, granititi, porfidi, microdioriti, microanfiboliti, ecc., ma specialmente da *apliti*, che sono le più frequenti, come anche quelle i cui dicchi variano di più nelle dimensioni; infatti sovente la loro potenza non è superiore a pochi centimetri, mentre in certi casi raggiunge parecchi metri.

Tra i filoni di aplite allora menzionati feci rilevare (2) l'importante dicco che comparisce nella ripida e quasi verticale parete limitante la sponda destra del lago delle Rovine (o della Rovina) in prossimità del *gias* (3) del Monighet sottano.

(1) *Ricerche petrografiche sulle Valli del Gesso (Valle delle Rovine)*, " Atti R. Acc. d. Scienze di Torino „, XXXIX, aprile 1904. — *Ricerche petrografiche, ecc. (Serra dell'Argentera)*, Id. id., giugno 1904. — *Ricerche petrografiche, ecc. (Valli di S. Giacomo)*, Id. id. XL, maggio 1905.

(2) *Ricerche petrografiche, ecc. (Valle delle Rovine)*, Loc. cit..

(3) *Gias* è il vocabolo con cui nel dialetto locale sono indicate le rudimentali abitazioni estive dei pastori.

Digitized by Google

In quella regione l'acqua del lago si avanza fino a poca distanza della parete gneissica e gli abbondanti detriti di falda che se ne staccano in conseguenza dell'azione del gelo e disgelo, fortemente agevolata dalla mancanza si può dire totale di vegetazione, vengono a precipitare nel lago, formando un buon tratto della sponda sinistra e fra di essi svolgendosi la mulattiera reale di caccia.

All'epoca delle mie prime ricerche nella Valle delle Rovine (estate 1902) una grande frana staccatasi, appunto in corrispondenza della roccia filoniana, dalle falde della punta Barbis, aveva messo allo scoperto il dicco di aplite, che spiccava nettamente per il suo color biancastro sulla parete grigia gneissica, e di esso già allora molti e voluminosi blocchi e frammenti si potevano osservare nel detrito di falda.

Tornato nella località lo scorso estate potei constatare che una nuova, potente frana si era staccata alla primavera (ostruendo in parte la mulattiera) dalla parete rocciosa in corrispondenza dell'affioramento dell'aplite e, fatto non osservato nelle mie prime visite, potei constatare la presenza nella roccia filoniana di numerosi inclusi di gneiss, alcuni anzi molto voluminosi.

Il fenomeno mi parve degno di esser menzionato, perchè corrisponde bene ad un fatto analogo che ebbi occasione d'osservare e descrivere (1) per un microgranito della regione del lago Brocan, cioè della parte estrema della valle delle Rovine, e che, come facevo allora rilevare, costituisce un fenomeno non comune nelle roccie filoniane del massiccio dell'Argentera, ove non avevo osservato mai antecedentemente la presenza d'inclusi.

Il dicco di aplite del gias del Monighet sottano, dicco che in seguito al nuovo scoscendimento è sempre meglio visibile, percorre tutta la parete rocciosa perdendosi in essa verso la sommità ed ha una larghezza che in alcuni punti è di parecchi metri. Non saprei dire se l'aplite viene ad affiorare nella parte terminale del rilievo gneissico, le condizioni topografiche del luogo, tutt'altro che agevoli, non avendomi permesso di raggiungerla, nè dal versante opposto al bacino del lago (verso il vallone

(1) *Microgranito con inclusi di gneiss del Colle Brocan (Valle del Gesso delle Rovine)*, " Atti R. Acc. d. Scienze di Torino „ XLI, febbraio 1906.

Digitized by Google

del Chiapous), nè, tanto meno, dal versante del lago, ove, come già dissi, la parete è pressochè verticale per qualche centinaio di metri.

La roccia costituente il dicco ha color bianco omogeneo, con struttura finamente granulare o saccaroide, afanitica specialmente in vicinanza del contatto con il gneiss, mentre diventa alquanto più grossolanamente granulare in prossimità degli inclusi, siccome indicherò in seguito. Ad occhio nudo non si distinguono i componenti, eccetto qualche granulo maggiore di quarzo e poche lamelle sporadiche di muscovite, bianca argentea.

È molto compatta e dura, non presentando quella facile divisione secondo piani paralleli alla direzione del dicco, fenomeno che ebbi invece a verificare molto evidente nel microgranito del lago Brocan (loc. cit.).

La composizione mineralogica, che già indicai a suo tempo (1), corrisponde a quella delle tipiche apliti, come del resto vi corrisponde anche la giacitura.

Consta cioè essenzialmente di:

Quarzo, abbondantissimo, in granuli con dimensioni variabili, ma si può dir sempre microscopiche, con non rare inclusioni di *zircone*.

Ortosio in grani, alcuni voluminosi, quasi porfirici, altri invece minuti, analoghi a quelli del quarzo e geminati secondo la legge di Karlsbad. Nei grani maggiori è comune la penetrazione del quarzo, dando luogo alla *struttura vermicolare* (Michel-Lévy), e la presenza di inclusioni di quarzo, generalmente sferoidali.

Plagioclasio, rappresentato essenzialmente da *microclino* (raro) ed *oligoclasio* con associate le geminazioni dell'albite e di Karlsbad e, meno comune, quella del periclino; questa però sempre con strie finissime, interrotte e limitate a zone ristrette del cristallo presso la periferia. Frequenti poi sono i casi d'incurvatura e piegatura nelle linee di geminazione.

Alcuni individui di feldspato si presentano con la solita geminazione di Karlsbad, avendo però una parte semplice, l'altra con finissime strie della geminazione dell'albite, oppure tali strie

(1) *Ricerche petrografiche, ecc. (Valle delle Rovine)*, Loc. cit.

Digitized by Google

finissime ritrovandosi sopra i due individui; osservai pure una certa struttura zonata dovuta ad alterazione interna.

Oltre a questi componenti, che sono i predominanti, la roccia contiene esili laminette di *muscorite* e dell'*apatite* discretamente abbondante; mancano poi assolutamente minerali metallici.

Credetti interessante l'istituire un'analisi complessiva della roccia, i cui risultati serviranno appunto in seguito per opportune considerazioni sulla modificazione dell'aplite al contatto degli inclusi. Ottenni nell'analisi i seguenti valori:

SiO_2	75,08
Al_2O_3	14,80
Fe_2O_3	tr.
CaO	1,78
MgO	tr.
K_2O	4,63
Na_2O	2,07
Perdita per arrovent.	1,02
	99,38

Tale composizione corrisponde quindi bene a quella normale delle apliti (1).

In prossimità degli inclusi gneissici la roccia prende una tinta alquanto grigiastra; la grana della roccia si fa più grossolana e diventa abbastanza abbondante la *biotite* (vedi Tavola, fig. 1, 2, 3, 4) con lamelle a contorno poco distinto, mentre la mica nera è nella roccia normale rarissima e sparsa soltanto qua e là in laminette isolate.

Per il rimanente la composizione mineralogica dell'aplite si manifesta si può dire uguale, essendo soltanto forse un po'

(1) Rosenbusch, *Elemente der Gesteinlehre*. Stuttgart, 1898.

Digitized by Google

meno abbondante il quarzo ed essendo più intenso il fenomeno della penetrazione di questo nell'ortosio, penetrazione che porta nuovamente alla *struttura vermicolare* e ad un aspetto pegmatitico dovuto a numerose inclusioni di varia forma e grandezza. Comune è pure nell'ortosio l'estinzione ondulata.

Presso il contatto con il gneiss limitante la litoclasi riempita della roccia magmica, come pure in prossimità degl'inclusi, comparisce nell'aplite un componente dapprima raro, se non affatto mancante. È questo il *granato*, i cui individui possono essere localmente così abbondanti da stiparsi gli uni sugli altri, gremendo in modo assoluto le zone di contatto; ho già avuto occasione di indicare il fenomeno e di figurarlo nella mia descrizione delle roccie della valle delle Rovine (loc. cit.).

Il granato, per quanto abbondante, è sempre molto minuto e difficilmente visibile ad occhio nudo; si presenta in forma di granuli tondeggianti, senza forma cristallina distinta, con color roseo chiaro od essendo affatto incoloro. I grani sono sovente minutamente fessurati, e qualcuno presenta anomalia ottica di birifrazione.

Noterò qui che la presenza del granato nelle apliti del massiccio dell'Argentera non è un fenomeno costante; ricordo però a questo proposito che in un dicco della regione del Murajon, nel vallone del Mont Colomb, esiste il granato in individui macroscopici, di color rosso scuro, con forme evidenti di rombododecaedro ed icositetraedro.

In prossimità del contatto, sia della roccia incassante che degli inclusi, si osserva pure nell'aplite del lago delle Rovine della *sillimanite* inclusa nel quarzo; essa è in cristalli prismatici allungati, bacillari, incolori, non di rado rotti, incurvati o deformati. Il minerale però più che nell'aplite e negl'inclusi, esiste abbondante nel quarzo del gneiss limitante il dicco.

Nel complesso la roccia aplitica mantiene nel contatto con gli inclusi la sua composizione chimica primitiva, per quanto però vi si possa rilevare una leggera basificazione, che risulta dall'analisi. Trovai infatti per l'aplite del contatto con inclusi la seguente composizione:

Digitized by Google

SiO_2	73,30
Al_2O_3	14,59
$Fe_2O_3 . FeO$	1,49
CaO	2,08
MgO	1,14
K_2O	3,19
Na_2O	1,98
Perdita per arrovent.	1,27
	99,04

dove la presenza della magnesia, prima mancante, si spiega con l'esistenza della biotite nella roccia di contatto.

Il gneiss che forma la parete in cui è insinuato il dicco di aplite è la varietà abbondantemente sviluppata in tutta quella zona del massiccio gneissico ed in cui è, ad esempio, scavato il vallone del Chiapous ed il colle omonimo, che fa comunicare l'alta valle del Gesso di Valdieri con la valle del Gesso di Entraque.

È cioè un gneiss normale a biotite che, all'incontro di molti altri tipi esistenti nel massiccio, non presenta, o soltanto poco pronunziata, la struttura cataclastica e che ha schistosità sempre ben netta, con ripiegature e contorsioni frequenti, sovente accentuate e curiosissime, fenomeno che ebbe già a descrivere e figurare il Prof. F. Sacco (1).

Della stessa natura sono pure i frammenti di gneiss inclusi nell'aplite, i quali devono evidentemente esser stati strappati dalle pareti della spaccatura attraverso alla quale ascendeva la roccia magmica; notevole è però il fatto che gli inclusi sono ricchissimi in biotite (Fig. 1-2 e specialmente 3), in parecchi casi certamente più della roccia incassante, al punto anzi di presentare talora color nero.

Il fenomeno potrebbe provenire o da maggior ricchezza in biotite del gneiss in profondità, oppure, fatto già osservato e

(1) *Fenomeni di corrugamento negli schisti cristallini delle Alpi.* " Atti R. Acc. d. Scienze di Torino, XLI, aprile 1906.

Digitized by Google

descritto da molti autori fra cui dal Lacroix (1), dall'arricchimento della roccia in mica nella sua reazione colla massa fusa, per quanto però molti inclusi non presentino altra modificazione all'infuori di questa, nè nella struttura nè nella composizione. Questa corrisponde alla composizione del gneiss della località, con abbondante *quarzo* (contenente inclusioni di *zircone*), *ortosio*, *albite* ed *oligoclasio*.

L'ortosio, benchè contenga frequenti inclusioni di quarzo, non ha però la struttura vermicolare che vedemmo osservarsi comunemente nell'ortosio dell'aplite; dei feldspati triclini sono da ricordare le alterazioni, per cui dall'oligoclase si forma dell'epidoto e dall'albite un minerale di aspetto micaceo, fatto comune del resto in tutte le roccie feldspatiche della regione.

Accessori del gneiss sono: *muscovite*, *tormalina* incolora, *rutilo* in aghi inclusi nella biotite, *magnetite* e rara *apatite*.

Degli inclusi, come ho detto sopra, alcuni non sembrano aver subito alcuna modificazione nel contatto con la roccia eruttiva e nessuno ha forma arrotondata. Vi è per lo più un distacco ben netto (Fig. 2, 3 e 4), per quanto vi sia sempre un'aderenza molto forte, tra l'incluso e la roccia includente, a differenza di quanto notai invece per gli inclusi del microgranito del lago Brocan, ove l'aderenza è minima, potendosi con un colpo di martello staccare nettamente l'incluso dalla roccia includente.

Altri inclusi dell'aplite (Fig. 1 e 2), pur essendo a distacco ben netto, presentano una zona di contatto di alcuni millimetri avente color biancastro e costituita essenzialmente da quarzo granulare con pochi individui di feldspato e rare lamine di biotite; questa zona sembra con tutta probabilità provenire dalla trasformazione del gneiss, che sarebbe quindi stato parzialmente digerito dalla roccia magmica, risultandone la leggera basificazione dell'aplite che ho indicato sopra e viceversa una notevole acidificazione del gneiss, il quale è normalmente invece alquanto

(1) *Les Enclaves des Roches volcaniques*. Macon, 1893. — *Le Granite des Pyrénées et ses phénomènes de contact (Premier Mémoire)*. — *Les contacts de la Haute-Ariège*, " Bull. des serv. de la Carte géol. de la France, ecc. „. Paris, 1898. — *(Deuxième Mémoire)*. — *Les contacts de la Haute-Ariège, de l'Aude, des Pyrénées-Orientales et des Hautes Pyrénées*, Id. id., 1900.

Digitized by Google

basico in confronto della roccia filoniana. Infatti l'analisi del gneiss di un incluso mi diede i seguenti valori:

SiO_2	64,24
Al_2O_3	15,61
$Fe_2O_3 . FeO$	9,17
CaO	1,22
MgO	3,02
Na_2O	2,16
K_2O	3,61
Elementi volatili	2,47
	101,50

Altri inclusi sembrano essere stati in parte digeriti dalla roccia magmica ed aver poi ricristallizzato perdendo la struttura schistosa, specialmente nella parte marginale (Fig. 1-4); in questo caso non si osserva distacco netto fra incluso e includente, ma è evidente la penetrazione dell'aplite nel gneiss (Fig. 4), oppure si scorge un passaggio graduale dall'includente all'incluso. Anzi, l'aplite arricchendosi di biotite nel contatto, ne consegue che è difficile il distinguere esattamente, anche al microscopio, il punto ove cessa l'una roccia per incominciare l'altra.

Finalmente vi sono casi ove il gneiss dovette essere completamente digerito dal magma, e la sua presenza originaria si può soltanto desumere dall'esistenza nell'aplite di accentramenti ove abbonda la biotite, non essendovi più nessuna distinzione fra incluso e includente.

In conclusione si può ritenere che la roccia magmica ebbe una certa azione metamorfica sopra il gneiss incassante il dicco e sopra quello degli inclusi, per quanto in generale tale azione non sia stata molto profonda e non sembri essersi spinta a grande distanza. Essa si limitò a parziale fusione con susseguente cristallizzazione, accompagnata da reazioni limitate però alle pure zone di contatto, ove ne sarebbero conseguenza la formazione del granato e della sillimanite e fors'anche del rutilo incluso nella biotite.

Il fenomeno può essere attribuito, come già feci osservare a proposito del microgranito del lago Brocan, a ciò, che il magma nel farsi strada attraverso al gneiss non ebbe nè tem-

Digitized by Google

peratura nè forse tempo sufficiente a provocare profonde reazioni fra le due roccie. Deve pure essere mancata la presenza di elementi volatili o solubili, che avrebbero potuto avere una azione più o meno intensa sulla trasformazione chimica della roccia incontrata dal magma ascendente.

Quindi, secondo ammette il Rosenbusch (1) in casi analoghi, nella fusione limitata e ricristallizzazione non dovette manifestarsi che una parziale nuova ripartizione delle molecole, spiegandosi così la formazione del granato e della sillimanite in vicinanza dei contatti.

Del resto la mancanza di profonda reazione fra incluso e includente può essere pure conseguenza della relativa analoga composizione chimica e mineralogica del gneiss e dell'aplite, risultando bene dai citati lavori del Lacroix che, soltanto nel caso di roccie differenti per composizione, come ad esempio calcare e granito, si hanno profonde metamorfosi con abbondante formazione di nuovi minerali, sia a spese dell'incluso che della roccia fluida.

Finalmente la frequente presenza nelle apliti di filoncini costituiti da *quarzo*, *albite* e *epidoto*, o da *quarzo*, *epidoto* e laminette di *ematite* o semplicemente da *epidoto*, mi pare potersi spiegare seguendo l'opinione di Lacroix (2), ammettendo cioè che la loro formazione rappresenti l'ultima eco del fenomeno endogeno, che ha prodotto l'emissione della roccia filoniana.

In quanto poi all'epoca in cui dovette avvenire la formazione dei numerosi filoni di aplite del massiccio dell'Argentera, io credo che si possano ritenere come corrispondenti all'ultima fase eruttiva del granito formante la grande massa che occupa, si può dire, la parte centrale dell'elissoide gneissico nella regione Vallasco-Fremamorta-Saleses-Mollieres.

Difatti si osserva come si è specialmente nelle vicinanze più o meno immediate di tale massa granitica che esistono più abbondanti i filoni di aplite.

Torino. Gabinetto Geo-mineralogico del R. Politecnico.
Aprile 1910.

---

(1) *Mikroskopische Physiographie der massigen Gesteine*, II. Stuttgart, 1896.

(2) *Le Granite des Pyrénées et ses phénomènes de contact. Les contacts de la Haute-Ariège*, Loc. cit.

Digitized by Google

Sopra alcuni presunti effetti chimici e fisici della pressione uniforme in tutti i sensi.

Nota del Socio GIORGIO SPEZIA
Prof. di Mineralogia nella R. Univ. di Torino.

(Con 1 Tavola).

Dalla relazione di Spring, al Congresso internazionale di fisica (1), sulle proprietà dei solidi sotto pressione, sulla diffusione delle materie solide e sui movimenti interni delle materie solide, ne risulterebbe la legge: che i corpi dotati della facoltà di deformarsi sotto pressione senza rompersi, si saldano così solidamente come se essi fossero stati fusi; mentre quelli in cui la malleabilità non si rivela sotto la pressione sono ridotti allo stato polverulento.

Dalla saldatura poi specialmente dei metalli, lo Spring deduce che, per causa della diffusione delle molecole attraverso le superficie di contatto, debbono prodursi delle leghe colla sola pressione e senza l'intervento del calore, ed asserisce di avere infatti prodotto delle leghe metalliche in dette condizioni. E tale concetto di formazione di leghe è anche, sull'autorità di Spring, ammesso nei trattati di leghe metalliche, e, p. es., il Guillet (2) nota: che si possono fare le leghe metalliche colla sola pressione e a temperatura ordinaria, sebbene industrialmente non convenga simile processo.

Ora i detti risultati di Spring potrebbero interessare anche la minerogenesi, la litogenesi ed in complesso la geologia chimica. Lo stesso Spring considerando la formazione delle zone sedimentarie fece delle esperienze in proposito; ma trovò che molti minerali, fra i quali il diffusissimo quarzo, i silicati e la calcite, si lasciano rompere ma non saldare.

(1) *Rapports présentés au Congrès international de Physique*, 1900, p. 402.
(2) *Étude industrielle des alliages métalliques*, 1906, pag. 41.

Digitized by Google

Inoltre l'ipotesi, che il semplice contatto fra due corpi possa sempre produrre una diffusione molecolare fra la superficie di essi colla sola pressione ed a temperatura ordinaria, apparirebbe come appoggio alle teorie di coloro che sostengono essere la pressione da sola capace di far reagire fra di loro i minerali, ossia vorrebbero sostituire la pressione alla necessaria temperatura per le reazioni chimiche.

Siccome poi le leghe metalliche si considerano come soluzioni solide, così se la sola pressione producesse leghe metalliche, il fatto potrebbe essere addotto come prova che la solubilità nella maggior parte dei casi dipenda essenzialmente dalla pressione e non dalla temperatura.

Avendo io già pubblicate molte esperienze, nelle quali ho dimostrato che la pressione, nè per le reazioni chimiche, nè per la solubilità, sia una forza genetica come il calore, costituendo essa, secondo i casi, o soltanto un aiuto, od un ostacolo facilmente superabile dalla temperatura, così ho creduto opportuno di fare qualche esperienza su una lega metallica, per vedere se si possa realmente attribuire alla pressione l'importanza nei processi chimici datale da Spring.

Le mie esperienze riflettono la lega di rame ed argento.

Ho preparato delle fine limature di rame e di argento e le disposi nel cilindro, da sottoporsi a pressione, facendone uno strato di pura limatura d'argento, un altro di pura limatura di rame ed un altro della mescolanza delle due limature, interponendo fra gli strati un disco di sottile lamiera di rame. Il foro del cilindro d'acciaio, nel quale vi erano dette sostanze, aveva due centimetri di diametro e fu posto sotto la macchina a compressione, già usata in altre esperienze e descritta in un precedente lavoro (1), mantenendo la pressione continua di 8000 atmosfere per un mese ; e tale pressione fu data perchè lo Spring (2) asserì che il rame si salda come l'alluminio alla pressione di 6000 atmosfere; adottando quindi la maggior pressione di 2000 atmosfere ponevo l'esperienza in migliori condizioni per il risultato.

---

(1) " Atti R. Acc. Scienze di Torino „, vol. XXV, pag. 750.

(2) " Bull. Ac. roy. des sciences de Belgique „, 2e série, T. XLIX, 1880, pag. 349.

Digitized by Google

Dopo il mese di durata dell'esperienza ottenni un cilindro compatto, il quale però con colpi si lasciò dividere, dove vi erano i dischi di lamiera, in tre piccoli cilindri corrispondenti ai tre strati di limatura. Detti cilindri, aventi diametro di due centimetri, presentavano lo spessore di circa 4 millimetri per quelli di puro rame e puro argento e di circa 7 millimetri quello della mescolanza dei due metalli.

Tali cilindri avevano una perfetta consistenza, talchè ho potuto segarli, limarli e levigarli per le osservazioni metallografiche.

Ora, all'osservazione al microscopio, le sezioni dei cilindri di puro rame e d'argento, se la superficie era ben levigata, non presentavano traccia alcuna di unione fra i granuli di limatura, ma trattando le singole superficie con acido nitrico diluito si presentavano delle corrosioni indicanti i granuli, come appare dalle fig. 1 e 2 nelle quali con ingrandimento di 40 diametri la fig. 1 rappresenta la superficie di puro rame e la fig. 2 la superficie di puro argento. Quindi rimane palese che si tratta di una fortissima adesione fra le particelle fisiche dei metalli, ma non di fusione ossia di movimento molecolare, perchè le figure di corrosione rivelano la struttura granulare della limatura e non la struttura del rame o dell'argento fusi.

Parimenti dal cilindro costituito dalla mescolanza delle limature di rame e di argento avendo segato e preparato una superficie levigata, questa presentava l'aspetto riprodotto dalla fig. 3 con 36 diametri d'ingrandimento, e si scorge che le singole plaghe oscure di rame e chiare d'argento costituite ciascuna da uno o da alcuni minuti granuli di limatura, appaiono perfettamente omogenee senza visibili tracce di unione fra i granuli di limatura; ma assai diverso è l'aspetto quando si sottopone la superficie levigata alla corrosione.

Per tale scopo io ho segato e levigato un altro preparato, ma non credetti conveniente di trattare direttamente la superficie levigata con acido nitrico come avevo fatto nel precedente caso della limatura separata di ciascun metallo, perchè l'acido nitrico corrode più facilmente il rame dell'argento, massimamente quando i due metalli sono in contatto. Perciò operai nel seguente modo: trattai a lungo la superficie con ammoniaca finchè le plaghe di rame fossero corrose sino alla profondità di

Digitized by Google

circa mezzo millimetro; poi coprii tutta la superficie di un velo di paraffina fusa in modo che penetrasse nelle plaghe corrose di rame: quindi levigai di nuovo la superficie tanto da pulire le plaghe d'argento e lasciare coperte di paraffina quelle corrose di rame, e la superficie così preparata fu trattata con acido nitrico facendo corrodere l'argento sino al livello della corrosione del rame; infine ho pulito la superficie togliendo la paraffina con l'etere.

La fig. 4 rappresenta con 25 diametri d'ingrandimento l'aspetto della superficie corrosa e si vede come esista ancora la struttura granulare della limatura dei due metalli, e come non vi sia traccia di diffusione e di lega.

A meglio dimostrare la mancanza di diffusione ho riprodotto alcune plaghe della superficie levigata, nelle quali vi fosse qualche frammento più minuto di rame nell'argento e di argento nel rame e la fig. 5 ne dà con ingrandimento di 160 diametri l'aspetto, da cui si scorge come frammenti di argento e di rame di pochi micromillimetri di dimensione non siano stati rispettivamente assorbiti dal rame e dall'argento.

Per la mia esperienza mi sono contentato di comprimere la limatura finissima di rame e di argento, e non ho seguito il pensiero di Spring che bisogna limare il primo blocco e con tale limatura fare un secondo blocco, poi limare questo secondo e farne un terzo e così di seguito; pensiero espresso da Spring, perchè ammette che, se l'azione meccanica di suddivisione si potesse eseguire perfettamente, si dovrebbe potere colla polverizzazione far passare un corpo allo stato di gas (1).

Data quindi tale imperfezione meccanica, ho esperimentato soltanto con limatura finissima, tanto più che osservai in tale limatura qualche granulo avente soltanto 2 o 3 micromillimetri di dimensioni.

Dalla mia esperienza risulta quindi che la sola pressione statica, anche di 8000 atmosfere, per la durata d'un mese non dà luogo a diffusione fra rame ed argento, ossia con tali pressioni a temperatura ordinaria non si forma lega.

È noto che fra due metalli, le cui superfici sieno in contatto perfetto, havvi diffusione e formazione di lega ad un certo

(1) " Bull. Ac. roy. de Belgique ,, 2e sér., T. XLIX, pag. 338.

Digitized by Google

grado di temperatura minore sempre di quella del più fusibile. Spring fece esperienze in proposito unendo temperatura e pressione; ma Hallock dimostrò che la pressione non è necessaria ed infatti le belle esperienze di Roberts-Austen (1) dimostrarono che la diffusione avviene sempre alla pressione atmosferica e dipende soltanto dalla temperatura e che la intensità di diffusione dipende anche dal tempo, a partire dal limite della sufficiente temperatura.

Invece lo Spring ammettendo che sia sufficiente il contatto fra i metalli per la diffusione ritiene che la sola pressione produce le leghe; infatti egli da una di quelle molto geniali benchè poco persuasive disquisizioni, che accompagnano sovente le sue interessanti esperienze, dopo una serie di considerazioni conchiude: *Si ces considérations sont exactes, il faut que les corps solides soient doués de la propriété d'entrer en réaction chimique sitôt qu'ils seront au contact réel* (2); e adduce, come prova del suo concetto, le leghe metalliche ottenute da lui comprimendo a freddo i loro costituenti in polvere fina.

Quindi per lo Spring la pressione che produce il contatto reale sarebbe l'unica causa della diffusione dei metalli e formazione delle leghe; ed alla temperatura non darebbe alcuna importanza.

Invece a riguardo dell'altro agente, il tempo, pare che esso, secondo lo Spring, sia molto influente, almeno così appare in tesi generale da alcune sue conclusioni a proposito del movimento delle molecole e del loro adattamento alle condizioni esteriori; egli nota che il tempo entra come fattore capitale (3).

Ora quando nelle speculazioni chimico-fisiche si considerano i fattori temperatura, pressione e tempo, è evidente che per le ipotesi basate sui due primi fattori sia facile cercare un controllo nell'esperienza, perchè è possibile sperimentare sino a pressioni fortissime e temperature altissime. Ma quando vi entra il fattore tempo, la difficoltà e più sovente l'impossibilità dell'espe-

(1) " Philosophical Trans. R. Society ". London, vol. 187, pag. 407.
(2) " Bull. Ac. roy. de Belgique ", 3e série, T. XI, pag. 399.
(3) *Rapports présentés au Congrès internat. de physique*, T. I, pag. 430.

Digitized by Google

rimento servono invece a sostenere l'ipotesi; perchè a chi credesse di dimostrare il niun valore di un'ipotesi con un'esperienza della durata, p. es., di 10 anni, si potrebbe rispondere che la durata dell'esperimento deve essere di un secolo.

Quindi per la conoscenza delle proprietà del fattore tempo, quando essa non è possibile colla diretta esperienza, diventano di grande valore le osservazioni mineralogiche su quanto avviene in natura.

Se per l'ipotesi sopraindicata di Spring, che i corpi debbano entrare in reazione chimica tosto che essi siano in contatto reale, si volesse sostenere che la reazione avviene col tempo, l'osservazione in natura non darebbe all'ipotesi un valido appoggio.

Parecchi sono gli esempi che si potrebbero citare di minerali che si trovano in perfetto contatto da epoche geologiche ed anche sotto pressione senza che abbiano reagito fra di loro, sebbene l'equazione chimica scritta sulla carta dimostri la facilità della reazione.

E nel presente caso delle diffusioni fra il rame e l'argento, che dovrebbe avvenire, secondo Spring, per il semplice reale contatto, si ha la prova negativa nel celebre giacimento cuprifero di Keveenaw Point. In tale giacimento si trova il rame nativo inchiudente l'argento, e i due metalli sono in perfettissimo contatto da epoche geologiche! La fig. 6 mostra coll'ingrandimento di 40 diametri l'associazione del rame e dell'argento osservato in un esemplare proveniente dal detto giacimento, e si vede chiaramente come non havvi traccia di diffusione, la quale, se avesse cominciato, è certo che dopo le migliaia d'anni trascorsi avrebbe dato luogo alla lega.

Quindi dalla mia esperienza che prova essere la pressione di 8000 atmosfere per la durata di un mese, senza effetto per la diffusione a temperatura ordinaria fra il rame e l'argento, e dall'osservazione sull'associazione dei due metalli del giacimento di Keveenaw Point, i quali, pur essendo in perfetto contatto da epoche geologiche, non dimostrano traccia di diffusione, risulta ad evidenza provato che se il contatto perfetto è necessario, non è però sufficiente sia per formare leghe metalliche, sia per produrre le reazioni chimiche in generale, per le quali si richiedono altre energie che saranno o termiche, o elettriche, o rag-

Digitized by Google

gianti. La pressione sarà sempre soltanto causa predisponente, perchè aiuta il contatto, ma non sarà causa efficiente di reazione, per la quale altra causa predisponente essenziale è l'affinità chimica.

L'affermazione di Spring che i metalli si uniscano in lega per la semplice pressione è dedotta dal ritenere che i metalli sottoposti a pressione uniforme in tutti i sensi diventino plastici, semiliquidi od anche liquidi.

Ora un principio di plasticità può osservarsi nel comprimere limature di metallo ed avviene naturalmente perchè gli spazi fra i granuli delle limature, per minimi che siano, permettono un piccolo moto della sostanza, ossia intorno a ciascun granulo di limatura la pressione non è uniforme in tutti i sensi.

Parimenti e con più evidenza la plasticità e la fluidità si osservano quando i metalli si costringono colla pressione ad escire da un foro dell'apparecchio, come fu dimostrato dalle prime esperienze di Tresca sui metalli e continuate poi dallo Spring estendendole a molti altri corpi, con importanti ricerche sulle relazioni fra i caratteri fisici dipendenti dalla coesione.

Ma è evidente che, nel caso dell'esperienza sulla fluidità, la pressione non è eguale in tutti i sensi, essendo essa nulla all'apertura da cui fluisce il corpo.

Quindi non si può dedurre che, p. es., il piombo, che secondo Spring fluirebbe alla pressione di 5000 atmosfere, non potendo fluire, debba diventare liquido od anche solo plastico e rimanere tale nell'apparecchio, quando la pressione uniforme in tutti i sensi fosse di 5000 atmosfere od anche maggiore.

In una mia esperienza sulla solubilità del quarzo nelle soluzioni acquose di silicato sodico (1) io ho descritto la disposizione dell'esperimento che, indicata qui in poche parole, si riduceva a comprimere un recipiente di paraffina contenente il liquido circondante la lamina di quarzo sospesa. La pressione fu di 6000 atmosfere per 8 giorni, e ho trovato dopo l'esperienza che la paraffina aveva mantenuta la sua posizione. Se fosse diventata liquida per la pressione io avrei dovuto trovare la paraffina, per la sua minore densità, costituente uno strato sul

(1) " Atti R. Acc. Scienze di Torino „, T. XXXV, pag. 750.

Digitized by Google

liquido, perchè la paraffina, secondo l'esperienza di Spring, fluisce alla pressione di 2000 atmosfere.

Tale fatto potrebbe già essere di valore per dimostrare il diverso comportamento dei corpi fra quelli sottoposti a pressione non uniforme e quelli sottoposti a pressione uniforme in tutti i sensi.

Ad ogni modo, essendo sempre meglio avere il risultato di un'esperienza diretta, io ne eseguii una con un corpo che diventa molto fluido sotto pressione non uniforme, scegliendo a a tale scopo la cera, per la quale lo Spring ha trovato che alla temperatura di 13° ed alla sola pressione di 700 atmosfere fluisce come l'acqua (1).

L'esperienza fu eseguita col principio indicato da Hopkins, nelle sue ricerche sull'influenza della pressione sul punto di fusione, quando la forte pressione non permette l'uso di recipienti trasparenti, cioè di osservare, finita l'esperienza, lo spostamento dall'alto al basso di un corpo di densità maggiore della sostanza che deve passare allo stato liquido.

In un piccolo recipiente perfettamente cilindrico di 2 centimetri di diametro esterno e 5 di altezza, fatto di lamiera di stagno di mezzo millimetro di spessore, posi una pallottola di piombo di 8 millimetri di diametro e poi vi colai dentro della cera fusa procurando che fosse completamente riempito. Tale recipiente, dopo raffreddata e consolidata la cera, fu posto capovolto in un recipiente d'acciaio, in modo che la pallottola di piombo rimaneva, durante la pressione, in alto sopra la cera e se questa fosse per la pressione divenuta liquida, avrebbe dovuto discendere al fondo. Il recipiente di compressione d'acciaio, col fondo a vite e chiusura ermetica, era un cilindro di 11 centimetri di diametro esterno avente nel mezzo un foro di 2 cent., nel quale entrava a contorno esatto il piccolo recipiente contenente la cera; sopra questo poi fu posto il cilindro compressore, pure d'acciaio, colle disposizioni analoghe a quelle che uso per le esperienze di pressione coi liquidi, e ciò affinchè la cera non potesse in modo alcuno fluire dall'apparecchio, il quale fu quindi posto sotto il torchio a pressione continua.

(1) " Bull. Ac. roy. de Belgique „, 2e sér., T. XLIX, pag. 364.

Digitized by Google

La pressione esercitata fu di 9000 atmosfere, la durata di 48 ore ed in tal tempo la temperatura del recipiente d'acciaio fu di 15°.

Or bene, dopo l'esperienza ho trovato la pallottola di piombo al suo posto nella parte superiore.

Ma tale esperienza non mi parve molto concludente a causa della breve durata, perchè sebbene io avessi osservato che dopo 48 ore non vi era stata traccia di spostamento della pallottola di piombo, tuttavia mi rimaneva ancora il dubbio, che la cera potesse assumere uno stato vischioso analogo a quello di certi bitumi, nei quali a temperatura ordinaria, essendo il fatto sempre dipendente dal grado di temperatura, un corpo di maggiore densità affonda con grandissima lentezza.

Perciò a togliermi tale dubbio ripetei l'esperienza portando la durata di essa a 12 giorni ed in pari tempo ho aumentato di poco la pressione che fu di 9900 atmosfere; la temperatura fu di 15°. Ma anche dopo questa seconda esperienza la pallottola di piombo non dimostrò di aver subito traccia di movimento verso il basso.

Ciò prova evidentemente che se la cera con la pressione non uniforme fluisce come acqua alla sola pressione di 700 atmosfere, non diventa liquida, nè semiliquida o vischiosa nemmeno alla pressione di 9900 atmosfere se la pressione è uniforme in tutti i sensi.

Le esperienze dirette quindi dimostrano, che non si possono paragonare gli effetti della pressione uniforme in tutti i sensi cogli effetti di una pressione che tende a far fluire un corpo da un'apertura, dove naturalmente la pressione è nulla.

E la grande differenza fra i due effetti è data anche da considerazioni teoriche.

Quando si esercita una pressione per far fluire, p. es., un metallo da un foro, la forza viva che dà la pressione si converte nel lavoro cinetico della fluidità del metallo; invece, se la pressione è uniforme in tutti i sensi, la forza viva deve necessariamente trasformarsi, per l'elasticità di volume, in un lavoro potenziale di elasticità, avendo poi un limite che può chiamarsi di compressibilità, oltre il quale il volume deve rimanere costante sotto qualsiasi pressione; perchè nella pressione uniforme in tutti i sensi non vi può essere un limite di rottura,

Digitized by Google

come nella compressione in una sola direzione, a meno che si spezzi l'apparecchio nel quale avviene la pressione uniforme della sostanza.

E detta elasticità di volume comparve molto evidente anche nelle descritte esperienze colla cera, e fu dimostrata dallo spontaneo sollevamento di 4 millim. del cilindro compressore quando tolsi la pressione.

Quindi per detta differenza di lavoro prodotto dalla forza viva che fornisce la pressione, non havvi ragione di ammettere che la pressione uniforme in tutti i sensi produca una plasticità od una fluidità, come avviene quando la pressione non è uniforme, quando cioè il corpo ha modo di fluire; ed in conseguenza io ritengo che non si possa, dalla plasticità e fluidità dei metalli od altri corpi sottoposti a pressione non uniforme, dedurre che la pressione uniforme in tutti i sensi debba produrre plasticità e fluidità atte a costituire leghe metalliche o reazioni chimiche, per le quali fattore principale è sempre il calore.

L'idea della plasticità e della fluidità prodotta da una pressione uniforme in tutti i sensi pare mantenuta da Spring e da Kahlbaum per spiegare il curioso risultato di alcune loro esperienze, che cioè la pressione uniforme in tutti i sensi, quando fosse molto grande, produrrebbe l'effetto fisico di aumentare il volume di un corpo sottoposto ad essa.

Lo Spring (1) asserisce che dopo avere compresso il piombo sotto forte pressione trovò che la sua densità da 11,501 prima della compressione, era discesa a 11,492 dopo la compressione, quindi era aumentato di volume. E detto autore afferma pure che, sul principio rimase dubbioso di ammettere ciò che gli pareva paradossale, ma poi in seguito alle esperienze di Kahlbaum, si persuase che la pressione uniforme i tutti i sensi, che egli chiama idrostatica per meglio indicare l'uniformità di pressione, possa fare aumentare il volume.

Il Kahlbaum (2) avrebbe sperimentato prima sul rame ed avrebbe trovato che comprimendolo a 20000 atmosfere era di-

(1) " Journal de chimie physique ". T. I, 1903, pag. 594.

(2) " Verhandlungen der Naturforschender Gesell. in Basel ", 1903, Bd. XV, pag. 1.

Digitized by Google

minuito di densità; inoltre il Kahlbaum, per esperienze fatte su altri metalli, afferma che la densità dei metalli, aumenta prima colla pressione sino a 10000 atmosfere e poi diminuisce per pressione maggiore, ossia a pressioni maggiori di 10000 atmosfere havvi aumento di volume. Ma nelle esperienze di Kahlbaum comparve un fatto il quale non serve certamente a dar loro valore.

Tale sperimentatore dice che per le esperienze sul rame adoperò il metallo tagliato in piccole aste e la compressione fu fatta nell'olio di ricino, affinchè la compressione fosse perfettamente uniforme, e per evitare la penetrazione dell'olio nel metallo, le piccole aste erano avviluppate nella carta e nella gomma.

Dopo l'esperienza eseguita colla pressione di 20000 atmosfere il Kahlbaum trovò (1): che le aste di rame erano divenute piatte, piegate, contorte, insomma avevano perduta la forma primitiva, e ne dedusse che il metallo era diventato plastico.

Ora io ritengo che un corpo, sia esso plastico, o si supponga diventi plastico per pressione, non possa cambiar la sua forma qualunque essa sia, se è sottoposto a pressione uniforme in tutti i sensi come è quella esercitata da un liquido; perchè il corpo viene uniformemente compresso in se stesso; esso diminuirà entro un dato limite di volume per l'elasticità di volume, ma la sua forma sarà sempre perfettamente simile. E se il corpo viene, come nell'esperienza di Kahlbaum, molto deformato, bisogna, a mio avviso, conchiudere che per difetto dell'esperienza la pressione intorno alle asticelle di rame non era uniforme in tutti i sensi.

A prova della mia asserzione ho eseguito un'esperienza comprimendo in un liquido della cera a cui avevo dato una determinata forma.

La forma era quella di un piccolo prisma a base quadrata di millimetri 7,5 di lato, e l'altezza del prisma era di 15 millimetri. Inoltre in una faccia del prisma avevo inciso un circolo e sopra un'altra un rettangolo per conoscere se anche leggere incisioni si mantenevano sotto la pressione.

---

(1) " Verhand. Naturf. Gesellschaft in Basel „ 1903, T. XV, pag. 14.

Digitized by Google

Il prisma era sostenuto da un sottile filo di platino, affinchè si trovasse sempre circondato dall'acqua che era il liquido adoperato nell'esperienza.

La pressione fu soltanto di 3200 atmosfere, pressione più che sufficiente trattandosi di cera, sostanza già plastica e che secondo Spring, come fu già detto, fluisce come acqua alla pressione non uniforme di sole 700 atmosfere.

La pressione fu mantenuta per 24 ore e la temperatura era di 15°; dopo l'esperienza ebbi il prisma perfettamente conservato nella sua forma e nelle incisioni.

Ma tale esperienza mi parve esposta all'obiezione che la pressione fosse piccola, benchè io la ritenessi sufficiente trattandosi di cera, ed anche la durata troppo breve. Perciò feci una seconda esperienza analoga alla prima e con la pressione di 8000 atmosfere durante 6 giorni. Anche in questa esperienza il piccolo prisma parimenti a base quadrata, sulle cui facce avevo pure fatto delle incisioni, si mostrò perfettamente inalterato.

Faccio notare che per evitare i possibili effetti sulla forma prodotti da un rapido annullamento del potenziale di elasticità costituitosi nella cera per la pressione, ho tolto questa assai lentamente, sollevando il cilindro compressore con la velocità di mezzo millimetro per minuto primo.

Dette esperienze concordano col fatto che la teoria non saprebbe trovare una ragione perchè una sostanza anche plastica debba mutare di forma, quando sia sottoposta ad una pressione perfettamente uniforme in tutti i sensi come quella esercitata da un liquido. E se anche si volesse ammettere collo Spring (1) che un corpo plastico assolutamente omogeneo di forma qualunque debba prendere, con una sufficiente pressione, la forma sferica, il passaggio alla forma sferica non potrebbe avvenire con piegamenti, contorcimenti, stiramenti e insomma con quella serie di deformazioni osservate da Kahlbaum nelle sue esperienze sul rame.

E p. es., nelle mie esperienze colla cera, anche ammessa l'ipotesi di Spring, dalla forma di un prisma a base quadrata il passaggio alla forma sferica doveva effettuarsi coll'assumere

(1) " Journal de chimie physique ,, T. I, 1903, pag. 596.

Digitized by Google

gradatamente la forma di un elissoide di rivoluzione e da questo poi la forma di sfera. Ma io non ho osservato traccia alcuna di tale passaggio; gli spigoli e le facce dei prismi erano rimasti perfettamente inalterati.

Se poi, secondo le esperienze di Spring sulla pressione non uniforme, si confronta la resistenza del rame alla plasticità con quella della cera, si può, dal risultato delle mie esperienze sulla cera massime di quella eseguita con 8000 atmosfere, con sicurezza dichiarare che il rame anche alla pressione di 20000 atmosfere, purchè questa sia uniforme in tutti i sensi come quella trasmessa da un liquido, non possa alterarsi nella forma che gli fu data, qualunque essa sia.

Dalle mie esperienze debbo quindi anche conchiudere che, in quella eseguita sul rame da Kahlbaum, le deformazioni avvenute non siano da attribuirsi, come vuole detto sperimentatore, al fatto che il rame sia divenuto plastico, ma bensì da attribuirsi ad un difetto dell'esperienza, pel quale le aste di rame per la malleabilità del metallo si sieno molto deformate.

Perciò dall'esperienza di Kahlbaum, non essendo dimostrato che il rame diventi plastico alla pressione di 20000 atmosfere uniforme in tutti i sensi, non si può ammettere che l'aumento di volume, che potrebbe essere spiegato dallo stato di plasticità, debba attribuirsi alla pressione.

Ma oltre il difetto sopra indicato dell'esperienza di Kahlbaum si può fare un'altra obiezione, importante, a mio avviso, a riguardo della diminuzione di densità, ossia aumento di volume, osservato sia da Spring sul piombo, sia da Kahlbaum sul rame ed altri metalli; ed è che la densità fu presa sui metalli dopo che essi furono tolti dall'azione della pressione e non quando erano sotto pressione.

Capisco che il determinare una piccola variazione di densità sotto forte pressione sarà impossibile; ma tale impossibilità non autorizza di attribuire direttamente alla pressione l'aumento di volume osservato dopo che la pressione fu tolta, ma invece permette di supporre che il piccolissimo aumento di volume sia devoluto ad altre cause forse inerenti all'elasticità.

Come più sopra ho accennato, nella pressione uniforme in tutti i sensi, a differenza di quella non uniforme, colla quale si costringe il metallo ad escire da un foro, si deve nel metallo compresso costituire un potenziale di elasticità.

Digitized by Google

Ora avviene che in generale nelle esperienze che si fanno sugli effetti della sola pressione uniforme in tutti i sensi, quando essa sia molto forte, viene data assai lentamente, sia per la conformazione dell'apparecchio, sia per impedire che la piccola quantità di calore, che naturalmente deve prodursi man mano che si comprime, abbia tempo di disseminarsi nel recipiente metallico in cui sta la sostanza e non influisca sull'esperienza. Ma poi quando si termina l'esperienza la pressione in generale viene tolta con gran rapidità in paragone della lentezza con cui fu data e direi quasi istantaneamente, se alla lentezza si unisce una lunga durata di tempo in cui si lascia la sostanza sotto pressione.

Con tali condizioni di esperienza è evidente che il grande lavoro potenziale di elasticità, risultante dalla lenta pressione uniforme in tutti i sensi, si trasforma per la rapida scarica della pressione in forza viva così violentemente, che potrebbe darsi avvengano fenomeni, forse appartenenti alle così dette azioni susseguenti d'elasticità. Essi meglio spiegherebbero il piccolissimo aumento di volume osservato dopo l'esperienza, ossia dopo la repentina trasformazione del lavoro potenziale d'elasticità e non quando il corpo era sottoposto alla pressione; e forse anche osservato subito dopo tolta la pressione e non dopo trascorsa quella quantità di tempo proporzionale alla grandezza della pressione e durata di essa, la quale è richiesta perchè il corpo riprenda il suo volume primitivo.

Quindi io ritengo che i risultati ottenuti da Spring e specialmente da Kahlbaum, sebbene sieno già annoverati in recenti ed autorevoli trattati di fisica (1) quasi come fatti indiscutibili, non siano convincenti per ammettere che possa esistere una pressione uniforme in tutti i sensi di tale grandezza da far aumentare di volume un corpo sottoposto ad essa.

(1) A. WINKELMANN, *Handbuch der Physik*, 1908, vol. I, pag. 876.

Digitized by Google

Ricerche sulla fabbricazione dell'acciaio cementato. VII. *(Studio di un processo di cementazione fondato sull'azione specifica dell'ossido di carbonio).*

Nota di F. GIOLITTI e G. TAVANTI.

(Con una Tavola).

In alcune memorie pubblicate nello scorso anno (1) potemmo dimostrare che la causa dei fenomeni di fragilità che si manifestano frequentemente — sopra tutto in forma di sfaldatura — nei pezzi meccanici in acciaio cementato, sono dovuti a caratteristici processi di liquazione della cementite e della ferrite primarie, o di ambedue questi costituenti. L'entità di tali processi — che si compiono durante il raffreddamento lento precedente la tempra dei pezzi cementati, e che dànno luogo a variazioni brusche della concentrazione del carbonio nei pezzi stessi — può ridursi notevolmente eseguendo la cementazione e la tempra secondo alcune norme che abbiamo avuto occasione di indicare nel corso delle varie memorie già citate. Quelle norme si riferiscono, però, in ispecial modo ai fenomeni di liquazione della cementite: fenomeni che abbiamo sottoposti ad un esame più accurato in una serie di ricerche i cui risultati sono stati pubblicati recentemente (2). Ne parve, perciò, giustificato il sottoporre ad uno studio più preciso anche la seconda serie di fenomeni, — quelli di liquazione della ferrite primaria — prefiggendoci sopra tutto lo scopo di ricercare un processo di cementazione, mediante il quale l'entità di tali fenomeni potesse ridursi ad un minimo.

(1) V. " Gazzetta Chimica Ital. „, XXXIX, parte II, 1909, pag. 386. — " Rend. della Soc. Chimica di Roma „, 1908. — " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „, marzo 1910.

(2) V. " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino „, marzo 1910.

Digitized by Google

Nelle memorie citate sopra, abbiamo già riportato parecchi esempi pratici atti a porre in evidenza i caratteristici fenomeni di fragilità dovuti ai processi di liquazione della cementite, da noi già studiati dettagliatamente.

Similmente ora, prima di procedere nel nostro studio, vogliamo citare un esempio pratico — fra i molti che abbiamo avuto occasione di esaminare — dal quale risultino chiare le caratteristiche dei fenomeni di fragilità dovuti alla liquazione della ferrite nei pezzi meccanici di acciaio, cementati superficialmente. Le nostre Figure 1 e 2 (V. Tavola) sono la riproduzione fotografica (all'incirca in grandezza naturale) di due frammenti dell'albero, in acciaio dolce cementato e temprato, della ruota posteriore di una bicicletta. L'aspetto caratteristico della frattura di questo albero — rottosi in servizio — si ritrova di frequente in pezzi meccanici simili, in acciaio cementato e temprato, e può facilmente spiegarsi in base ad un esame più accurato del pezzo cementato.

La Fig. 3 (V. Tavola) riproduce — con un ingrandimento di 3,7 diametri — la sezione piana, normale all'asse del nostro cilindretto, costituente la base inferiore del frammento riprodotto nella Fig. 1. Tale sezione fu praticata dopo aver ricotto il cilindretto di acciaio durante circa un'ora a 900°, fuori del contatto dell'aria: essa è stata levigata all'ossido di cromo ed attaccata colla soluzione alcoolica al 5 % di acido picrico. Nella fotografia si vede chiaramente che la superficie di frattura corrisponde ad una superficie lungo la quale la struttura dell'acciaio varia bruscamente. Lo stesso fatto risulta ancor più evidente nella Fig. 4 (V. Tavola), la quale riproduce (coll'ingrandimento di 3,7 diametri) la sezione — eseguita e preparata in modo analogo alla precedente — che forma la base superiore del pezzo riprodotto nella Fig. 2. In ambedue le sezioni (Fig. 3 e 4) la variazione di struttura è sopra tutto evidente nei punti ai quali non si è ancora estesa la frattura: ed in questi punti è facile riconoscere che la linea di separazione fra le zone a struttura differente non è che la continuazione della linea di frattura.

Vediamo ora in che consistano queste variazioni di struttura, e come sia costituita la linea più chiara che segna il passaggio dall'una all'altra struttura, nei punti ai quali non si è estesa la superficie di frattura.

Digitized by Google

La nostra Fig. 6 (V. Tavola) riproduce (coll'ingrandimento di 60 diametri) un punto della sezione riprodotta integralmente nella Fig. 3; e, precisamente, un punto nel quale la frattura si è appena iniziata. È facile riconoscere immediatamente che la linea lungo la quale la frattura si va formando segna una brusca variazione della concentrazione del carbonio nell'acciaio del pezzo cementato: si vede, infatti, dalle proporzioni della ferrite e della perlite dell'acciaio ricotto, che nella zona a destra della linea di frattura (cioè verso l'esterno del pezzo cementato) la concentrazione del carbonio supera il 0,6 %, mentre dalla parte opposta della frattura essa si abbassa bruscamente al di sotto del 0,2 %.

La stessa variazione brusca della concentrazione del carbonio si osserva — ed è anche più marcata — nella Fig. 5, la quale riproduce (ancora coll'ingrandimento di 60 diametri) un altro punto della stessa sezione: e, precisamente, un tratto della linea di demarcazione fra le due zone a struttura diversa, al quale non si è ancora estesa la frattura. Questo fotogramma ed il seguente (Fig. 6) dànno subito la spiegazione della linea netta che nelle sezioni del pezzo ricotto, riprodotte nelle Fig. 3 e 4, segna la demarcazione fra le zone a diverso tenore di carbonio: i due fotogrammi mostrano, infatti, come tale linea sia appunto dovuta alla brusca diminuzione della concentrazione del carbonio: diminuzione che nel pezzo ricotto si manifesta con un brusco aumento della proporzione della ferrite, lasciata inalterata dall'attacco all'acido picrico. Una tale distribuzione della ferrite e della perlite in rapporto così evidente colla posizione della superficie di sfaldatura, è una nuova conferma sicurissima della relazione, da noi già stabilita anteriormente (1), fra i fenomeni di sfaldatura degli acciai cementati ed il processo di liquazione della ferrite che ha luogo durante il lento raffreddamento al quale sono sottoposti i pezzi cementati, prima e durante la loro estrazione dalle cassette di cementazione.

Quanto alla speciale struttura dell'acciaio quale si nota — sopra tutto nella Fig. 5 — nella striscia immediatamente adiacente alla zona più carburata del pezzo (striscia che corrisponde appunto alla linea chiara che abbiamo già fatta notare nelle

(1) " Gazz. Chim. Ital. „, XXXIX, 1909, parte II, pagg. 386-415.

Digitized by Google

sezioni riprodotte nelle nostre Fig. 3 e 4), essa può spiegarsi, a parer nostro, colle seguenti osservazioni. È evidente che, nel pezzo temprato, la zona nella quale l'acciaio ha subìto le maggiori deformazioni permanenti sotto l'azione degli sforzi (i quali — superandone il limite elastico — hanno condotto alla frattura del pezzo) è appunto la zona del metallo meno duro immediatamente adiacente alla superficie di raccordo col metallo più duro: ciò che, del resto, è dimostrato evidentemente dal fatto che la frattura si è appunto prodotta lungo tale linea. Ora è noto che tali deformazioni del metallo temprato — nel quale il periodo di riscaldamento precedente la tempra non ha potuto certamente produrre una completa uniformità della concentrazione del carbonio — si manifestano appunto, dopo la ricottura, con un " grano „ più fine; ossia, precisamente con una maggior suddivisione dei lembi di perlite quale si osserva (V. Fot. 5) nella striscia più chiara che segna il passaggio dall'una all'altra delle due zone a diverso tenore di carbonio.

Avendo dimostrato con questo esempio — scelto fra i molti analoghi che si presentano quotidianamente — che l'influenza della liquazione della ferrite sui fenomeni di sfaldatura degli acciai cementati può essere pari a quella del processo analogo che abbiamo già studiato per la cementite, vediamo quali criteri possano seguirsi per evitarne gli effetti dannosi.

Un primo mezzo — analogo a quello che può seguirsi per evitare la liquazione della cementite — si presenta subito alla mente, quando si ricordi che i processi di liquazione dei quali ci occupiamo si compiono durante il raffreddamento lento che segue la cementazione e che precede il riscaldamento che si deve far poi subire ai pezzi cementati per portarli alla temperatura di tempra. È chiaro che per raggiungere il nostro scopo, basterebbe sopprimere quel periodo di raffreddamento lento, sostituendolo con un raffreddamento brusco, atto a " fissare „ la distribuzione, sempre più uniforme, del carbonio, quale risulta dal semplice processo di cementazione. Bisognerebbe, quindi, temprare i pezzi cementati *direttamente* alla temperatura della cementazione, senza lasciar loro subire alcun raffreddamento lento; poi riscaldarli fino alla temperatura di tempra più conveniente per l'acciaio di cui si tratta e per gli scopi ai quali i pezzi

Digitized by Google

cementati sono destinati, e temprarli una seconda volta. E noto che in molti casi una doppia tempra, eseguita nelle condizioni ora accennate, non presenta alcun inconveniente pratico: ed, anzi, può essere applicata con grande vantaggio delle proprietà meccaniche dell'acciaio. Ma esistono molti altri casi nei quali un tale procedimento non potrebbe essere adottato, sia per la natura dell'acciaio, sia perchè la temperatura di cementazione è troppo elevata, sia per le deformazioni che i pezzi subirebbero nella prima tempra..... ecc.

È dunque opportuno esaminare se sia possibile indicare un procedimento atto almeno a ridurre l'entità dei fenomeni di liquazione della ferrite, pur senza richiedere la soppressione del raffreddamento lento dei pezzi cementati. Un tale procedimento non può evidentemente consistere se non in una opportuna modificazione del processo stesso della cementazione.

Studiando i fenomeni di liquazione della cementite nei pezzi cementati, abbiamo dimostrato che i fenomeni stessi potevano evidentemente evitarsi in modo radicale eseguendo la cementazione in condizioni tali da impedire addirittura la separazione di cementite primaria: ed abbiamo indicato (1) i mezzi assai semplici per ottenere tale scopo: mezzi che possono applicarsi senza alcun inconveniente ogni qual volta non sia necessario che le zone esterne dei pezzi cementati siano formate da acciaio contenente più del 0,9 % di carbonio.

È chiaro, però, che criteri analoghi non possono adottarsi per evitare i fenomeni di liquazione della ferrite: poichè essi dovrebbero condurre alla soppressione — evidentemente assurda — del " nucleo dolce „ dei pezzi cementati. Vediamo, dunque, quali altri criteri si possano seguire.

Dall'esame dettagliato che nelle precedenti pubblicazioni, già più volte citate, abbiamo fatto dei fenomeni di liquazione della ferrite e della cementite, quali si presentano nel raffreddamento dei pezzi di acciaio cementato, risulta che le conseguenze di tali fenomeni consistono sempre in una maggiore " accentuazione „ — o, per così dire, una " esagerazione „ — delle differenze (dovute al modo stesso nel quale si compie il processo

(1) V. " Gazz. Chim. Ital. „, 1909, XXXIX, parte II, pagg. 386-415.

Digitized by Google

della cementazione) della concentrazione del carbonio fra gli strati successivi costituenti la zona cementata. Da questa osservazione — della cui giustezza sono una prova tutti i numerosi dati sperimentali riferiti nelle nostre pubblicazioni precedenti — risulta evidente che l'entità dei fenomeni di liquazione dei quali ci occupiamo sarà tanto minore, quanto più uniforme e graduale sarà la variazione di concentrazione del carbonio negli strati successivi della zona cementata, quale risulta *direttamente* dal processo di carburazione, prima di ogni raffreddamento lento. Ora, dalle nostre precedenti ricerche (1), risulta chiaramente dimostrato che quest'ultima condizione è soddisfatta nel miglior modo quando la cementazione è eseguita con cementi, i quali debbono la loro azione carburante all'azione *diretta* dei gas che contengono (2): e che fra tutti questi " cementi gassosi „ propriamente detti, quello che meglio si presta nella pratica è l'ossido di carbonio. Dalle stesse ricerche risulta, però, che l'uso dell'ossido di carbonio puro — sopra tutto quando si operi a temperature piuttosto elevate (1000°-1100° C.), adoperando una corrente di CO non molto rapida, quale può convenire nella pratica (3) — conduce (4) a zone cementate, nelle quali la concentrazione del carbonio è assai poco elevata (0,3-0,4 %): condizione questa, che — se in molti casi, in cui si vogliono cementare certi acciai speciali, può riuscire utilissima — non consentirebbe di cementare utilmente acciai al carbonio destinati agli usi ordinari. È chiaro (e lo abbiamo dimostrato con vari esempi nelle pubblicazioni precedenti) (5) come si possa ovviare a questo inconveniente, e giungere a " graduare „ la concen-

(1) V. specialmente " Gazz. Chim. Ital. „, XXXVIII, 1908, pagg. 309-351 e XXXIX, 1909, parte II, pagg. 386-415.

(2) Intorno alle caratteristiche dei gas che dànno luogo alla cementazione per azione *diretta* (in contrapposto con quelli la cui azione è — almeno in parte — dovuta ai loro prodotti di decomposizione), si vedano i lavori citati sopra.

(3) Per es. da uno a due litri l'ora, per ogni dm^2 di superficie di acciaio da cementare.

(4) A causa dell'equilibrio che si stabilisce rapidamente fra l'ossido di carbonio ancora indecomposto, l'anidride carbonica formatasi dalla porzione di esso che si è dissociata, ed il carbonio passato in soluzione nell'acciaio.

(5) V. specialmente: " Gazz. Chimica Ital. „, XXXIX, parte II, 1909, pagg. 386-415 e vol. XL, 1910, parte I, pagg. 1-20.

Digitized by Google

trazione del carbonio nei pezzi cementati, mescolando all'ossido di carbonio determinate quantità (di solito assai piccole) di gas riducenti (sopra tutto idrocarburi) atti a ridurre — fino ad una certa proporzione — l'anidride carbonica a mano a mano che si forma.

Lo stesso scopo si raggiunge in pratica assai meglio — e lo dimostreremo or ora — facendo agire l'ossido di carbonio come " cemento „ in presenza di carbone libero, il quale esercita una azione riduttrice perfettamente analoga a quella degli idrocarburi adoperati nelle nostre precedenti esperienze.

Lasciando da parte, per ora, tutte le considerazioni teoriche — la maggior parte delle quali possono dedursi direttamente da quelle che abbiamo fatto nei nostri lavori precedenti, a proposito dei processi analoghi, ai quali abbiamo accennato poco fa — indichiamo semplicemente alcune delle varie condizioni nelle quali può applicarsi questo processo ed i risultati tecnici che se ne possono ottenere.

Nell'indicazione delle condizioni sperimentali nelle quali abbiamo operato, ci riferiremo soltanto alle esperienze eseguite in laboratorio: sia perchè in queste esperienze fu possibile determinare le condizioni di temperatura, di pressione..... ecc., con esattezza assai maggiore di quanto non fosse possibile fare nelle esperienze eseguite su scala industriale: sia perchè le esperienze industriali sono state eseguite mediante speciali dispositivi, per i quali sono tuttora in corso le domande di brevetto in vari paesi.

Per le nostre prove di laboratorio ci siamo serviti di un forno elettrico Heraeus, cilindrico, a nastro di platino, lungo 60 cm. Nella camera cilindrica del forno — disposto di solito orizzontalmente — collocammo un tubo di porcellana verniciata, lungo circa 77 cm. e del diametro interno di 35 mm., raffreddato alle due estremità mediante due serpentini di tubo di piombo (avvoltivi a spirale per due tratti di circa quattro centimetri) nei quali circolava acqua fredda. Le due aperture del tubo di porcellana, funzionante da camera di cementazione, erano chiuse con tappi di gomma, attraverso ad uno dei quali passava il tubo di vetro di efflusso dei gas, mentre attraverso ai due fori del secondo passava il tubo adduttore dei gas e la canna

Digitized by Google

di porcellana verniciata — chiusa all'estremità disposta nell'interno della camera di cementazione — costituente la custodia della pinza termoelettrica destinata a determinare la temperatura della camera di cementazione.

Nelle esperienze che riferiamo più avanti, la carica del tubo era fatta in generale (salvo esplicite indicazioni diverse) nel seguente modo: dopo aver collocato il tappo attraverso al quale passava la canna di porcellana del pirometro ed il tubo adduttore dei gas, la prima parte del tubo (a cominciare dall'orifizio interno del tubo adduttore dei gas) era riempita, per un tratto di 7 cm., di fibra di amianto calcinata preventivamente a 1300° durante tre ore. Un secondo tratto del tubo, della lunghezza di 25 cm., era riempito di carbone di legno pestato, mantenuto per sei ore a bagnomaria con acido cloridrico, lavato con acqua pura fino a scomparsa della reazione acida e calcinato, fuori del contatto dell'aria, per quattro ore a 1300°: del carbone così preparato adoperammo soltanto la parte che — passata attraverso ad un setaccio di 16 maglie per $cm.^2$ — era trattenuta dal setaccio di 81 maglie per $cm.^2$. Nel tratto successivo del tubo di porcellana collocammo un cilindro (di 18 mm. di diametro per 150 di lunghezza) di acciaio dolce della seguente composizione:

Carbonio	0,14	%
Silicio	0,03	„
Manganese	0,80	„
Zolfo	0,05	„
Fosforo	0,02	„

Riempiti accuratamente (collo stesso carbone pesto usato pel tratto precedente) tutti gli interstizi compresi fra la canna del pirometro, il cilindro d'acciaio e la parete della camera di cementazione, riempivamo ancora la camera stessa, per un tratto di circa due centimetri, col solito carbone; poi collocavamo un secondo cilindretto di acciaio, circondato anch'esso di carbone, e completavamo la carica del tubo col carbone, mantenuto a posto da un tampone di fibra d'amianto collocato presso l'orifizio interno del tubo di efflusso dei gas. I cilindretti di acciaio dolce erano accuratamente calibrati in tutta la loro lunghezza, a meno di 0,03 mm., allo scopo di poter determinare le eventuali va-

Digitized by Google

riazioni di volume dovute alla cementazione: ciò che presenta (v. in fine) uno speciale interesse pratico nell'applicazione del processo di cementazione del quale ora parliamo, come quello che non produce la minima alterazione esterna dell'acciaio, lasciandone la superficie perfettamente netta e brillante, quale era prima della cementazione.

Portato il forno alla temperatura voluta, facevamo passare nella camera di cementazione una corrente di anidride carbonica pura e secca, con una determinata velocità, che mantenevamo poi costante durante tutta la cementazione.

Cominciammo col fare alcune esperienze preliminari, destinate a stabilire se lo strato di 25 cm. di carbone mantenuto a temperatura elevata, che l'anidride carbonica deve attraversare prima di raggiungere i cilindri di acciaio, sia sufficiente a ridurre l'anidride carbonica ad ossido di carbonio fino a raggiungere praticamente, pei due gas, le concentrazioni corrispondenti alle condizioni di equilibrio completo del sistema carbonio-anidride carbonica-ossido di carbonio, alla temperatura dell'esperienza: per stabilire — in altri termini — se, operando nelle condizioni indicate, si possa ritenere di essere nelle stesse condizioni nelle quali ci troveremmo adoperando ossido di carbonio in luogo di anidride carbonica.

Per queste esperienze preliminari ci servimmo dello stesso apparecchio già descritto, modificato in modo da poter prelevare i campioni del gas mediante un sottile tubo di porcellana immediatamente al di là del primo strato di carbone (di 25 cm.).

Una serie di analisi eseguite facendo circolare l'anidride carbonica colla velocità di un litro in 9', più che quadrupla di quella da noi adoperata nelle nostre cementazioni (un litro in 40')' diedero i seguenti risultati medi:

	Temperatura	CO_2 %
1)	1000°	1,37
2)	1100°	0,2
3)	1200°	0,2

Se si tiene conto del fatto che i gas prelevati per l'analisi, nel percorrere — se bene assai rapidamente — il tubetto di porcellana, si sono trovati per qualche istante a temperature

Digitized by Google

più basse di quelle della camera di cementazione (alle quali le concentrazioni dell'anidride carbonica corrispondenti alle condizioni di equilibrio sono già assai elevate) prima di aver raggiunto una temperatura abbastanza bassa da rendere trascurabile la velocità delle reazioni, si vede che i dati, or ora riferiti, dimostrano che bastano i 25 cm. di carbone perchè le condizioni di equilibrio completo fra l'anidride carbonica e l'ossido di carbonio, alla temperatura della cementazione, possano considerarsi come praticamente raggiunte (1): e ciò anche quando la velocità della corrente gassosa raggiunge un valore di gran lunga superiore a quello da noi impiegato per le nostre cementazioni.

Per porre subito in evidenza, nel miglior modo possibile, le differenze fra la distribuzione del carbonio nelle zone cementate, quale può ottenersi operando nelle condizioni indicate sopra, e quella che si ottiene eseguendo la cementazione con uno dei gas cementanti noti, riproduciamo nelle Fig. 7 e 8 (V. Tavola) (2) le micrografie degli orli delle sezioni di due cilindretti dello stesso acciaio, cementati l'uno con etilene, l'altro con ossido di carbonio e carbone (secondo il processo descritto sopra), mantenendo identiche per ambedue tutte le altre condizioni sperimentali. Così ambedue furono sottoposti alla cementazione a 1050° durante cinque ore, facendo circolare nell'apparecchio, durante questo tempo, sette litri di gas.

L'esame delle due micrografie pone subito in evidenza la profonda differenza fra le forti e brusche variazioni della concentrazione del carbonio quali si presentano nella zona cementata ottenuta coll'impiego dell'etilene (Fig. 7) e la variazione continua e graduale della concentrazione stessa, quale si verifica nel cilindretto di acciaio cementato con ossido di carbonio e carbone (Fig. 8). Infatti, nel primo caso si passa da prima bruscamente dalla zona esterna ipereutectica (dello spessore totale di mm. 1,2) alla zona eutectica (spessa mm. 0,7), e da questa si passa di nuovo bruscamente alla zona ipoeutectica, nella quale

(1) V. i risultati delle determinazioni di Boudouard (" Ann. de Chim. et de Phys. „, (7), 24. pagg. 5-85).

(2) Ingrandimento: 60 diametri. Attacco colla soluzione alcoolica di acido picrico al 5 %.

Digitized by Google

la concentrazione del carbonio si abbassa dal valore 0,9 % al valore che aveva nell'acciaio dolce originario, in un intervallo di meno di 0,5 mm. Nel secondo caso, invece, la zona ipereutectica manca, e la zona puramente eutectica (dello spessore di circa 1,1 mm.) si connette gradualmente colla zona ipoeutectica, nella quale la concentrazione del carbonio varia in modo continuo e graduale, per un tratto di *oltre due mm.*, dal valore massimo di 0,9 % (alla profondità di circa 1 mm. dove cominciano ad apparire i primi sottili filamenti di ferrite) al valore che aveva nell'acciaio dolce originario.

Queste osservazioni confermano dunque pienamente le vedute che abbiamo esposte nella prima parte della presente nota, sia per quanto riguarda le relazioni che passano fra la distribuzione del carbonio nelle zone cementate, *prima* e *dopo* il raffreddamento lento (1), sia per quanto riguarda la più uniforme distribuzione iniziale — e quindi anche finale — del carbonio, quale può ottenersi mediante l'impiego di determinati cementi.

Basta, poi, tener presente quanto abbiamo detto in principio (anche riferendoci ai risultati di precedenti lavori), per vedere come nella zona cementata ottenuta col nuovo processo, nelle condizioni or ora indicate, siano totalmente eliminate tanto le cause di fragilità dovute ai fenomeni di liquazione della cementite (2), quanto quelle — esaminate poco fa — dovute alla liquazione della ferrite.

Abbiamo già riferito in varie pubblicazioni precedenti — ed anche in principio della presente — un numero sufficiente di fatti atti a dimostrare la somma importanza che, nella pra-

---

(1) È chiaro che anche nella provetta della fig. 8 ha avuto luogo una certa liquazione della ferrite: ciò che è dimostrato (in base a quanto abbiamo detto nelle note precedenti, già citate) dalla presenza in tale provetta della zona esterna di pura perlite. Varia invece enormemente dall'una all'altra provetta la *misura* della liquazione, la quale — come abbiamo già detto — non fa che " esagerare „ le variazioni di concentrazione del carbonio dovute all'andamento del processo della cementazione, diverse per le due provette anche prima del raffreddamento lento, durante il quale la liquazione ha potuto verificarsi.

(2) V. specialmente: " Gazz. Chim. It. „, 1909, parte II, pagg. 383 e segg. e: " Atti R. Acc. delle Scienze di Torino „, marzo 1910.

Digitized by Google

tica della cementazione dei pezzi meccanici, ha l'eliminazione dei fenomeni di liquazione della cementite e della ferrite; talchè non occorre citare altri dati meccanici per porre in evidenza il valore pratico dei risultati che si possono ottenere col processo di cementazione da noi proposto: valore che i risultati delle nostre precedenti ricerche permettono di dedurre dal semplice esame micrografico delle zone cementate; come risulta in modo evidente dai molti dati da noi raccolti e pubblicati a più riprese (1).

Lasciando, quindi, da parte per ora i risultati delle ricerche destinate a stabilire direttamente le qualità meccaniche dei pezzi cementati secondo il nuovo processo (risultati che formeranno oggetto di altre pubblicazioni), ci limiteremo qui a studiare il processo dal punto di vista chimico, onde stabilire se, ed in quali condizioni, esso possa presentare vantaggi pratici sugli altri finora adottati generalmente, sia per quanto riguarda la distribuzione del carbonio che esso permette di ottenere, sia per quanto riguarda (ciò che è almeno altrettanto importante) la velocità di penetrazione del carbonio da esso consentita.

A tale scopo cominciamo col riportare nella seguente tabella i risultati di una prima serie di cementazioni, eseguite mediante l'apparecchio già descritto, nelle condizioni indicate nella tabella stessa per ciascuna esperienza. Furono mantenute identiche per tutte le esperienze, oltre alla disposizione dell'apparecchio, la pressione del gas (pari alla pressione atmosferica ordinaria), la velocità della corrente gassosa (un litro di gas in 40′), la composizione (già indicata sopra) dell'acciaio sottoposto alla cementazione, e la qualità (anch'essa già indicata) del carbone disposto attorno ai cilindretti di acciaio (2).

(1) V. le varie pubblicazioni già citate.

(2) Data la grande influenza che (secondo abbiamo già altrove dimostrato) la velocità del raffreddamento esercita sulla distribuzione del carbonio nelle zone cementate, è opportuno far qui notare che, nelle nostre esperienze, la temperatura della camera di cementazione si abbassava (dal momento in cui si interrompeva la corrente che alimentava il forno) in 30′ da 1000° a 800°; in 40′ da 1100° a 800°; ed in 48 da 1200° a 800°.

Digitized by Google

TABELLA I.

N° d'ord.	Temperatura (C.)	Durata della cementazione (ore)	Spessore della zona ipereutectica (mm.)	Spessore della zona eutectica (mm.)	Spessore della zona ipoeutectica (mm.)	Spessore totale della zona cementata (mm.)
1	1000°	2	—	0,5	0,5	1,0
2	1000°	6	—	1,0	1,2	2,2
3	1000°	12	—	1,5	1,5	3,0
4	1000°	36	2,2	1,0	3,2	6,4
5	1060°	2	—	0,7	1,2	1,9
6	1060°	6	—	1,5	1,5	3,0
7	1100°	2	—	1,0	1,4	2,4
8	1100°	6	—	1,6	1,9	3,5
9	1100°	12	1,4	1,6	2,5	5,5
10	1200°	2	—	1,2	2,0	3,2
11	1200°	6	—	1,8	3,5	5,3

Gli spessori delle singole zone furono determinati osservando al microscopio le sezioni normali all'asse dei cilindretti cementati, levigate ed attaccate colla soluzione alcoolica di acido picrico: per le misure ci valemmo di un buon oculare micrometrico. Come limite della zona ipoeutectica, in profondità (il solo sul quale possa presentarsi qualche ambiguità), assumemmo il punto nel quale la concentrazione del carbonio (determinata in base al rapporto fra le aree occupate, sulla sezione, rispettivamente dalla ferrite e dalla perlite) si abbassa al disotto del 0,3 %.

Un confronto fra i dati contenuti nella nostra tabella e quelli (contenuti in molte pubblicazioni: e, fra le altre, nelle nostre già più volte citate) (1) riguardanti le profondità delle

(1) V. i vari lavori pubblicati negli ultimi due anni da Charpy, Guillet, Portevin, ecc..... nella " Revue de Métallurgie „.

Ci pare anche interessante citare qui — per il confronto coi nostri — i dati contenuti in un " Fascicolo-réclame „ pubblicato dalla " American Gas Furnace Co. „ di Elizabeth (N. J. Stati Uniti) per porre in evidenza i

Digitized by Google

zone cementate ottenute in determinati tempi, operando a temperature determinate, mediante i vari cementi noti, dimostra subito come il nuovo processo non sia certamente inferiore agli altri per quanto riguarda la rapidità colla quale permette di ottenere una zona cementata di dato spessore: ed, anzi, chiunque abbia avuto occasione di applicare i processi di cementazione abitualmente in uso nelle officine meccaniche, riconoscerà subito quanto essi siano — anche sotto questo punto di vista — inferiori a quello del quale ora ci occupiamo.

Stabilito questo fatto — la cui constatazione era evidentemente condizione essenziale per potere considerare dal punto di vista delle applicazioni tecniche gli altri vantaggi che il processo in questione può presentare — consideriamo la distribuzione del carbonio nelle zone cementate nelle esperienze riportate nella tabella I.

Un primo fatto che l'esame della nostra tabella mette subito in evidenza è la possibilità di ottenere, mediante questo processo di cementazione, zone cementate di notevole profondità, nelle quali non appaiono tracce di cementite. Si vede, infatti, che la zona ipereutectica compare soltanto nelle zone cementate di profondità superiore ai 5 mm., ottenute nelle esperienze 4ª e 9ª: mentre in tutte le altre (e cioè per profondità di cementazione che giungono fino a mm. 5,3, come nella 11ª esperienza) la concentrazione del carbonio non supera mai il 0,9 %. Che un tale risultato — della cui importanza pratica abbiamo già parlato — non possa ottenersi coi processi di cementazione abitualmente adottati nella tecnica, lo prova subito un esame dei

---

vantaggi di un suo nuovo processo di cementazione fondato sull'uso di un gas carburante (la cui composizione, del resto, è mantenuta segreta).

Ecco alcuni dei dati relativi alle velocità di cementazione che la suddetta Società dà come straordinarie:

Durata della Cementazione (ore)	Profondità dello strato carburato (mm.)
8	1,57
12	2,00
16	2,06

E si noti che qui gli spessori delle zone cementate sono determinati in base all'esame del " grano „ delle superficie di frattura dei pezzi temprati: ciò che — come è noto — fornisce valori superiori a quelli che si ricavano dall'esame microscopico delle sezioni levigate e attaccate.

Digitized by Google

dati contenuti — oltre che nelle nostre pubblicazioni precedenti, già citate più volte — anche in vari trattati ed in recenti pubblicazioni: così i numeri contenuti nella tabella IV della recente memoria di A. Portevin e H. Berjot, sulla durezza degli acciai cementati e temprati (*Revue de Métallurgie*, 1910, n. 1, pag. 69), dimostrano che risultati analoghi ai nostri non possono nemmeno ottenersi eseguendo la cementazione mediante una miscela contenente il 60 % di carbone di legna ed il 40 % di carbonato di bario; se bene sia nota che una tale miscela, fra le molte polveri da cementazione usate nella tecnica, è appunto quella che permette di ottenere cementazioni più uniformi, o — per usare il termine abitualmente adottato nella pratica — più " progressive „. Dalla tabella — or ora citata — della memoria di Portevin e Berjot, risulta infatti che, nelle cementazioni eseguite colla miscela sopra ricordata, la zona ipereutectica appare già nella zona cementata dello spessore totale di mm. 1,02 (cementazione di 3 ore a 1000°) — nella quale essa occupa *più del 30 %* dello spessore totale — ed aumenta poi sempre di spessore nelle zone cementate più profonde.

Un altro fatto — anch'esso di grande importanza pratica, per le ragioni che abbiamo già più volte indicate — risulta dall'esame dei dati contenuti nella nostra tabella: la profondità della zona ipoeutectica in confronto colla profondità totale della zona cementata è di gran lunga maggiore nei pezzi cementati col processo del quale ora ci occupiamo, di quanto non lo sia nei pezzi ottenuti cogli altri processi di cementazione. Questo fatto (che abbiamo già notato nel confronto fra le zone cementate, ottenute rispettivamente con etilene e con ossido di carbonio e carbone, riprodotte nelle nostre Fig. 7 e 8, e che — come abbiamo allora mostrato — corrisponde necessariamente ad una diminuzione più lenta e graduale della concentrazione del carbonio) si verifica per *tutte* le zone cementate alle quali si riferiscono i numeri della nostra tabella: in tutte quelle zone, infatti, lo spessore dello strato ipoeutectico (zona di " degradazione „ del carbonio) raggiunge almeno il 50 % dello spessore totale della corrispondente zona cementata, superando per molte tale proporzione (66 % nella 11ª esperienza).

Ora — lasciando da parte le zone cementate ottenute coll'uso degli idrocarburi volatili o mediante cianuri, per le quali

Digitized by Google

lo spessore della zona ipoeutectica è tanto piccolo da corrispondere addirittura ad una variazione brusca della concentrazione del carbonio (1) — se confrontiamo i nostri risultati coi dati contenuti nella memoria di Portevin e Berjot, sopra citata, vediamo che, anche nelle zone cementate ottenute colla miscela di carbone e carbonato di bario, il rapporto fra lo spessore della zona ipoeutectica e lo spessore totale della zona cementata è *sempre* di gran lunga inferiore a quello che si ottiene normalmente col nostro processo.

Deducendo, infatti, — in base ai numeri contenuti nella tabella IV della memoria citata (pag. 69) — gli spessori delle zone ipoeutectiche, per sottrazione, dallo spessore totale, degli spessori delle altre due zone (eutectica ed ipereutectica), si vede che per nessuna delle cinque esperienze di Portevin e Berjot per le quali compare almeno un'altra zona accanto alla zona ipoeutectica (2), quest'ultima supera il 30 % dello spessore totale: ed, anzi, soltanto nella terza esperienza (cementazione di 1,02 mm.) lo spessore della zona ipoeutectica raggiunge il 30 % dello spessore totale, mentre in tutte le altre zone cementate un po' più profonde, la porzione ipoeutectica non raggiunge mai il 20 % dello spessore totale della zona cementata.

Si vede dunque che la distribuzione del carbonio caratteristica della zona cementata ottenuta col nostro processo, quale è riprodotta nella nostra Fig. 8 (e della quale abbiamo dimostrato i notevoli vantaggi pratici) si ottiene costantemente, anche facendo variare, entro limiti assai larghi, le condizioni sperimentali. Ciò che costituisce appunto — accanto alla prova della notevole velocità della penetrazione del carbonio — la base essenziale per la dimostrazione della pratica applicabilità del processo in questione.

La parte importante che all'ossido di carbonio spetta nel processo di cementazione del quale ci occupiamo, risulta evidente (oltre che dalle considerazioni già svolte) anche dai risultati di

(1) V. loc. cit.

(2) È evidente che non possiamo, in questo caso, tener conto della zona cementata corrispondente alla prima esperienza, poichè in essa compare *soltanto* la zona ipoeutectica.

Digitized by Google

una seconda serie di esperienze, eseguite in condizioni uguali alle precedenti, ma adoperando — in luogo del carbone granulato preparato come abbiamo detto sopra — della polvere sottile dello stesso carbone di legno: e, precisamente, adoperando tutta la porzione del nostro carbone, passata attraverso al setaccio di 81 maglie per cm.^{2}. I risultati di queste esperienze sono raccolti nella seguente tabella:

TABELLA II.

N° d'ordine	Temperatura (C.)	Durata della cementazione (mm.)	Spessore della zona eutectica (mm.)	Spessore della zona ipoeutectica (mm.)	Spessore totale della zona cementata (mm.)	Massima concentrazione del carbonio nella zona ipoeutectica	*Osservazioni*
						C. %	
1	1000°	2	—	1,0	1,0	0,70	Forno orizz.
2	1000°	6	—	1,2	1,2	0,70	Id.
3	1000°	2	—	0,6	0,6	0,60	Forno vert.
4	1000°	2	0,5	0,4	0,9	0,90	Id.

Questi dati provano in modo non dubbio quanto abbiamo or ora asserito. È infatti evidente che se la diffusione del carbonio nell'acciaio fosse dovuta all'azione diretta del carbonio solido posto in contatto con esso, la cementazione dovrebbe avvenire assai più rapidamente nelle esperienze riportate nell'ultima Tabella che non in quelle (eseguite nelle identiche condizioni) riportate nella prima: poichè è chiaro che il contatto fra l'acciaio ed il carbone è assai più intimo quando si adoperi quest'ultimo sotto forma di polvere sottile, che non quando lo si usi sotto forma granulare. Dobbiamo quindi ritenere il fatto che nelle cementazioni riportate nella Tabella II la velocità della penetrazione del carbonio è assai inferiore a quella che si verifica nelle corrispondenti esperienze della Tabella I, come una prova evidente della scarsa azione *diretta* del carbone (per contatto) e dell'azione preponderante dell'ossido di carbonio come efficace " veicolo „ per la penetrazione del carbonio nell'acciaio: infatti la velocità della penetrazione del carbonio è tanto maggiore quanto più l'ossido di carbonio può circolare liberamente attorno al carbone e all'acciaio, coi quali deve al-

Digitized by Google

ternativamente reagire, secondo abbiamo indicato precedentemente. Di ciò è ulteriore conferma il confronto fra i resultati delle esperienze 1) e 3) della Tabella II: tale confronto dimostra, infatti, che la cementazione è assai meno profonda quando — mantenendo costanti tutte le altre condizioni — si disponga verticalmente, anzichè orizzontalmente, il tubo di porcellana funzionante da camera di cementazione: ed è evidente che la disposizione verticale, mentre favorisce il contatto fra la polvere di carbone e la superficie dei cilindri di acciaio, rende assai difficile la circolazione dei gas nell'apparecchio (1).

In queste osservazioni trovano la loro facile spiegazione i risultati che si ottengono nella tecnica, nelle cementazioni eseguite con miscele pulverulente di carbone di legno e carbonato di bario.

Ciò posto, rimaneva ancora da definire un punto — assai importante per l'applicazione tecnica del processo del quale ci occupiamo — riguardante i limiti di " spazio „ entro i quali l'ossido di carbonio può esercitare ancora efficacemente la sua funzione specifica caratteristica di " veicolo „ pel trasporto del carbonio dalla massa cementante solida alla massa di acciaio: nè l'importanza di definire praticamente tali limiti può sfuggire a chiunque — conoscendo la tecnica delle ordinarie cementazioni eseguite con cementi solidi — sappia quanto sia difficile operare in condizioni tali da essere assolutamente certi che l'imperfetto contatto del cemento con qualche tratto della superficie del pezzo da cementare non abbia a lasciare pericolose lacune nella zona carburata.

A tale scopo ricorremmo al seguente dispositivo sperimentale: Disposto verticalmente il nostro forno, collocammo nel centro di esso e secondo l'asse della camera di cementazione, un cilindro del solito acciaio dolce, lungo 30 cm. e di 10 mm. di diametro. Lungo una generatrice del cilindretto erano praticati dei tratti di lima, distanti un centimetro l'uno dall'altro, numerati progressivamente dall'1 al 28, a partire dall'estremità inferiore del cilindro. Soltanto la parte inferiore del cilindro era immersa, per un tratto di 13 cm., nella solita massa gra-

(1) Quest'ultimo fatto si constata subito in modo evidentissimo nell'eseguire l'esperienza.

Digitized by Google

nulare di carbone di legna; il tratto superiore era invece completamente libero. Mentre una corrente lenta di ossido di carbonio (circa due litri all'ora) circolava nell'apparecchio, giungendovi dal basso per mezzo del solito tubo di vetro piegato a gancio, elevammo la temperatura della camera di cementazione fino a 980°, mantenendola poi costante per quattro ore.

Lasciato raffreddare lentamente l'apparecchio, tagliammo longitudinalmente il cilindretto d'acciaio, secondo un piano passante pel suo asse; e sulla sezione così ottenuta — levigata ed attaccata nel solito modo — potemmo facilmente osservare al microscopio le variazioni di struttura della zona cementata in tutta la sua lunghezza. Riportiamo nella seguente Tabella i risultati di alcune delle nostre osservazioni:

TABELLA III.

Posizione del tratto osservato della zona cementata sulla scala incisa sul cilindretto (cm.)	Spessore della zona eutectica (mm.)	Spessore della zona ipoeutectica (mm.)	Concentrazione massima del carbonio nella zona ipoeutectica	*Osservazioni*
5	0,6	1,2	0,9 %	Parte immersa nel carbone
10	0,6	1,1	0,9 %	id. id.
13	0,6	1,1	0,9 %	id. id.
13,5	0,6	1,1	0,9 %	Parte *non* immersa nel carbone
14,5	0,3	1,2	0,9 %	id. id.
16	—	1,5	0,65 %	id. id.
19	—	1,2	0,5 %	id. id.
20	—	1,2	0,4 %	id. id.
26	—	1,1	0,3 %	id. id.

I dati contenuti nella precedente Tabella dimostrano chiaramente come, nel processo del quale ci occupiamo, la cementazione abbia luogo — per opera dell'ossido di carbonio — con la sua *intiera* efficacia anche nei tratti della superficie dell'acciaio che non sono in contatto diretto colla massa granulare di carbone, ma ne distano di circa un centimetro: e che l'efficacia

Digitized by Google

della cementazione non rimane affievolita se non in piccolissima misura anche per le parti dell'oggetto di acciaio assai più lontane (5-6 cm.) dal carbone. Chiunque abbia qualche conoscenza delle condizioni nelle quali in pratica si presenta il problema della cementazione dei pezzi meccanici, anche i più complicati, deve riconoscere che i dati or ora riferiti costituiscono la più completa garanzia della omogeneità delle zone cementate che si possono ottenere col nuovo processo: e ciò sopra tutto quando si tenga conto del fatto che la massa granulare di carbone di legno calcinato ha (al contrario della maggior parte delle polveri da cementazione usate nella tecnica) una straordinaria " scorrevolezza " la quale fa sì che — anche sotto la semplice azione del suo peso — essa vada, colla massima facilità, a riempire tutte le cavità dell'oggetto sottoposto alla cementazione.

Sarebbe poi superfluo qualsiasi commento per dimostrare come i dati della Tabella III pongano ulteriormente in evidenza l'importanza della funzione specifica dell'ossido di carbonio — da noi esplicitamente definita — nel processo della cementazione.

L'importanza in tal modo constatata della funzione specifica dell'ossido di carbonio come " veicolo " atto a facilitare la diffusione del carbonio nell'acciaio, ci indusse a studiare l'azione dell'ossido di carbonio come mezzo per rendere più omogenea e " graduale " la distribuzione del carbonio nelle zone cementate quali risultano dall'applicazione dei processi di cementazione abitualmente impiegati nella tecnica. Alcune esperienze ci dimostrarono subito l'efficacia di questo mezzo.

Una prima volta introducemmo nel nostro apparecchio un cilindretto del solito acciaio dolce, cementato; riempimmo la camera di cementazione (chiusa a perfetta tenuta di gas) con ossido di carbonio puro (avendovi fatto il vuoto più volte, e sostituendo ogni volta il gas estratto con ossido di carbonio), ed elevammo poi gradualmente la temperatura, mantenendola per sette ore a 1000°: durante questo tempo facemmo circolare nell'apparecchio una corrente lentissima di ossido di carbonio puro. (Nelle sette ore passarono nell'apparecchio meno di due litri di gas). La seguente Tabella pone in evidenza la variazione della distribuzione del carbonio nella zona cementata, dovuta all'azione caratteristica dell'ossido di carbonio:

Digitized by Google

TABELLA IV.

	Spessore della zona ipereutectica	Spessore della zona eutectica	Spessore della zona ipoeutectica	Spessore totale della zona cementata
	mm.	mm.	mm.	mm.
a) Nel cilindretto originario . .	1,4	1,3	1,5	4,2
b) Dopo la ricott. (7 ore a 1000°)	—	2,5	3,5	6,0

Un secondo cilindretto del solito acciaio dolce, cementato, fu ricotto — nelle identiche condizioni del precedente — a 1000°, in atmosfera di ossido di carbonio puro, durante sette ore. Dopo raffreddamento, ne fu prelevato un tratto lungo 3 cm. per l'esame microscopico, ed il resto fu di nuovo ricotto — ancora nelle identiche condizioni — durante otto ore. I risultati di queste esperienze sono raccolti nella seguente Tabella:

TABELLA V.

	Spessore della zona ipereutectica	Spessore della zona eutectica	Spessore della zona ipoeutectica	Spessore totale della zona cementata	Durata complessiva della ricottura a 1000° in ossido di carbonio
	mm.	mm.	mm.	mm.	ore
a) Nel cilindretto originario	2,1	0,9	1,8	4,8	—
b) Dopo la prima ricottura (7 ore a 1000°)	—	3,7	3,2	6,9	7
c) Dopo la seconda ricottura (8 ore a 1000°)	—	—	8,5	8,5	15

I numeri delle due ultime tabelle (IV e V) pongono immediatamente in evidenza — senza che occorra alcuna ulteriore considerazione — la grande efficacia dell'ossido di carbonio come " veicolo " per facilitare la diffusione del carbonio anche nel-

Digitized by Google

l'*interno* della massa d'acciaio, dai punti delle zone cementate nelle quali esso è più concentrato a quelli dove lo è meno. Del meccanismo di questo processo (fondato sulle variazioni delle condizioni di equilibrio dell'equazione reversibile $2CO \rightleftarrows CO_2 + C$, col variare della concentrazione delle soluzioni nel ferro γ del carbonio che appare nel secondo membro) abbiamo già parlato altre volte (1) : ci limitiamo qui a far rilevare l'importanza pratica che questo processo può assumere come mezzo per modificare (rendendola più uniforme, e più adatta ai vari scopi) la distribuzione del carbonio nelle zone cementate ottenute coi soliti processi di cementazione. Torna qui opportuna un'osservazione a proposito di alcuni risultati ottenuti da Portevin e Berjot nel lavoro già citato (" Rev. de Mét. „, VII, 1910, p. 61). Alla fine della loro Memoria i due autori riferiscono i risultati di alcune esperienze destinate a stabilire " l'influenza della ricottura sulla penetrazione del carbonio „ : tali esperienze essi eseguirono riscaldando a 1000°, durante 5, 15 e 30 ore, dei cilindri di acciaio, cementati, immersi nella tornitura di ghisa: gli stessi Autori fanno notare che, dopo esperienze eseguite su cilindretti di acciaio dolce, risulta che la ghisa esercita, nelle condizioni in cui essi hanno operato, una energica azione cementante, la quale deve alterare i fenomeni dovuti alla semplice ricottura. Ora, noi vogliamo far qui notare che una tale causa perturbatrice non si presenta nelle nostre esperienze : di che è prova prima di tutto il fatto che (contrariamente a quanto si verifica in modo marcatissimo nelle esperienze di Portevin e Berjot) la *quantità* totale del carbonio delle zone cementate non aumenta in modo sensibile per effetto delle ricotture da noi eseguite in atmosfera di ossido di carbonio ; e di ciò è facile persuadersi confrontando i dati contenuti nelle nostre Tabelle IV e V, con quelli dell'ultima Tabella (pag. 75) del lavoro di Portevin e Berjot. Ma anche di ciò abbiamo voluto accertarci direttamente: ed abbiamo trovato la prova certa dell'esattezza di quanto avevamo già dedotto (secondo abbiamo or ora detto) dai risultati delle esperienze riportate nelle Tabelle IV e V, nel fatto che sottoponendo dei cilindretti di acciaio dolce ad un trattamento identico a quello al quale avevamo sottoposti i cilindretti ce-

(1) V. " Gazz. Chim. It. „, XXXVIII, parte II (1908), pagg. 341-344.

Digitized by Google

mentati (ricottura a 1000°, in ossido di carbonio, durante sette e quindici ore) non potemmo constatare, nemmeno nelle zone esterne dei cilindretti, un aumento della concentrazione del carbonio superiore al 0,15 %. Questo risultato il quale avrebbe potuto essere preveduto anche in base a quanto uno di noi potè altra volta stabilire intorno all'azione cementante dell'ossido di carbonio) (1) ci permette dunque di considerare come del tutto precise le deduzioni tratte poco fa dalle nostre esperienze, intorno all'efficacia dell'ossido di carbonio come agente " diffusore „ del carbonio nell'acciaio: o — per usare la parola adottata da Portevin e Berjot — come agente di " omogeneazione „ delle zone cementate.

Per riassumere, da quanto abbiamo detto nelle pagine precedenti, ciò che può avere un interesse pratico, enumeriamo brevemente i vantaggi pratici che possono ottenersi seguendo per la cementazione dell'acciaio i processi che abbiamo descritti, in luogo di quelli abitualmente in uso nella tecnica: salvo, naturalmente, ad introdurvi nella pratica quelle modificazioni che valgano a renderli più adatti agli scopi speciali che si vogliono ottenere in ogni singolo caso.

1° Maggior velocità di penetrazione del carbonio. È inutile enumerare i vantaggi noti — e d'altra parte evidentissimi — di tale caratteristica.

2° Maggiore uniformità nella distribuzione del carbonio. Anche i vantaggi di questa caratteristica del processo in questione non hanno bisogno di essere enumerati, dopo i numerosi fatti citati e le ampie considerazioni svolte — sia nella presente memoria, che nelle precedenti, più volte citate — per porre in evidenza i dannosi effetti che le brusche variazioni della concentrazione del carbonio (dovute generalmente ai fenomeni di liquazione, che abbiamo largamente illustrati) esercitano sulle proprietà meccaniche degli acciai cementati.

3° Possibilità di regolare la concentrazione del carbonio nella zona cementata, in modo da mantenere il suo valore massimo al di sotto dei limiti — variabili a seconda dell'acciaio

(1) " Gazz. Chim. It. „, 1908, XXXVIII, parte II, pagg. 340-345.

Digitized by Google

sottoposto alla cementazione — oltre i quali cominciano a manifestarsi i fenomeni di fragilità.

4° Possibilità di stabilire " a priori „ con sicurezza le condizioni (di temperatura, pressione, velocità della corrente gassosa..... ecc.) atte ad ottenere risultati determinati (profondità della cementazione; concentrazione del carbonio; ...ecc.).

5° Uso " continuo „ degli stessi materiali cementanti (carbone e ossido di carbonio) i quali non si " esauriscono „ mai, e possono essere adoperati fino al loro totale consumo. Ciò che permette anche di ottenere cementazioni di qualsiasi profondità senza che sia necessario di " rinnovare „ mai il cemento.

6° Sicurezza assoluta di non introdurre nell'acciaio alcuna sostanza estranea, all'infuori del carbonio: condizione che non si verifica per la maggior parte delle polveri da cementazione abitualmente usate (contenenti sostanze organiche azotate, cianuri... ecc.) e che presenta in molti casi grandissimi vantaggi (per esempio, nella cementazione del ferro puro destinato a fornire — per fusione al crogiuolo — acciai duri di una grande purezza) (1).

7° Facilità di conservare perfettamente inalterata e lucente la superficie dei pezzi cementati: ciò che in molti casi (come, ad esempio, nella cementazione delle placche d'acciaio per incisione) può presentare notevoli vantaggi; e può talora anche permettere di evitar di rettificare i pezzi cementati (ad esempio, quando si cementino acciai — quali gli acciai ad alto tenore di nichelio — la cui superficie carburata assume la struttura martensitica anche senza tempra). L'abolizione della rettifica finale è resa facile dalla piccolezza delle variazioni di volume dei pezzi cementati e dalla possibilità di determinare " a priori „ in ogni caso e con assoluta precisione, l'entità di tali variazioni. Abbiamo già detto che i cilindretti dei quali ci siamo serviti per le ricerche riferite sopra, erano stati sempre accuratamente

(1) Facciamo notare, a questo proposito, come nelle cementazioni eseguite secondo il procedimento da noi indicato, resti escluso il dubbio sollevato da Heyn (*Communications de l'Association internationale pour l'essai des matériaux*. Maggio 1909, pag. 5), che nell'esame della cementazione si debba necessariamente considerare il sistema ternario ferro-carbonio-azoto, anzichè il sistema binario ferro-carbonio. Nel nostro caso il sistema da considerarsi è evidentemente il sistema ferro-carbonio-ossigeno.

Digitized by Google

calibrati prima di sottoporli alla cementazione, nelle condizioni indicate. Orbene, misure precise eseguite sui cilindretti stessi cementati, ci hanno dimostrato che in nessun caso il loro diametro ha subìto un aumento superiore ai 0,03 mm.: nemmeno nelle cementazioni più profonde, quali la 4ª e l'11ª della Tabella I.

8° Facilità di trovare, per tutti i casi pratici che possono presentarsi nella tecnica, dispositivi tali da permettere di evitare l'uso incomodo e costoso delle solite " cassette da cementazione „. Di tali dispositivi parecchi sono già stati studiati e posti in opera, sopra tutto per la cementazione di grossi pezzi. Abbiamo iniziato, e condotto già a buon punto lo studio di analoghi dispositivi, adatti per la cementazione di piccoli pezzi meccanici.

Torino, Laboratorio di Chimica metallurgica e metallografia
del R. Politecnico. Marzo 1910.

Alcune conseguenze dedotte dalla ipotesi moderna sulla entità del calorico e della temperatura.

Nota del Prof. PIETRO GAMBÈRA.

1. — Numerosi esperimenti, relativi alla genesi meccanica del *calorico* (causa della sensazione di calore), hanno indotto i fisici moderni ad ammettere che il calorico *attuale* o sensibile di un corpo qualunque, solido, liquido od aeriforme, non sia altro che la totale *energia* (forza viva) delle sue molecole elementari, dette *atomi* (1).

Gli atomi componenti un corpo tendono, per azione e reazione reciproca, ad acquistare eguale energia. Ma ci limitiamo a supporre che la intensità calorifica (*temperatura assoluta*) di

(1) L'energia atomica, comunicata ad un corpo, ne aumenta il calorico attuale ed in parte si trasforma in lavoro interno ed esterno al corpo stesso, ossia in *calorico potenziale*. Tutto il calorico di un corpo è uguale alla somma del suo *calorico attuale* col suo *calore potenziale*.

Digitized by Google

un corpo, in equilibrio termico, sia la media energia E de' suoi atomi. Quindi, se n è il numero di questi atomi, la energia termica attuale del corpo, ossia il suo calorico attuale, sarà nE.

La intensità calorifica E del corpo sarà proporzionale alla sua temperatura assoluta θ espressa in gradi di un termometro a gas, ossia sarà $E = \theta \times k$, essendo k un numero *costante*.

Per conseguenza, se indichiamo con q l'energia termica, ossia il calorico attuale del corpo, sarà:

$$q = nE = n\theta \times k.$$

Essendo adunque $q = n\theta \times k$, risulta che *il calorico attuale di un corpo qualunque è proporzionale al numero de' suoi atomi ed alla sua temperatura assoluta.*

2. Calorico specifico assoluto. — Se la temperatura assoluta θ di un dato corpo, solido, liquido od aeriforme, aumenta di $\Delta\theta$, e se indichiamo con Δq il corrispondente aumento del suo calorico attuale q, la precedente relazione:

$$q = n\theta \times k$$

diventa:

$$q + \Delta q = n(\theta + \Delta\theta) \times k.$$

Quindi si deduce, sottraendo,

$$\Delta q = n\,\Delta\theta \times k$$

e per conseguenza:

$$\frac{\Delta q}{p\,\Delta\theta} = \frac{n}{p} \times k,$$

se p è il peso del corpo considerato, bilanciato in chilogrammi.

Ma il primo membro dell'ultima eguaglianza definisce *il calorico specifico assoluto* (c) del corpo, ossia l'aumento di calorico attuale in un chilogramma di esso corpo, corrispondente all'aumento di un grado della sua temperatura. Essendo adunque:

$$c = \frac{\Delta q}{p\,\Delta\theta} = \frac{n}{p} \times k,$$

sarà:

$$\Delta q = p\,c\,\Delta\theta, \quad c = \frac{n}{p} \times k, \quad \frac{p}{n} \times c = k.$$

Digitized by Google

Dalla eguaglianza $\Delta q = pc\Delta\theta$ risulta che *l'aumento di calorico attuale in dato corpo è proporzionale all'aumento della sua temperatura.*

E dalla relazione $c = \frac{n}{p} \times k$ risulta che *il calorico specifico assoluto di un corpo è indipendente dalla sua temperatura, dal suo stato fisico e dalla pressione esterna.* Anzi, la detta relazione potendosi trasformare nella $c = k : \frac{p}{n}$ ed essendo $\frac{p}{n}$ il peso medio degli atomi del corpo, risulta che il suo calorico specifico assoluto dipende esclusivamente dal peso medio $\frac{p}{n}$ de' suoi atomi.

Se il corpo considerato è chimicamente semplice e se indichiamo con a il peso di ciascuno de' suoi atomi, sarà $p = an$. Quindi dalla dedotta relazione $\frac{p}{n} \times c = k$ si ottiene, sostituendo,

$$\frac{an}{n} \times c = k \quad \text{ossia} \quad ac = k = \text{cost.}$$

Adunque *il prodotto del peso atomico per il calorico specifico assoluto è identico per tutti i corpi semplici, qualunque sia la loro temperatura ed il loro stato fisico.*

Pertanto la legge di Dulong e Petit, la quale si verifica con grossolana approssimazione, diverrebbe matematicamente esatta e indipendente dalla temperatura, se fosse enunciata sostituendo, al calore specifico volgare, il calorico specifico assoluto, come fu già supposto da Hirn.

Inoltre dalla predetta relazione, $\frac{p}{n} \times c = k = \text{cost.}$, risulta che *il peso medio* $\left(\frac{p}{n}\right)$ *degli atomi di un corpo composto chimicamente, o soltanto misto, moltiplicato per il suo calorico specifico assoluto, dà un prodotto identico per tutti i corpi composti o misti, qualunque sia la loro temperatura ed il loro stato fisico.*

Ma, se si tratti di un corpo chimicamente composto, è chiaro che il peso medio de' suoi atomi sarebbe il peso medio degli atomi componenti una delle sue molecole. Così il peso medio degli atomi di una massa d'acqua sarebbe $\frac{2H+O}{3}$.

Adunque anche la legge di Woestyn diverrebbe matematicamente esatta e indipendente dalla temperatura, se fosse

Digitized by Google

enunciata sostituendo, al calorico specifico volgare, il calorico specifico assoluto.

3. Calcolo del calorico specifico assoluto. — Il calorico comunicato ad un dato gas, mantenuto a volume costante, resterebbe esclusivamente impiegato ad aumentare la sua temperatura e quindi anche il suo calorico attuale. Infatti sarebbe nullo il lavoro esterno; e sarebbe anche nullo il lavoro interno, perchè la media distanza fra gli atomi del gas resterebbe invariata. Perciò il calorico specifico assoluto di un gas è il suo calorico specifico a volume costante.

Secondo Cazin, per l'idrogeno il calorico specifico a volume costante è 2,419. Quindi questo numero è anche il suo calorico specifico assoluto.

Adunque, se si prende per unità dei pesi atomici il peso atomico dell'idrogeno, per questo gas sarà:

$$ac = 1 \times 2{,}419 = 2{,}419 = k.$$

Ma abbiamo dimostrato che $ac = k = \text{cost.}$ per tutti i corpi semplici. Perciò sarà $ac = 2{,}419$ per qualunque corpo semplice, se il suo peso atomico a è riferito al peso atomico dell'idrogeno, preso per unità.

Dalla precedente uguaglianza si deduce che $c = \frac{2{,}419}{a}$, ossia che il calorico specifico assoluto di un corpo semplice si ottiene dividendo, per il suo peso atomico, il numero costante 2,419.

Calcoliamo ora il calorico specifico assoluto di un corpo chimicamente composto, per es. dell'acqua.

Applicando la legge di Woestyn, precedentemente corretta mediante la sostituzione del calorico specifico assoluto al calorico specifico volgare, otteniamo:

$$\frac{2H + O}{3} \times c = k = 2{,}419$$

ossia:

$$\frac{2 + 16}{3} \times c = 2{,}419$$

e quindi:

$$c = \frac{2.419}{6} = 0{,}403.$$

Digitized by Google

Adunque il calorico specifico assoluto dell'acqua, qualunque sia il suo stato fisico, è poco più di $\frac{4}{10}$.

Essendo, per convenzione fatta, il calorico specifico volgare dell'acqua liquida $= 1$, ed essendo $1 - \frac{4}{10} = \frac{6}{10}$, risulta che circa $\frac{4}{10}$ del calorico, comunicato ad una massa d'acqua liquida, sono impiegati ad aumentarne la temperatura e quindi anche il calorico attuale; e che i rimanenti $\frac{6}{10}$ si trasformano in lavoro interno ed esterno all'acqua stessa, ossia in calorico potenziale.

Inoltre, essendo quasi $\frac{5}{10}$ il calorico specifico del vapore acqueo a pressione costante ed essendo $\frac{5}{10} - \frac{4}{10} = \frac{1}{10}$, ne consegue che appena $\frac{1}{10}$ del calorico comunicato ad una massa di vapor acqueo, sotto pressione costante, si trasformerebbe in lavoro esterno, pure ammettendo che il lavoro interno al vapore sia trascurabile.

Fra il calorico specifico assoluto c di un composto chimico ed i calorici specifici assoluti c', c''... dei componenti si può stabilire una relazione. Così, per esempio, essendo per l'acqua:

$$\frac{2H+O}{3} \times c = k \qquad \text{e quindi} \qquad 2H+O = \frac{3k}{c};$$

ed essendo inoltre: $Hc' = k$, $Oc'' = k$, risulta:

$$2\frac{k}{c'} + \frac{k}{c''} = \frac{3k}{c},$$

e per conseguenza:

$$\frac{3}{c} = \frac{2}{c'} + \frac{1}{c''}.$$

4. Calcolo del calorico attuale di un corpo. — Dalle relazioni:

$$q = n\theta \times k \qquad \text{e} \qquad c = \frac{n}{p} \times k$$

state dedotte al n° 2, si ottiene, dividendo:

$$\frac{q}{c} = p\theta$$

e quindi:

$$q = pc\theta.$$

Digitized by Google

Questa formola esprime, in calorie, il calorico attuale (q) di un corpo qualunque in funzione del suo peso (p) in chilogrammi, del suo calorico specifico assoluto (c) e della sua temperatura assoluta (θ) in gradi di Celsio.

Adunque il calorico attuale di un corpo dipende dalla sua massa e dalla sua temperatura, ma non dal suo volume. Se, per diminuita pressione esterna, il corpo si dilata *adiabaticamente*, la sua temperatura diminuirà perchè il suo calorico attuale si trasformerà parzialmente in calorico potenziale.

Se indichiamo con θ_0 la temperatura assoluta del ghiaccio fondente, ossia la temperatura assoluta corrispondente allo *zero* termometrico di Celsio, e con t la temperatura ordinaria del corpo considerato, la precedente formola diventa:

$$q = pc(\theta_0 + t).$$

Inoltre, se t aumenta di Δt e se Δq indica il corrispondente aumento del calorico attuale q, si ottiene:

$$q + \Delta q = pc(\theta_0 + t + \Delta t)$$

e per conseguenza:

$$\Delta q = pc\,\Delta t.$$

5. Equazione termodinamica dei corpi. — Supponiamo che tutto il calorico Q (attuale + potenziale) di un corpo aumenti di ΔQ. Abbiamo sopra dimostrato che $pc\Delta t$ sarà l'aumento del calorico attuale del corpo, se p chilogrammi è il suo peso e Δt è l'aumento della sua temperatura t. Inoltre l'aumento del calorico potenziale del corpo sarà $\frac{\Delta L_i + \Delta L_e}{J}$, se indichiamo con ΔL_i l'aumento del lavoro interno, con ΔL_e l'aumento del lavoro esterno al corpo e con J l'equivalente meccanico della caloria. Per conseguenza abbiamo:

$$\Delta Q = pc\,\Delta t + \frac{\Delta L_i + \Delta L_e}{J}.$$

È questa, in generale, l'equazione termodinamica dei corpi.

Digitized by Google

Relazione sul lavoro del D.r A. Casu, dal titolo: *Lo Stagno di S.ta Gilla (Cagliari) e la sua vegetazione.*

La memoria che l'A. presenta consta di due parti, delle quali la prima, da considerarsi come la prefazione allo studio botanico, è di natura quasi esclusivamente geofisica. Essa è frutto di lunghe, continuate ricerche sulla località sopranominata, la quale, dagli studiosi che precedettero il D.r Casu, fu lasciata quasi in disparte.

Essi, invero, si limitarono ad osservarne ed a descriverne la esterna configurazione, ed a darne poche notizie che l'A. riassume, ridotte ad una nuda descrizione della zona salmastra ed all'enumerazione di qualche pianta palustre o stagnale, comune ad altri luoghi consimili dell'isola.

Molto meno poi questi Autori hanno avuto in pensiero di ricercare le cause prossime o remote della genesi dello stagno di S.ta Gilla e delle sue variazioni attraverso al tempo.

Il Casu presenta, sotto questo punto di vista, un lavoro degno di molta considerazione. Frequentissime escursioni e stazioni sul luogo, sperienze ed osservazioni fatte e ripetute con minuziosa cura, gli fornirono dati fisici sicuri e numerosi, coordinati poi, in parte, a quelli dell'Osservatorio meteorologico di Cagliari. Su queste basi e con questi elementi l'A. potè risolvere diversi quesiti riguardanti la storia dello stagno di S.ta Gilla. Uno fra i più originali e, fino ad un certo punto in relazione colla botanica, di natura ecologica, mentre da un altro lato esso tocca un argomento archeologico, è quello discusso dall'A. sulla possibile esistenza di una flora antichissima, risalente all'epoca romana nell'area occupata oggidì dallo stagno. L'A. confortato dai dati fisici attuali e da altri storici antichi o recenti, ma inoppugnabili, dimostra l'insussistenza di una simile ipotesi.

In verità lo stagno esisteva già all'epoca romana, meno ampio, ma in condizioni tali di rapporto col mare, malgrado le alternanze della sua costituzione più o meno salata, da esclu-

Digitized by Google

dere assolutamente la possibilità di una qualsiasi vegetazione arborea, quale doveva essere quella ornamentale di palmizi o di qualsivoglia altra essenza di alto fusto. Nè pure (dimostra il Casu) poterono esistere giardini o ville nella località occupata dallo stagno, nè a suo giudizio, future esplorazioni del fondo potrebbero esumare ruderi di abitazioni romane sepolte.

In un seguente capitolo l'A., premesse le linee generali di posizione, di forma, di fondo, di livello, di orientazione e di alimentazione dello stagno ne studia la costituzione attuale fisica.

Egli passa in rassegna gli Autori che prima di lui se ne occuparono, accennando alle lacune delle loro opere ed alla scarsa contribuzione floristica, compresa piuttosto nella indicazione generale di *flora stagnale* dell'isola fattane dal Moris, dal Barbey, dal Grünow, dal Marciali, dal Gennari, dal Falqui, dal Cavara e dall'Herzog, avvertendo che questo difetto di contribuzione dipende dall'essere ancora oggidì lo studio della Flora Sarda, in generale, addietro assai di fronte alle profonde investigazioni di che fu ricca la Penisola.

E di qui il fatto che molte specie sono indicate per poche località le quali possono essere frequentissime altrove, e di qui la mancanza di distinzioni, comuni ormai nel continente, di piante *fluviatili, palustri, salmastre, alicole, xerofite* ecc. ecc. delle quali la prima indicazione venne data dal Cavara.

Anche l'Herzog, che si occupò delle stazioni e formazioni vegetali in Sardegna, obliò completamente la vegetazione stagnale, ondechè, sia per il complesso dell'ambiente e per la peculiare stazione dello stagno di S.ta Gilla, sia per i dati fisici tutt'affatto nuovi, esatti, ripetuti e controllati che ne dà l'Autore, questa parte del suo lavoro assume un innegabile valore e costituisce un contributo prezioso per coloro che in avvenire si occuperanno della fitogeografia dell'isola.

Un altro punto del lavoro che parve ai relatori degno di attenzione è quello nel quale l'A. discorre della genesi dello stagno il quale capitolo si riattacca naturalmente a quella parte che di questa memoria riguarda, come già si disse, la botanica in senso stretto. L'A. premette le relazioni anteriori sull'argomento: quelle del Lamarmora, del Solmi, dello Scano, del Vivanet, del Taramelli dalle quali ricerche emerge già l'incertezza sulla storia originaria dello stagno stesso. E mentre

Digitized by Google

l'esistenza di resti di una città romana nella località attualmente occupata dallo stagno vien dimostrata essere leggenda, pare poi certo che, nella parte alta dello stagno, dove il fondo è roccioso ed elevato, esistessero, al dire del Taramelli, le più ricche dimore dell'età imperiale.

L'A. estende il suo studio fisico-archeologico anche alla Plaja, vale a dire, alla zona compresa fra lo stagno di S.ta Gilla e il mare, accennando alle vicende che essa subì attraverso ai secoli per opera dei fiumi sboccanti nello stagno da un lato e dell'urto del mare dall'altro. Di queste due forze l'ultima, prevalente, mantiene alla Plaja la caratteristica di zona prettamente litoranea con vegetazione affatto marina, e con questo studio l'Autore completa la disamina fisica della zona che serve di limite allo stagno dalla parte del mare.

Per ultimo, nei paragrafi rispettivamente denominati " *Fattori dell'ambiente* „ (Venti, evaporazione, piogge ecc.) — " *Caratteri fisico-chimici dell'acqua* „ (Movimenti, salsedine, temperatura, piene invernali, magre estive ecc.) — " *Studio fisico-chimico del terreno* „ (Analisi ecc.) l'A. espone i resultati di quelle personali osservazioni di che fu fatto cenno al principio di questa relazione. Le quali da se sole mostrano già un non comune pregio della memoria, e fanno sperare che la seconda parte (che l'A. presenterà fra breve) abbia ad essere di pari valore della prefazione. Riuscirà così l'opera nel suo insieme, l'illustrazione di un angolo poco noto ed interessante della Sardegna. La memoria è corredata di una tavola esplicativa, molto accurata, dello stagno di S.ta Gilla. Per questi motivi i relatori credono di proporre alla R. Accademia delle Scienze l'accettazione della memoria per la stampa.

C. F. Parona
Oreste Mattirolo, *relatore*.

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

Digitized by Google

CLASSI UNITE

Adunanza del 24 Aprile 1910.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: SPEZIA, CAMERANO, SEGRE, PEANO, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA, MATTIROLO, SOMIGLIANA. — Scusano l'assenza SALVADORI e FUSARI;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: BOSELLI, Vice-Presidente dell'Accademia, MANNO, Direttore della Classe, ALLIEVO, RENIER, PIZZI, CHIRONI, RUFFINI, STAMPINI, BRONDI, SFORZA e DE SANCTIS, Segretario. — Scusa l'assenza il Socio CARLE.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente a Classi unite, 20 febbraio 1910.

Il Presidente comunica il telegramma inviato dal Socio BOSELLI per ringraziare delle condoglianze a lui espresse in nome dell'Accademia nella luttuosa circostanza della morte della sua Signora. Dà notizie della salute del Socio GRAF inviandogli un fervido augurio di pronta guarigione.

Invitato dal Presidente, il Socio SOMIGLIANA legge la Commemorazione del defunto Socio MORERA. Essa sarà inserita negli *Atti*.

Radunatesi poi le Classi in seduta privata, si procede alla elezione del Presidente e del Vice-Presidente per compiuto secondo triennio dei Soci D'OVIDIO e BOSELLI, che rivestono al presente tali cariche e che non sono più rieligibili.

Riescono eletti, salvo l'approvazione Sovrana, a Presidente il Socio BOSELLI e a Vice-Presidente il Socio NACCARI.

Digitized by Google

LETTURE

GIACINTO MORERA

Commemorazione letta dal Socio SOMIGLIANA CARLO.

Il parlare oggi davanti alla nostra Accademia di GIACINTO MORERA e della sua opera scientifica, mentre rinnova in me il dolore grandissimo della perdita prematura di un collega prezioso, di un amico affezionato, è pure accompagnato da un sentimento di conforto, poichè mi porge un mezzo di mettere in luce i molti meriti di lui, forse non tanto conosciuti quanto lo dovrebbero. Poichè Giacinto Morera fu di quegli uomini, che, anzichè mettersi in vista, cercano quasi di nascondersi, poco curando che altri sappia quanto essi valgono. Nè ciò proveniva in lui da un insufficiente apprezzamento di sè stesso; che anzi del proprio valore ebbe un concetto adeguato e dignitoso, ma proveniva da una concezione seria della vita, e da una profonda antipatia per tutto ciò che sapesse di vanità o di superficialità.

Nacque il Morera in Novara il 18 luglio 1856 da Giacomo e da Vittoria Unico. Fece i primi studi in patria e percorse poi qui, in Torino, gli studi di ingegneria, laureandosi nel 1878. L'anno dopo, seguendo la sua naturale inclinazione per gli studi teorici e non premuto da necessità economiche, chè la fortuna paterna nel commercio gli permetteva di attendere liberamente agli studi, si laureò anche in matematica. La sua tesi *Sul moto di un punto attratto da due centri fissi con la legge di Newton*, mostra come egli fosse già fin d'allora in possesso delle più elevate teorie della meccanica e dell'analisi. La predilezione per la Meccanica era stata suscitata in Lui dal Sciacci, che allora qui in Torino ed in Italia primeggiava sia come cultore della Meccanica teoretica, che delle sue applicazioni, specialmente alla Balistica, di cui fu celebrato maestro.

Ottenuto un posto di perfezionamento all'interno, il Morera fu a Pavia nel 1881-82, ove insegnavano Eugenio Beltrami, Fe-

Digitized by Google

lice Casorati, Eugenio Berbini e passò l'anno successivo a Pisa per seguire i corsi del Betti, del Dini, del De-Paolis. Eravamo allora in un periodo splendido per gli studi matematici in Italia, ed in special modo per le Facoltà di Pavia e di Pisa: ed il Morera, già forte degli studi fatti in Torino, corroborò presso quelle Università quell'amore intenso, appassionato per le scienze matematiche, che non doveva più abbandonarlo per tutta la vita.

In questi anni egli si era dedicato specialmente alle ricerche relative alle equazioni fondamentali della Meccanica, ricerche allora in massimo onore pei trovati del Mathieu, del Mayer, del Lie; allo scopo di meglio approfondirsi in questi argomenti nel 1884 si recò a Lipsia, ove, oltre il Mayer, insegnavano il Klein e Carlo Neumann. Nel 1885 seguì alcuni corsi anche all'Università di Berlino, ove ancora risplendeva il genio di Helmholtz, di Kirchhoff, di Weierstrass.

Tornato in patria, sulla fine del 1885 la Facoltà di Scienze di Pavia lo chiamò ad un Ufficio, da poco allora fondato, quello di professore interno per la scuola di magistero, ma l'anno successivo, apertosi il concorso per la cattedra di ordinario di Meccanica razionale nella Università di Genova, il Morera lo vinceva appena trentenne.

A Genova Egli trascorse il più lungo periodo della sua carriera universitaria, e là si formò una famiglia, sposando la sig.na Cesira Faà, sua concittadina; finchè nel 1901, la Facoltà di Scienze di Torino, lo volle successore al Volterra. Fu in Genova per due trienni (dal 1891-92 al 1896-97) preside della Facoltà e nei due anni successivi Rettore dell'Università, portando anche in queste cariche quella dirittura di giudizio, quella semplicità di maniere, quella lealtà di carattere che lo resero così caro ed amato anche fra noi.

Di forte costituzione fisica si può dire non avesse mai avuto alcun male, quando nel principio dello scorso anno un violento attacco di polmonite quasi improvvisamente lo spense, il giorno 8 di febbraio, ancora nel pieno vigore della virilità.

Apparteneva alla nostra Accademia dal 1902, all'Accademia dei Lincei dal 1896.

Lavoratore indefesso, fu sempre al corrente delle più interessanti quistioni dibattute nel campo scientifico e la sua produzione, cominciata giovanissimo, si susseguì senza interruzione

Digitized by Google

fino agli ultimi tempi, nessuna cosa avendo mai potuto distrarlo dagli studi prediletti.

Sarebbe assai lungo il parlare completamente di tutte le sue ricerche, svoltesi su argomenti assai vari e spesso intimamente collegate con lavori di altri studiosi, dei quali converrebbe pure parlare, per porre in giusta luce i lavori del Morera. Nelle matematiche è possibile ad una fantasia fortemente creatrice fondare e svolgere teorie che abbiano una base del tutto originale e vivono quasi staccate da ricerche precedenti. Questo carattere non è prevalente nell'opera scientifica del nostro matematico, che sentiva anzi tutto il bisogno di approfondire l'opera altrui e vi riusciva mirabilmente, in virtù di una forza di penetrazione non comune, di una mente lucidissima, nella quale non trovano mai posto idee vaghe od incomplete. Perciò quasi ogni suo lavoro si presenta come naturale risultato di un profondo lavoro d'analisi su teorie che già hanno subìto un grado elevato di elaborazione.

Riassumerò, come meglio mi è possibile, i molti e svariati materiali, onde è costituita la sua poderosa opera scientifica.

Senza dubbio il gruppo più considerevole riguarda la teoria dell'integrazione delle equazioni fondamentali della dinamica, e la lunga serie di questioni d'analisi che, imperniate sui lavori classici di Lagrange, Hamilton, Jacobi hanno dato origine a quella vasta dottrina che, sebbene ora non sia più con tanta vivacità coltivata, conserva sempre un grande interesse per la sua virtù applicativa ai problemi della Meccanica, e per il contributo che porta alla teoria generale dell'integrazione delle equazioni differenziali.

Il Morera esordì in questo campo con una diretta e ingegnosa dimostrazione di una formula trovata dal Mathieu, nella sua *Dynamique analytique*, con un lungo e complicato procedimento di calcolo. La formola si riferisce alla trasformazione di quelle formazioni analitiche che sono conosciute sotto il nome di *parentesi* di Poisson.

Nel 1880 Sciacci aveva pubblicato un *Teorema fondamentale nella teoria delle equazioni canoniche del moto*, che non differisce sostanzialmente da un classico teorema di Lie sulle trasformazioni di contatto, ma che allo Sciacci non era ancor noto. Il Morera ne diede tosto una nuova dimostrazione, deducendola da

Digitized by Google

alcune considerazioni, puramente algebriche, stabilite da Frobenius nella sua classica memoria *Ueber das Pfaff'sche Problem.*

Egli si trovò così portato allo studio di questo famoso problema, le cui relazioni strettissime col problema della integrazione delle equazioni canoniche del moto erano state poste in luce da poco. Vi si dedicò con giovanile ardore ed in breve i profondi e non facili lavori di Frobenius, di Darboux, di Sophus Lie sopra questo argomento non ebbero più segreti per lui.

Nessuno certamente in Italia conobbe allora meglio del Morera, questo genere di quistioni, che nelle matematiche hanno forse i maggiori caratteri di generalità e comprensione, e richiedono, per essere trattati, i più svariati sussidi dell'analisi. Egli vi portò poi un contributo notevole sia dal punto di vista metodologico, sia per risultati originali, come la estensione del metodo di Pfaff ad un *sistema* jacobiano di equazioni a derivate parziali.

Ma i risultati più completi e maturi sopra questi argomenti il Morera li portò assai più tardi, quasi vent'anni dopo, quando assunse a Torino l'insegnamento della Meccanica Superiore. È del 1903 infatti un bel gruppo di memorie sulle equazioni canoniche del moto, sotto la forma di Lagrange e di Hamilton, e sulle trasformazioni di queste equazioni, pubblicate negli Atti della nostra Accademia, e nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei e dell'Istituto Lombardo. In esse si propone di stabilire con precisione le proprietà di relazione che esistono fra il problema fondamentale del moto, il problema di Pfaff ed il problema della trasformazione di un sistema canonico in un altro della stessa forma, mettendo in evidenza come il problema della determinazione degli integrali del movimento si possa sempre ridurre all'uno od all'altro di questi. Sebbene queste proprietà fossero sostanzialmente note, la loro portata non era però con precisione stabilita. Il Morera dimostra che esistono infinite forme differenziali di cui un dato sistema canonico può essere il primo sistema delle equazioni di Pfaff, e determina quali possono essere queste forme differenziali. Ne deduce che la trasformazione di un sistema canonico in un'altra equivale a trasformare una certa forma differenziale in un'altra della stessa natura, ma che ne differisce per un differenziale esatto e riesce quindi a determinare la forma generale di tali trasformazioni.

Digitized by Google

Trova inoltre alcune proprietà analitiche interessanti, sebbene meno strettamente collegate col problema dinamico. Così, generalizzando alcuni risultati di Clebsch, dimostra che qualsiasi sistema di un numero pari di equazioni differenziali è sempre riducibile a forma Hamiltoniana, e che qualunque trasformazione delle variabili, che converte un sistema canonico in un altro, è necessariamente di contatto.

È da deplorarsi che al Morera sia mancato il tempo di preparare una esposizione completa ed organica di tutte queste teorie, la quale riassumesse i risultati precedenti ed i propri, ed usufruisse di tutte le semplificazioni e di tutti i perfezionamenti da Lui trovati. Egli ne possedeva largamente i mezzi e la sua lucidità e precisione di esposizione era sicura garanzia di successo.

Passando ora a considerare lavori che hanno carattere meno strettamente analitico e possiedono più diretta applicazione a quistioni fisiche, troviamo anzi tutto una bella serie di ricerche intorno al classico problema dell'attrazione degli elissoidi.

Uno dei risultati più notevoli e suggestivi a cui sia arrivata la geodesia è l'aver dimostrata la possibilità di determinare teoricamente i valori della gravità superficiale terrestre, senza bisogno di fare alcuna ipotesi intorno alla distribuzione, a noi sconosciuta, della massa nell'interno della terra. Il nostro Pizzetti nel 1894 ha dato la formola definitiva che risolve questo problema (formola stabilita primamente da Stokes nel 1849 per via puramente approssimativa) considerando poi anche il caso in cui lo sferoide terrestre si ammette di forma elissoidica non di rotazione.

Il problema risolto analiticamente dal Pizzetti si riduce alla determinazione della funzione armonica esterna ad un elissoide, quando i valori ad essa assegnati sulla superficie sono rappresentati da una certa funzione di secondo grado delle coordinate.

Il Morera trovò facilmente l'origine analitica della soluzione del Pizzetti e risolvendo in generale il problema della determinazione di una funzione armonica nello spazio esterno ad un elissoide, la quale sulla superficie di questo si riduce ad una funzione data qualsiasi omogenea di secondo grado, potè estendere il risultato del Pizzetti rendendolo applicabile ad un elissoide ruotante intorno ad un suo diametro qualunque.

Digitized by Google

Di qui il Morera si trovò portato allo studio della quistione più generale relativa al caso in cui la funzione rappresentante i valori dell'armonica cercata sull'elissoide è una funzione omogenea di grado qualsiasi. E poichè, partendo dagli sviluppi per funzioni sferiche, si può sempre rappresentare una funzione arbitrariamente data sull'elissoide mediante una serie di tali funzioni, egli ne dedusse una soluzione del problema di Dirichlet per lo spazio esterno, mediante la serie delle soluzioni precedentemente trovate.

Questa soluzione che il Morera studiò con la solita acutezza in tutti i suoi non facili particolari algebrici ed analitici, offre, rispetto a quella classica di Lamè, il vantaggio che le soluzioni elementari, di cui si compone, possono essere linearmente determinate. Esse però non godono della proprietà dell'ortogonalità e però riesce meno semplice la determinazione dei coefficienti dello sviluppo in serie.

Nella indagine matematica ha spesso una importanza fondamentale non solo il fatto di arrivare alla soluzione di un dato problema, ma anche il modo col quale vi si arriva. Poichè può darsi che una soluzione, logicamente esatta, offra tali difficoltà di procedimento da renderla quasi inaccessibile e talvolta anche inapplicabile ai casi concreti a cui dovrebbe servire. Negli scritti del Morera la sicura padronanza dell'analisi e l'ingegnosità dei mezzi di ricerca si traduce quasi sempre in una grande economia di ragionamento e di calcolo, e conferisce ad essi un carattere di perfezione quale si riscontra nei migliori autori. Si può dire, sotto questo riguardo, che non inutilmente egli era stato allievo del Beltrami.

Per un tale desiderio di perfezione, anche formale, si intende come molte quistioni di metodo lo abbiano spesso interessato, portandolo ad eleganti risultati.

Tipiche fra quelle sue numerose note, brevi e concettose, sono alcune che riguardano la definizione di variabile complessa. Egli aveva fatta l'osservazione che alla definizione classica di Cauchy-Riemann, basata sul concetto della derivata della funzione, se ne può sostituire un'altra più comprensiva basata sulla condizione che sia nullo l'integrale della funzione esteso ad un contorno qualsiasi, nel quale essa sia regolare. Questo risultato lo portò a trovare un metodo di assai semplice applicazione, per

Digitized by Google

riconoscere se espressioni infinite, come le serie od i prodotti infiniti, soddisfano alla condizione di rappresentare funzioni analitiche, mentre i criteri, di solito usati, sono generalmente di assai difficile e penosa applicazione.

Il modo di comportarsi dell'integrale di Cauchy per la rappresentazione delle funzioni di variabile complessa, le discontinuità delle derivate seconde delle funzioni potenziali di spazio e delle derivate normali per quelle di superficie, oggetto spesso nei trattati di pesanti e non sempre soddisfacenti discussioni, furono da Lui studiate con un unico e semplicissimo artificio e con un rigore perfetto.

Desideroso di mantenersi al corrente di tutte le questioni del giorno, era spesso portato a fare sopra argomenti diversi osservazioni acute ed ingegnose, che hanno dato origine ad una lunga serie di note staccate, che ora ci rilevano l'intimo e continuo lavorìo della sua mente.

Ricordiamo quella memoria giovanile in cui l'equilibrio di una superficie flessibile ed inestendibile è rappresentato come l'equilibrio di un doppio sistema di fili isolati ed intrecciantisi, come i fili di un tessuto.

Ricordiamo quell'elegante Nota pubblicata nei *Mathematische Annalen* sull'integrazione delle espressioni differenziali, ottenuta con un procedimento, che è forse il più semplice possibile.

Ricordiamo infine l'ultimo suo lavoro del 1907 sull'equilibrio dei corpi elastici, in cui una speciale singolarità, quella dell'esistenza di un centro di pressione, viene genialmente interpretata come rappresentante analiticamente le condizioni instabili d'equilibrio di masse vetrose che per piccole deformazioni possono essere completamente disgregate.

Ingegno versatile Egli conosceva profondamente tutto il campo delle teorie analitiche e delle loro applicazioni a questioni fisiche e meccaniche; nè cessò d'interessarsi delle questioni tecniche, oggetto primo dei suoi studi. Egli aveva così acquistato nel suo lavoro scientifico quel senso speciale di metodo e di ragionamento, che solo proviene dalla conoscenza non superficiale di tante disparate dottrine. Senso di equilibrio tra i mezzi e lo scopo, che mantiene l'analisi lontana da speculazioni troppo astratte e mette nelle mani dello studioso dei

Digitized by Google

fenomeni naturali i mezzi più potenti per arrivare a rappresentarli in modo semplice e preciso.

Ad una così vasta coltura nel campo delle scienze fisiche e matematiche, ad un così intenso desiderio di sapere, non corrispondeva nel Morera che uno scarso interesse per le scienze che non fossero la sua. E ciò per un suo modo particolare di vedere che lo portava ad escludere, e quasi a temere, tutto ciò che non fosse coltura completa e strettamente scientifica. Nel suo discorso inaugurale del 1889 all'Università di Genova dopo aver ricordato un detto curioso del Tait " Schivate la scienza " popolare, essa è tanto più perniciosa, quanto più pretenziosi " sono quelli che la diffondono „, soggiunge: " Nella scienza chi " ha cognizioni salde e profonde, in un campo anche ristretto, " possiede una vera forza e all'uopo sa giovarsene; chi invece " ha solo cognizioni superficiali, anche molto estese ed appari- " scenti, possiede nulla, anzi spesso ha in sè un elemento di " debolezza, che lo sospinge alla vanità „.

Giudizio magnifico; che non deve però essere spinto all'eccesso, cioè fino a portarci ad una coltura esclusivista, che faccia trascurare tutto ciò che non è prodotto dal campo che noi coltiviamo. Oggi che la scienza domina e trasforma tutta la vita intellettuale e morale, è pur d'uopo che un cultore di scienza abbia un'idea, sia pure sommaria, ma chiara del movimento d'idee che anima i campi limitrofi al suo e dei risultati che in essi si raccolgono. E del resto il Morera aveva mente agile e versatile per afferrare ed apprezzare qualsiasi manifestazione intellettuale.

La sua vita dedicata per intero ad una alta idealità disinteressata, che ne assorbì ogni energia; le eccellenti qualità del suo carattere leale, rettissimo; la sua serenità nel giudicare uomini e cose; l'arguzia incisiva del suo conversare; l'estrema coscienziosità in ogni contingenza, non meno che il suo alto valore scientifico, lasciano in tutti quelli che lo conobbero, o gli furono amici, un indimenticabile ricordo. L'Accademia, l'Università, il paese nostro, possono scrivere il nome di Giacinto Morera fra quelli dei loro uomini migliori.

Digitized by Google

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI

I.

Giornale di Matematiche di G. Battaglini.

1. *Sul moto di un punto attratto da due centri fissi con la legge di Newton* (Vol. XVIII, 1880).

II.

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino.

1. *Sopra una nuova costruzione geometrica del teorema dell'addizione degli integrali ellittici* (Vol. XV, 1880).
2. *Sulla separazione delle variabili nelle equazioni del moto di un punto materiale su di una superficie* (Vol. XVI, 1881).
3. *Sulle proprietà invariantive del sistema di una forma lineare e di una forma bilineare alternata* (Vol. XVIII, 1883).
4. *Sul problema di Pfaff* (Vol. XVIII, 1883).
5. *Sulle equazioni generali per l'equilibrio dei sistemi continui a tre dimensioni* (Vol. XX, 1884).
6. *Sulla rappresentazione delle funzioni di una variabile complessa per mezzo di espressioni analitiche infinite* (Vol. XXI, 1886).
7. *Sul problema della corda vibrante* (Vol. XXIII, 1888).
8. *Sulla definizione di funzione di variabile complessa* (Vol. XXXVII, 1901)
9. *Sulle equazioni dinamiche di Lagrange* (Vol. XXVIII, 1901).
10. *I sistemi canonici di equazioni ai differenziali totali nella teoria dei gruppi di trasformazioni* (Vol. XXXVIII, 1903).
11. *Sull'attrazione di un ellissoide eterogeneo* (Vol. XXXIX, 1904).
12. *Complemento alla Nota precedente* (Id. id.).
13. *Sulle equazioni dinamiche di Hamilton* (Vol. XXXIX, 1904).
14. *Sull'attrazione degli strati ellissoidali e sulle funzioni armoniche ellissoidali* (Vol. XLI, 1906).
15. *Intorno all'equilibrio dei corpi elastici isotropi* (Vol. XLII, 1907).
16. *Francesco Siacci; Commemorazione* (Vol. XLIII, 1908).

III.

Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino.

1. *Sulla integrazione delle equazioni ai differenziali totali del secondo ordine* (S. II, T. XLII, 1902).
2. *Sulla attrazione degli ellissoidi e sulle funzioni armoniche ellissoidali* (Id., T. LV, 1905).

Digitized by Google

IV.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere.

1. *Sopra una formola fondamentale di Meccanica analitica* (S. II, Vol. XV, 1882).
2. *Il " Teorema fondamentale nella teoria delle equazioni armoniche del moto " del prof. Siacci* (Id. id.).
3. *Il metodo di Pfaff per l'integrazione delle equazioni a derivate parziali del 1° ordine* (Id., Vol. 16, 1883).
4. *Intorno alla risoluzione di certe equazioni modulari* (Id., Vol. XVIII, 1885).
5. *Sui sistemi di superficie e le loro traiettorie ortogonali* (Id., Vol. XIX, 1886).
6. *Un teorema fondamentale nella teoria delle funzioni di variabile complessa* (Id., Vol. XIX, 1886).
7. *Un piccolo contributo alla teoria delle forme quadratiche* (Id., Vol. XIX, 1886).
8. *Sulle derivate seconde della funzione potenziale di spazio* (Id., Vol. XX, 1887).
9. *Intorno alle derivate normali della funzione potenziale di superficie* (Id., id.).
10. *Intorno all'integrale di Cauchy* (Id., Vol. XXII, 1889).
11. *Intorno ai sistemi di equazioni a derivate parziali del 1° ordine in involuzione* (Id., Vol. XXXVI, 1903).

V.

Atti della R. Accademia dei Lincei.

1. *Sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili* (S. III, Vol. VII, 1883).
2. *Sui moti elicoidali dei fluidi* (S. IV, Vol. V, 1889).
3. *Sulle equazioni fondamentali della termodinamica* (Id., vol. III, 1891).
4. *Sulla capacità termica dei vapori* (Id., id.).
5. *Soluzione generale delle equazioni dell'equilibrio di un corpo continuo* (S. V, Vol. V, 1892).
6. *Appendice alla Nota precedente* (Id., id.).
7. *Un teorema fondamentale di Meccanica* (Id., Vol. II, 1893).
8. *Alcune considerazioni relative alla Nota del prof. Pizzetti: Sull'espressione della gravità alla superficie del geoide supposto ellissoidico* (Id., Vol. III, 1894).
9. *Stabilità delle configurazioni d'equilibrio di un liquido in un tubo capillare di rotazione attorno ad un asse verticale* (Id., Vol. XI, 1902).
10. *Sulla trasformazione delle equazioni differenziali di Hamilton* (Id., Vol. XII, 1903).
11. *Alcune considerazioni sulle funzioni armoniche ellissoidali* (Id., Vol. XV, 1906).
12. *Sulla funzione potenziale di un doppio strato ellissoidico* (Id., Vol. XVII, 1908).

VI.

Mathematische Annalen.

1. *Ueber einige Bildungsgesetze in der Theorie der Theilung und der Transformation der elliptischen Functionen* (Bd. XXV, 1885).
2. *Ueber die Integration der vollständige Differentiale* (Bd. XXVII, 1886).

Digitized by Google

VII.

Berichte über die Verhandlungen der K. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.

1. Zur Transformation und Theilung der elliptischen Functionen (Bd. XXXVII, 1885).

VIII.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.

1. *Sui sistemi di forze che ammettono la funzione potenziale* (T. V, 1891).
2. *Alcune considerazioni relative all'equazione differenziale* $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ (T. VII, 1893).
3. *Sopra una formola di calcolo integrale* (T. X, 1896).
4. *Sui polinomi di Legendre* (T. XI, 1897).

IX.

Rivista di Matematica di G. Peano.

1. *Osservazione relativa al resto nello sviluppo di Taylor* (Vol. II, 1892).
2. *Dimostrazione di una formola di calcolo integrale.*

X.

Il Nuovo Cimento.

1. *Sulla espressione analitica del principio di Huygens* (S. IV, Vol. II, 1895).
2. *Intorno alle oscillazioni elettriche* (S. V, Vol. III, 1902).
3. *Sulla teoria dell'ellissoide fluido in equilibrio di Jacobi (lettera al prof. Volterra)* (Id., Vol. XVI, 1908).

XI.

Giornale della Società di Letture e Conversazioni scientifiche di Genova.

1. *Sulla integrazione delle equazioni a derivate parziali del 1° ordine* (Anno X, 1887).

XII.

1. *L'insegnamento delle Scienze matematiche nelle Università italiane.* Discorso inaugurale per l'anno accademico 1888-89 nella R. Università di Genova.
2. *Lezioni di Meccanica razionale.* Litografia Paris, Torino, 1902.

Gli Accademici Segretari

Lorenzo Camerano.

Gaetano De Sanctis.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 1 (1/3)

Fig. 3 (1/3)

Fig. 2 (1/3)

Fig. 4 (1/3)

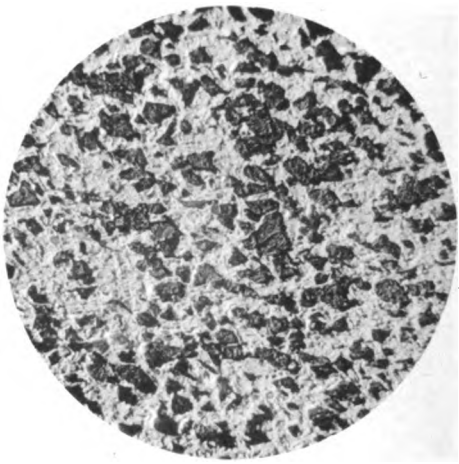
Digitized by Google

Digitized by Google

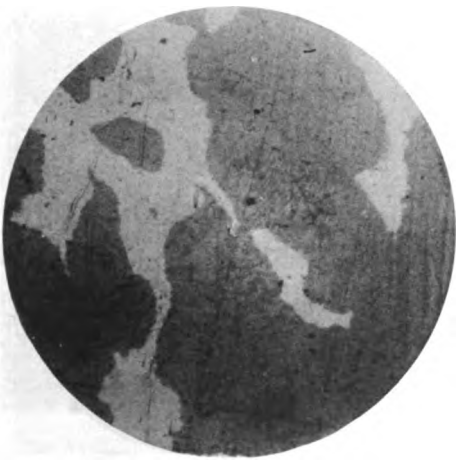
1

2

3



4



5

6

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

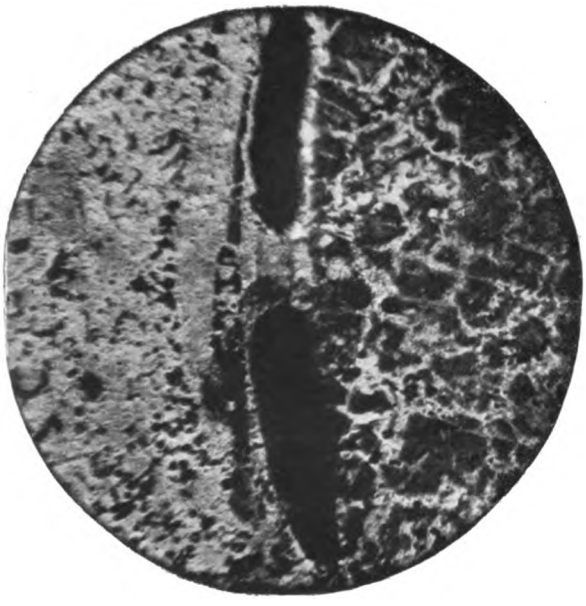


Fig. 6.

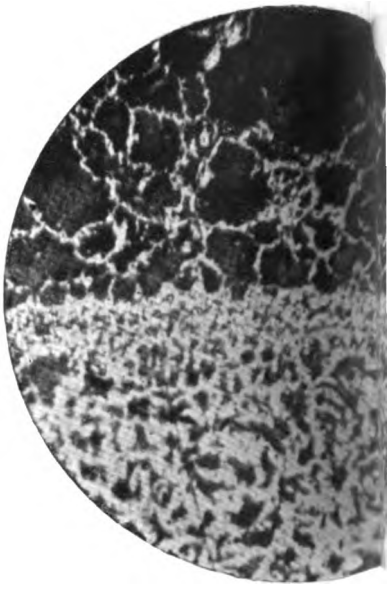


Fig. 5.

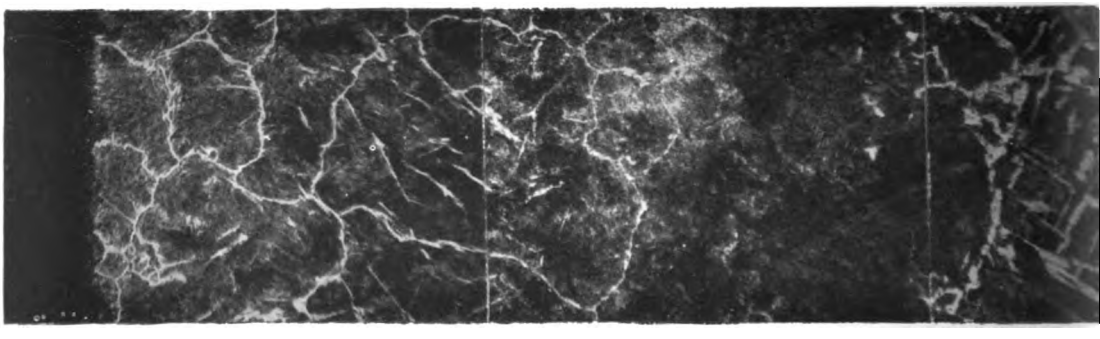
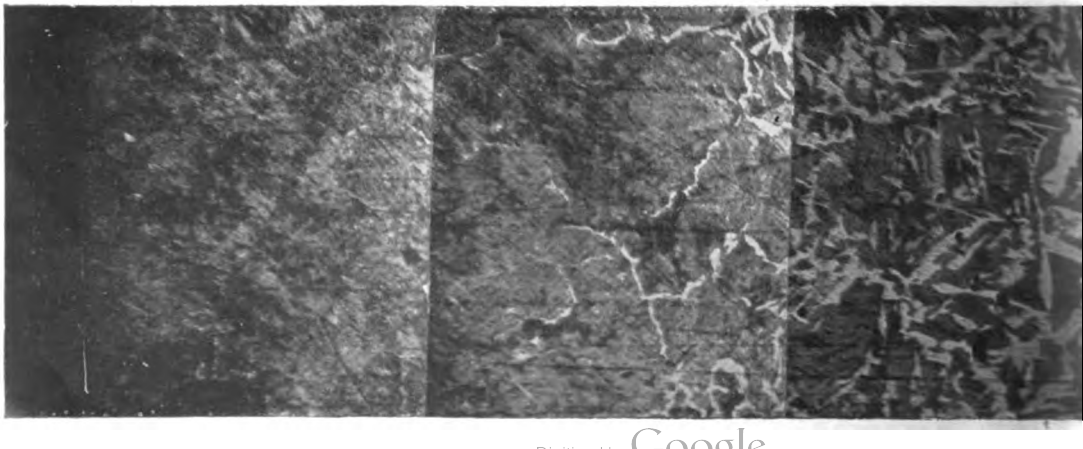


Fig. 7.



Digitized by Google

Fig. 8.

Fig. 3.

Fig. 2.

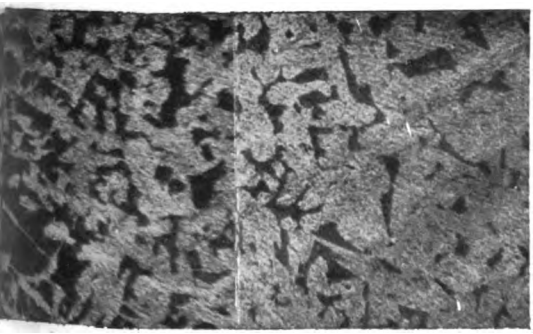
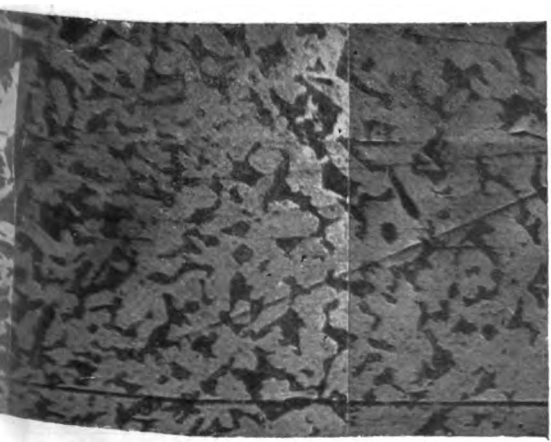


Fig. 1.



Digitized by Google

Fig. 4.

Digitized by Google

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 1° Maggio 1910.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: SALVADORI, SPEZIA, SEGRE, PEANO, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, MATTIROLO, GRASSI, FUSARI e PARONA, ff. di Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Scusano l'assenza: il Direttore della Classe NACCARI, il Segretario senatore CAMERANO ed i Soci FOÀ e SOMIGLIANA.

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° Socio G. GRASSI, *Raddoppiamento della frequenza di una corrente per mezzo di lampade a filo metallico*;

2° L. COLOMBA, *Sopra alcuni minerali dell'Alta Valle di Aosta*, dal Socio SPEZIA.

Il Socio GUIDI presenta una Memoria del sig. Ing. Gustavo COLONNETTI dal titolo: *I sistemi elastici continui trattati col metodo delle linee d'influenza*. Il Presidente incarica i Soci SEGRE e GUIDI di esaminarla e riferirne all'Accademia.

Il Segretario, a nome del Socio NACCARI, presenta una Memoria dei signori A. CAMPETTI e C. DELGROSSO: *Sull'equilibrio di coppie di liquidi parzialmente miscibili*. Il Presidente incarica dell'esame e della relazione i Soci NACCARI e GRASSI.

Digitized by Google

LETTURE

Raddoppiamento della frequenza di una corrente per mezzo di lampade a filo metallico.

Nota del Socio GUIDO GRASSI.

Descrivo un esperimento, che credo nuovo, per mostrare come si possa, data una corrente alternata, produrne un'altra di *frequenza doppia* con una semplice disposizione di circuiti, senza organi in moto.

Approfitto perciò della nota proprietà delle lampade metalliche di presentare una resistenza elettrica che cresce rapidamente coll'aumentare della temperatura. Se in un sistema di circuiti disposti a ponte di Wheatstone, uno dei lati del ponte contiene una lampada a filamento metallico, e si manda nel sistema una corrente alternata, la resistenza della lampada va continuamente oscillando intorno ad un valor medio. Ne segue che se il ponte è in equilibrio per questo valor medio, non lo è più appena la resistenza della lampada da questo valor medio si scosta; e siccome la oscillazione della resistenza compie un periodo intero ad ogni mezzo periodo della corrente, si ottiene nel ponte una corrente di frequenza doppia.

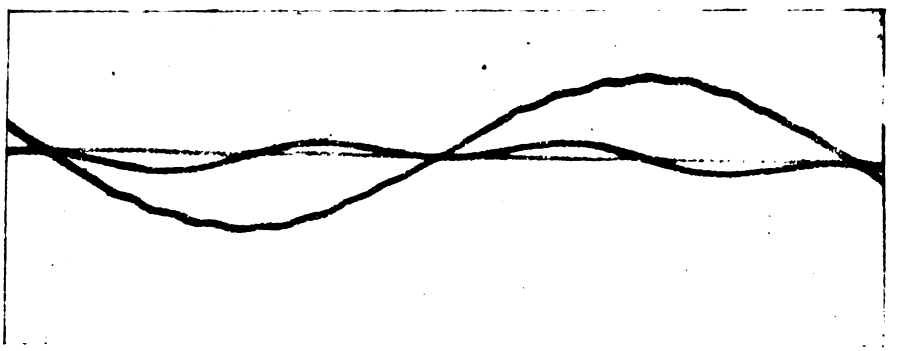
Per aumentare l'effetto conviene porre una lampada a filamento di carbone nel lato contiguo a quello che contiene la lampada metallica. Siccome la resistenza del carbone diminuisce col crescere della temperatura, con questa disposizione si sommano i due effetti. Anzi si può ancora rinforzare la oscillazione di frequenza doppia costituendo tutti i quattro lati del ponte con lampade ad incandescenza, due a filamento metallico e due a filamento di carbone, ponendo quelle dello stesso tipo nei lati opposti.

Ho ripetuto l'esperimento colle varie disposizioni ora descritte, e le previsioni furono pienamente confermate. Mi servii

Digitized by Google

di un doppio oscillografo, per mezzo del quale potevo rilevare la curva della tensione applicata, e la curva della corrente nel ponte. La figura è una delle fotografie eseguite colla disposizione a quattro lampade inserite nei quattro lati del ponte. La curva di periodo maggiore è quella corrispondente alla tensione applicata; l'altra è quella della corrente che passa nella diagonale del ponte.

Evidentemente bisogna che vi sia pure in qualche lato inserita una resistenza addizionale, variabile per mezzo di un corsoio, onde sia possibile regolare il ponte. Spostando il corsoio si osserva che la curva di doppia frequenza si deforma; la deformazione s'inverte se lo spostamento si fa in verso contrario; ma vi è una posizione media del corsoio alla quale cor-



risponde la curva di doppia frequenza perfettamente regolare, che dimostra la presenza nel circuito del ponte di una pura corrente alternata di frequenza doppia.

Quando, spostando il corsoio, si manifesta la deformazione, ciò significa che all'onda di doppia frequenza si sovrappone l'altra onda principale.

Nella figura si vede che all'onda di doppia frequenza è sovrapposta una leggera ondulazione di frequenza semplice; evidentemente perchè nel momento di prendere la fotografia il ponte si era leggermente squilibrato.

Riconosciuta per tal modo che l'onda di frequenza doppia prodotta dalle lampade metalliche è di tale intensità da produrre effetti così spiccati, volli fare anche la prova se fosse

Digitized by Google

possibile rilevarne la presenza direttamente in un circuito ordinario contenente lampade metalliche.

Bisogna ricordare a questo proposito, che se ad un'onda di data frequenza si sovrappone la prima armonica pari, cioè quella di frequenza doppia, l'onda risultante risulta dissimmetrica, e se l'armonica non è in fase coll'onda fondamentale, si ha una risultante in cui il *valor medio* del semiperiodo negativo è diverso dal valor medio del semiperiodo positivo.

Uno strumento, come un galvanometro ordinario ad ago magnetico, le cui indicazioni siano funzione del valor medio della corrente, dovrà dare un indizio della presenza dell'armonica di frequenza doppia, deviando nel senso del semiperiodo che ha il valor medio più grande.

Ho fatto la prova con un galvanometro ad equipaggio molto leggero, per evitare che funzionasse lo strumento come balistico, nel qual caso la sua deviazione sarebbe proporzionale alla quantità di elettricità e non alla intensità media della corrente; e allora non potrebbe rivelare la presenza dell'armonica pari, perchè le quantità di elettricità son sempre eguali nei due semi-periodi, malgrado la deformazione della curva.

Lo strumento adoperato era un galvanometro Siemens del tipo corazzato, perchè nel mio laboratorio non posso adoperare il tipo comune, a cagione delle forti perturbazioni prodotte dalle linee tramviarie. Posi questo galvanometro in derivazione su di una piccolissima resistenza messa in serie con una lampada metallica (lampada Z a tungsteno) alla quale potevo poi sostituire una resistenza ordinaria equivalente per ottenere nei due casi la stessa intensità di corrente. Alimentando il circuito colla corrente della rete municipale, il galvanometro dava sempre una deviazione permanente, dimostrando così la esistenza della seconda armonica, con spostamento di fase. Però la deviazione era molto maggiore nel caso che fosse inserita la lampada metallica. Nell'altro caso la seconda armonica doveva essere prodotta da altre lampade metalliche che si trovavano nella rete esterna.

Ripetei la prova producendo invece la corrente alternata per mezzo di un alternatore del vecchio tipo Siemens, con indotto senza nucleo di ferro, che, come è noto, dà una forza elettromotrice di forma quasi esattamente sinoidale. In questo

Digitized by Google

caso la deviazione permanente del galvanometro era piccolissima, se nel circuito era inserito un semplice reostato ordinario. Sostituendo a questo la lampada metallica si aveva una deviazione permanente circa 7 volte maggiore. Evidentemente la piccola deviazione osservata nel primo caso è da attribuirsi al filo metallico di cui è formato il reostato, poichè anch'esso subisce una oscillazione di temperatura e dà luogo allo stesso fenomeno, come la lampada metallica, sebbene in misura ridotta.

In ogni modo è degno di nota il fatto che si ottiene una vera corrente continua in un semplice circuito alimentato da una forza elettromotrice alternata.

Sopra alcuni minerali dell'alta Valle di Aosta.

Nota del Dr. LUIGI COLOMBA

(Con tre figure intercalate nel testo).

Esistono lungo i bordi del massiccio del Monte Bianco varî affioramenti di giacimenti metalliferi prevalentemente ricchi in galena; essi sono, specialmente per quanto riguarda quelli del versante meridionale, poco noti sia per le disagiate loro condizioni di giacitura sia per la loro piccola importanza. Questi giacimenti presentano però un discreto interesse mineralogico per il fatto che debbono indubbiamente avere relazioni genetiche molto strette col massiccio granitico col quale sono a contatto; inoltre hanno di caratteristico che mostrano talvolta differenze sensibili nella natura della loro ganga che in alcuni giacimenti è prevalentemente costituita da baritina ed in altri da fluorite.

Tale fatto si avvera pure in altri giacimenti galeniferi analoghi ai precedenti, come ad esempio in quelli che nelle Alpi Marittime orlano il massiccio granitico dell'Argentiera; in essi, invero, come già ho fatto notare (1), la ganga può essere baritifera o fluoritifera; però, mentre in questi si nota che la ganga fluoritifera è propria dei giacimenti più importanti, come sarebbero

(1) *Cenni preliminari sui minerali del Lausetto*, " Boll. della Soc. Geol. Ital. „ (1904), XXIII, p. 393.

Digitized by Google

quelli di Vinadio e di Vallauria, invece nei giacimenti che si hanno lungo la falda meridionale del massiccio del Monte Bianco, nel bacino di Courmayeur, si nota che la fluorite forma la ganga in quelli che, come avviene alla Tête Carrée sul ghiacciaio del Miage, sono in diretto contatto con la massa granitica, mentre invece in quelli che sono ad una certa distanza da detta massa, e questo avviene appunto pei giacimenti che, in immediata vicinanza di Courmayeur, si trovano alle falde del Mont Chétif e del Mont de la Saxe, la ganga è baritifera.

Queste differenze nella natura della ganga credo dipendano essenzialmente dal fatto che i giacimenti a ganga differente derivino da diverse fasi di mineralizzazione.

Invero, se si ammette che la presenza della fluorite sia indizio di una origine pneumatolitica e che invece la presenza della baritina od anche di calcite indichi una origine idrotermale, prodotta cioè da fenomeni di una energia meno forte, è logico che quei giacimenti che si formarono in maggior vicinanza delle masse intrusive, oppure si originarono nei primi periodi dell'intrusione e quindi assunsero uno sviluppo molto maggiore, abbiano la fluorite prevalente nella ganga, mentre negli altri, dipendenti da fenomeni più attenuati, prevarrebbe la baritina.

I minerali che si osservano nei giacimenti galeniferi del Monte Bianco non presentano generalmente caratteri molto interessanti; solo in alcuni casi, quando la ganga è a base di baritina, ho notato alcune associazioni di minerali che assumono una discreta importanza mineralogica: tale è il caso degli esemplari che intendo di descrivere nella presente nota e che provengono dai giacimenti del Mont de la Saxe.

Negli esemplari che ho esaminato i minerali più abbondanti sono la *galena* e la *baritina*; a questi si associano altre specie in quantità molto piccole e talvolta in sole traccie; sono esse la *blenda*, il *quarzo*, l'*albite*, il *gesso*, il *solfo*, la *cerussite* e la *piromorfite*, essendo queste due ultime da considerarsi puramente come prodotti di alterazione della galena.

Baritina. È in cristalli generalmente abbastanza limpidi, sebbene frequentemente si noti nel loro interno una specie di nebbia leggera dovuta alla presenza di minutissime inclusioni che, senza ordine alcuno, sono sparse nella loro massa, e

Digitized by Google

che rende molto minore la loro trasparenza, impedendo anche di compiere osservazioni ottiche. Mancano però in essi quelle zone bianche o translucide alternanti, così comuni in altri casi e che indicano la esistenza di fasi successive di accrescimento e di deposito.

Dal lato chimico la baritina di Courmayeur è perfettamente pura, il che si accorda con le numerose osservazioni analitiche compiute su altre baritine incolori e limpide, le quali appariscono in generale molto pure, come risulta dalle ricerche di Sandberger (1), di Grünling (2), di Zimanji (3), di Lincio (4) e da quelle compiute da me (5) sulla baritina di Brosso e Traversella.

In due differenti saggi compiuti su materiale scelto accuratamente ho potuto escludere la presenza del calcio e dello stronzio; per questi saggi, come già nel caso della baritina di Brosso e Traversella, ho adottato il metodo di Rose consistente nell'azione del carbonato ammonico sulla baritina finissimamente polverizzata.

Un'analisi quantitativa compiuta su materiale purissimo mi diede i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} BaO &= 65{,}63 \\ SO_3 &= 34{,}22 \\ &\overline{99{,}85} \end{aligned}$$

Per quanto riguarda le sostanze delle inclusioni contenute nei cristalli, la loro determinazione appariva molto difficile, specialmente perchè, quantunque abbastanza frequenti nell'interno dei cristalli, essendo esse sempre piccolissime, non potei compiere i saggi necessari che su quantità estremamente scarse di sostanza, anche per il fatto che il materiale di cui disponevo non era molto abbondante.

(1) *Untersuchungen über Erzgänge*. Wiesbaden, 1882.

(2) *Baryt des Binnenthal*, " Zeit. für Kryst. und Min. „ (1884), VIII, p. 243.

(3) *Baryt von Dobogò*, Id. id. (1890). XVII, p. 510.

(4) *Sulla baritina dello scavo Cungiaus (Monteponi)*, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino „ (1909), XLIV, seduta 23 maggio 1909.

(5) *Baritina di Brosso e Traversella*, " Atti della R. Acc. dei Lincei „, serie 5ª (1909), XVIII, 2° sem., p. 530.

Digitized by Google

Tuttavia, impiegando il metodo adottato nella già citata mia nota sulla baritina di Brosso e Traversella, potei compiere alcune ricerche microchimiche e spettroscopiche sulle sostanze volatili e su quelle solubili nell'acqua contenute nelle dette inclusioni, ed ebbi modo di stabilire la presenza esclusiva di minime tracce di cloruro e di solfato sodico in soluzione acquosa; infatti, mentre fra gli elementi volatili trovai esclusivamente l'acqua in quantità variabile fra 0,15 e 0,37 %, nelle sostanze fisse solubili nell'acqua ebbi semplicemente le reazioni del cloro, dell'acido solforico e del sodio, senza che potessi tanto in esse quanto negli elementi volatili riconoscere la presenza della più piccola traccia di acidi liberi.

Considerata dal lato cristallografico, sebbene la baritina di Courmayeur sia piuttosto ricca di forme, non ne presenta nessuna nuova, avendo nei suoi cristalli determinato con sicurezza le seguenti:

$$a\,(100),\ b\,(010),\ c\,(001),\ m\,(110),\ o\,(011),\ d\,(102),$$
$$z\,(111),\ r\,(112),\ f\,(113),\ q\,(114).$$

Queste forme, ad eccezione della (102) e della (100) che sembrano essere molto rare, sono quasi costantemente presenti in tutti i cristalli esaminati, avendone solo talvolta osservati alcuni corrispondenti alla combinazione molto più semplice (001), (010), (110), (011), (111).

Interessante è l'abito dei cristalli, poichè esso si allontana notevolmente da quelli che più comunemente si osservano nella baritina; essi infatti, sia per la frequenza delle piramidi e per la scarsità dei domi, sia per lo sviluppo sempre molto grande in altezza del prisma (110), assumono frequentemente un tipo piramidale che ricorda assai quello presentato in molti casi dai cristalli di anglesite e che è rappresentato dalla fig. 1ª, nella quale ho avuto cura di mantenere per le singole forme uno sviluppo equivalente a quello che nella massima parte dei cristalli essi presentano realmente.

Talvolta le facce della (011) sono assai più sviluppate ed allora i cristalli modificano il loro aspetto diventando prismatici parallelamente all'asse *ox*; notevole è il fatto che quando essi presentano un tale abito, mostrano sempre la combinazione più semplice a cui già ho accennato.

Digitized by Google

Per il loro aspetto questi cristalli, a parte la minore loro complicatezza di forme, hanno una grande rassomiglianza con quelli di Vialaz e Villefort, nel Lozère (Francia), studiati dal Prof. G. Struever (1) e che provengono pure da giacimenti galeniferi a contatto col granito.

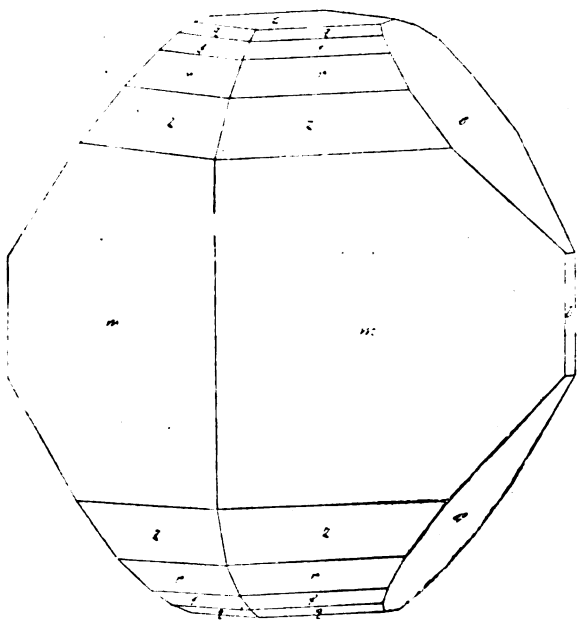


Fig. 1ª.

In causa delle frequenti imperfezioni fisiche offerte dalle facce dei cristalli da me esaminati non ho potuto ricavare misure estremamente esatte; in complesso però ho ottenuto una serie di misure discrete, avendo però avuto cura di usare al posto del pinacoide basale facce di sfaldatura secondo (001) che presentavano una nitidezza quasi perfetta.

Nella seguente tabella sono riportate le misure da me ottenute essendo i valori teorici quelli dati da Dana (2), partendo dalle costanti di Helmacker:

$$a : b : c :: 0{,}81520 : 1 : 1{,}31359.$$

(1) *Note mineralogiche*, " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino " (1871), VI, adunanza del 14 aprile 1871.

(2) *System of Mineralogy* (1892), p. 899.

Digitized by Google

Angoli misurati	Valori estremi	Valori medî	Valori teorici	Spigoli misurati
(111) . (001)	64°17′30″ - 64°19′	64°18′30″	64°19′	4
(111) . (111)	69°23′30″ - 69°25′	69°24′	69°25′	4
(112) . (001)	46°3′ - 46°7′	46°6′30″	46°6′	4
(113) . (001)	34°44′ - 34°53′	34°49′	34°43′	4
(114) . (001)	27°16′ - 27°25′	27°20′	27°28′	3
(102) . (001)	38°37′ - 38°49′	38°43′	38°51′28″	2
(011) . (001)	52°44′ - 52°49′	52°47′	52°43′	3
(110) . (1$\bar{1}$0)	78°17′ - 78°21′	78°20′	78°22′26″	6

Questi valori indicano come si debbano ammettere per la baritina di Courmayeur costanti cristallografiche molto prossime a quelle di Helmacker: tuttavia partendo dagli angoli (111).(001) e (111).(1$\bar{1}$1) si ottengono risultati un poco differenti, avendosi dai valori medi sopra riportati dei detti angoli:

$$a : b : c : : 0{,}8149 : 1 : 1{,}3129$$

pure molto vicini a quelli ricavati da Negri (1) per la baritina di Levico e da Lincio (2) per quella del Cungiaus, rispettivamente uguali ai seguenti:

Levico (Negri) $a : b : c : : 0{,}8140 : 1 : 1{,}13118$
Cungiaus (Lincio) $a : b : c : : 0{,}8142 : 1 : 1{,}3125$.

Non mancano casi di cristalli complessi che si possono considerare come risultanti dall'unione in accrescimento parallelo di più individui iso-orientati. Confrontando questi accresci-

(1) *Studio cristallografico della baritina di Lerico.* " Riv. di Crist. e Miner. Ital. „ (1889). V, p. 6.
(2) Loc. cit.

Digitized by Google

menti con quanto fu ripetutamente osservato in altre baritine, dando luogo al fenomeno indicato da Arzruni (1) col nome di *Häufung*, si notano sensibili differenze, tanto più se si ammette con Beckenkamp (2) che la *Häufung* rappresenti una geminazione che può avvenire secondo due forme corrispondenti ai simboli (2 1 18) e (0 300 1) e vicinali rispettivamente della (001) e della (010).

Infatti nella baritina di Courmayeur, forse in conseguenza dell'abito speciale presentato dai cristalli, le linee di sutura si notano generalmente sulle facce verticali, e sebbene talvolta esse siano serpeggianti in modo da giungere anche fino alla base, si tratta sempre di gruppi di cristalli i quali sarebbero cresciuti l'uno sopra l'altro, essendo teoricamente le superfici di contatto rappresentate da piani paralleli alle facce della base.

Ed è poi da notarsi come la disposizione dei singoli individui nei cristalli complessi non presenti mai deviazioni sensibili, essendo l'iso-orientamento esatto in modo quasi completo.

Degni di nota sono i caratteri che si osservano sulle facce dei cristalli da me esaminati, specialmente per quanto riguarda quelle di alcune forme.

Per ciò che si riferisce alla (110) si osserva sulle sue facce l'esistenza di fitte strie parallele alle intersezioni (110) . (111); queste strie non occupano però tutta l'ampiezza delle facce, essendo invece localizzate lungo gli spigoli d'intersezione di dette facce, o le une colle altre, oppure con quelle di altre forme, per modo che quando questo carattere si manifesta in modo regolare si osserva sulle facce della (110) una plaga centrale lucente e nitida orlata da un bordo fittamente striato. Quando poi sulle facce (110) appariscono suture dovute alla presenza di più individui in accrescimento parallelo le striature sono pure visibili lungo i bordi delle linee di sutura. Striature analoghe si hanno sulle facce delle piramidi; esse però sono meno frequenti, e ciò avviene specialmente sulle facce della (112) e della (110), mentre sono più abbondati su quelle della (114) e (111).

Molto interessanti sono i caratteri che presentano le facce basali; su queste, nella massima parte dei cristalli, si ha, come

(1) *Cölestin von Giershagen*, " Zeit. für Kryst. und Miner. „, XXV, p. 38.
(2) *Zwillingsbildung und von Molekulen Baryt.*, Id. id., XXXVI, p. 466.

Digitized by Google

è schematicamente rappresentato nella figura 2ª, una specie di fascia nitida e lucente (rappresentata nella detta figura colle lettere $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$) a contorno rombico ed orientata secondo gli assi dei cristalli stessi; essa presenta una larghezza, che, per quanto variabile, è sempre molto piccola rispetto all'ampiezza complessiva delle facce basali e corrisponde alle tracce, sulle dette facce basali, della (120), essendo l'angolo piano reale corrispondente all'asse *ox* uguale a 63°, mentre tale angolo è per la (120) teoricamente uguale a 63°3′.

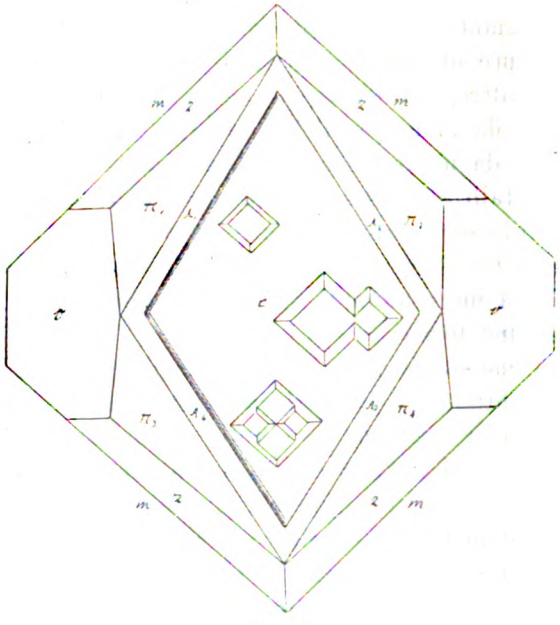


Fig. 2ª.

Questa faccia isola al centro una plaga rombica leggermente depressa, nella quale, oltre ad una serie di fini striature parallele alle facce della (110), si hanno rilievi più o meno marcati i quali appariscono come piccole piramidi rombiche, troncate superiormente da facce parallele alla (001) e le cui facce laterali corrispondono a quelle delle piramidi esistenti nei cristalli, essendo di esse solo presenti quelle che compariscono nei singoli cristalli; tale aspetto si nota nella detta figura in cui, essendo rappresentato un cristallo che mostra solo

Digitized by Google

la (111), questa sola comparisce nelle dette piramidi tronche. Queste poi sono più o meno regolarmente sviluppate ed anche, come si vede nella detta figura, possono essere riunite le une alle altre oppure sovrapposte come appare nel rilievo disegnato in basso nel quale è figurato un fatto che ho notato più di una volta: in esso infatti si osserva che il piano basale della piramide tronca è diviso in quattro settori di cui due alterni sono occupati da altre piccole piramidi tronche le quali esternamente non si differenziano per nulla da quella su cui appariscono.

Esternamente alla detta fascia $A_1 A_2$ ..... rimangono isolate quattro porzioni triangolari $\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4$, le quali appariscono leggermente inclinate sulla base assumendo l'aspetto di piramidi estremamente vicinali della base e contenute nella zona (120).(001) determinata dalla fascia lucente. Queste facce vicinali sono molto scabre ed osservate al microscopio mostrano che le scabrosità risultano dalla presenza di numerosi rilievi analoghi a quelli che occupano la plaga centrale, ma molto allungati nel senso di una coppia di facce parallele della (110) e colla differenza che in esse mancano le troncature parallele alla base. L'altezza di questi rilievi va decrescendo dall' interno verso l'esterno ed appunto a questo fatto è dovuta la leggera inclinazione che le facce π_1 ..... presentano rispetto alla base.

Questa inclinazione è variabile da cristallo a cristallo, ma si mantiene costante in ogni cristallo; essa è però sempre molto piccola per modo che solo raramente è determinabile al goniometro, essendo anche in questi casi di soli pochi minuti primi. La loro presenza ha però una certa importanza, perchè indica come nei cristalli esaminati si avesse una tendenza a sostituirsi all'iniziale zona di accrescimento (001).(110) l'altra zona (001).(120) e come tale cambiamento non abbia potuto progredire per il fatto che venne ad arrestarsi l'accrescimento dei cristalli.

Notevoli sono i caratteri presentati talvolta dalle facce della (011); su queste facce invero ho notato in certi casi la presenza di incavi triangolari aventi l'aspetto di piramidi negative e che in parte corrispondono, per quanto ebbi modo di constatare, a quelli già notati da altri autori e fra questi specialmente da Samojloff (1) e che vennero considerati come molto

(1) *Beiträge zur Krystallographie des Baryts*, " Bull. de la Soc. Imp. des Natur. de Moscou „ (1902), XVI, p. 105-249.

Digitized by Google

importanti per le questioni inerenti al supposto emimorfismo della baritina.

Gli incavi da me osservati hanno la forma di triangoli isosceli o scaleni, essendo però, tanto gli uni quanto gli altri, differenti non solo per le loro dimensioni, ma anche per le inclinazioni dei loro lati; sebbene poi, nella maggior parte dei casi, essi siano disposti con uno dei loro lati approssimativamente parallelo allo spigolo (001).(011), tuttavia questa disposizione non può considerarsi come assoluta, osservandosi talvolta incavi triangolari, geometricamente simili, i quali sono disposti diversamente sulle facce della (011).

Ne risulta quindi la possibilità di una tripla dissimetria; la prima dipendente dal fatto che i triangoli sono in parte isosceli ed in parte scaleni; la seconda dal fatto che, pur considerando separatamente quelli appartenenti all'uno od all'altro gruppo, essi sono frequentemente dissimili; la terza dal fatto che presentano differenti giaciture sulle facce della (011).

Ora questo complesso di dissimetrie male si accorda coll'ipotesi che gli incavi debbano considerarsi collegati con i caratteri strutturali dei cristalli esaminati, sia che si vogliano considerare come dipendenti da incompleto accrescimento oppure da fenomeni di soluzione; poichè anche nel caso in cui si volesse ammettere che la loro dissimetria dipenda dall'esistenza di un emimorfismo nella baritina, rimarrebbe impossibile, date le differenze di giacitura che presentano, di stabilire la direzione di questo emimorfismo.

Per il che non è da escludere che rappresentino puramente impronte di altri cristalli di baritina parzialmente incastrati in quelli esaminati e staccatisi posteriormente.

Albite. Disseminati fra i cristalli di baritina, e spesso come incastrati fra di essi, si hanno scarsi ed esili cristalli lamellari di albite; questi cristalli, che sono sempre limpidi ed incolori, considerati dal lato chimico, presentano la caratteristica di contenere piccole quantità di bario che non possono dipendere dalla presenza di inclusioni di baritina.

Invero dalle ricerche compiute su quest'albite disaggregandola con carbonato sodico potassico, ho potuto constatare che, riprendendo la massa fusa con acqua, in questa non eravi traccia

Digitized by Google

di acido solforico, il che invece si sarebbe dovuto avverare nel caso di piccole quantità di baritina associate all'albite. Si deve quindi ammettere che nei detti cristalli siano presenti piccole quantità del silicato della celsiana, oltre a quello dell'anortite rivelato dalle piccole tracce di calce pure presenti. Dai dati ottenuti da un'analisi quantitativa, giunsi alla seguente formola:

$$9Na_2Al_2Si_6O_{16} + (Ba, Ca)Al_2Si_2O_8$$

essendo il bario ed il calcio nel rapporto di 3 a 2; tale formola risulta dai dati qui sotto riportati, essendo quelli della colonna II i valori teorici richiesti per la soprascritta formola:

	I	II
SiO_2	66,25	66,52
Al_2O_3	20,45	20,19
BaO	1,84	1,81
CaO	0,49	0,44
Na_2O	(10,97)	11,04
	100,00	100,00

Considerata dal lato cristallografico questa albite apparisce molto povera di forme, avendo solo constatato la presenza delle seguenti:

$$c\,(001);\ b\,(010);\ m\,(110);\ M\,(110);\ f\,(130);\ z\,(\bar{1}30);$$
$$o\,(\bar{1}\bar{1}1);\ p\,(1\bar{1}1);\ n\,(021)$$

essendo le ultime due poco frequenti e sempre con facce del tutto lineari.

Questi cristalli mostrano però un certo interesse per l'abito speciale che presentano; infatti essi, ad eccezione di alcuni rari casi, oltre ad essere geminati secondo la legge dell'albite, lo sono pure rispetto all'asse *oz* considerato come asse di geminazione; vale a dire sono pure geminati secondo una delle due leggi nelle quali si scinde la geminazione di Karlsbad quando la si voglia applicare ai feldispati triclini.

Questo secondo tipo di geminazione si mostra in modo molto evidente, come si nota nella figura 3ª che rappresenta

Digitized by Google

appunto uno di questi tetrageminati corrispondente alla più semplice combinazione osservata. Come apparisce dalla detta figura i due gruppi bigeminati secondo la legge dell'albite sono completamente sviluppati ed è degno di nota il fatto che, tanto nell'uno quanto nell'altro, gli individui che si trovano nelle parti interne del gruppo tetrageminato hanno dimensioni ridottissime essendo rappresentati da sottili lamelle, fatto questo che non si osserva nei rari casi di cristalli in cui è solo presente la legge dell'albite, essendo in questi del tutto simmetrico e regolare lo sviluppo dei singoli individui semplici componenti.

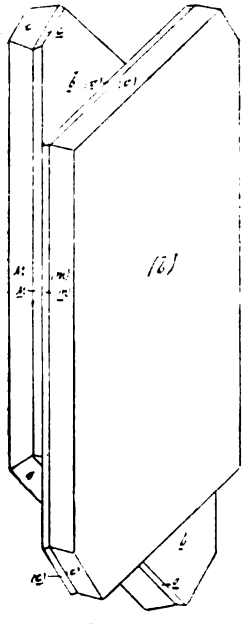


Fig. 3ª.

Le facce degli emiprismi verticali sono fittamente striate verticalmente, cosa comune nell'albite e che spesso non permette che si abbiano per le facce di detta zona misure goniometriche molto esatte; nel mio caso queste riuscirono per la detta zona assolutamente deficienti e solo mi permisero di determinare i simboli delle forme; tanto più che le cose erano anche complicate dal fatto che, analogamente a quanto molto frequentemente si nota nelle albiti geminate secondo (010), si riscontravano leggere perturbazioni nella giacitura delle facce appartenenti alla detta zona in ogni singolo gruppo bigeminato secondo la legge dell'albite.

Queste perturbazioni non parevano però trasmettersi dall'uno all'altro gruppo bigemino, per modo che potei in modo ben chiaro determinare l'esistenza della geminazione di Karlsbad, desumendola sia dal fatto che, all estremità libera dei cristalli, mentre nella parte anteriore dell'uno comparivano le facce della base comprese nell'angolo rientrante, invece nella parte anteriore dell'altro appariva l'angolo saliente determinato dalle facce della $(\bar{1}\bar{1}1)$, sia dal fatto che nei gruppi tetrageminati le facce della (010) si mantenevano perfettamente parallele, come pure si mantenevano perfettamente in zona le facce degli emiprismi verticali dei gruppi bigemini.

Digitized by Google

Discrete misure ottenni per le facce della (001), ($\bar{1}\bar{1}1$) e della (02$\bar{1}$) avendo ottenuto per esse i seguenti valori:

	Valori ottenuti	Valori teorici [Dana (1)]
001 . 110	69°21′ - 69°37′	69°10′
001 . 0$\bar{1}$0	93°46′	93°36′
001 . $\bar{1}\bar{1}$1	57°59′ - 58°10′	58°20′
$\bar{1}\bar{1}$1 . 0$\bar{1}$0	66°29′	66°18′
02$\bar{1}$. 001	46°29′	46°46′

In quanto alla *p* (111), in causa del minimo sviluppo delle sue facce, potei solo determinarla partendo dalla coppia di zone (111).(010) e (001).(110) in cui è contenuta.

Per quanto riguarda gli altri minerali credo sufficiente un breve cenno, visto che presentano un interesse mineralogico molto limitato.

Il **quarzo** si presenta in cristalli limpidi ed incolori che possono raggiungere al massimo la lunghezza di due centimetri; in essi, oltre alle comuni forme *z* (22$\bar{1}$), *r* (100), *m* (21$\bar{1}$), si osserva abbastanza frequentemente la *s* (412) e più raramente la *x* (4$\bar{1}\bar{2}$). Questi cristalli sono generalmente incastrati nella baritina, osservandosi però che anche le estremità incluse nella baritina appariscono del tutto complete, sebbene talvolta presentino tracce di perturbazioni nell'accrescimento, rese evidenti dall'essere le facce curve od irregolarmente sviluppate: in compenso presentano talvolta cristalli di baritina inclusi e, molto meno frequentemente, inclusioni di minutissimi cristalli di galena o di blenda.

Oltre a queste inclusioni sono frequentissime quelle liquide con libella, disposte secondo superfici piane che attraversano i cristalli con andamento approssimativamente parallelo alle facce della (100); queste inclusioni hanno nella massima parte dei

(1) *System of Mineralogy* (1892), p. 328.

Digitized by Google

casi la forma di cristalli negativi ma talvolta, per un progressivo arrotondamento degli spigoli, assumono una forma cilindrica, non essendo raro il caso di inclusioni che da una parte mostrano nettamente i loro spigoli mentre alla parte opposta hanno una forma quasi cilindrica.

La **galena** è in masse cristalline a sfaldatura cubica e talvolta mostra terminazioni cristalline essendo allora presenti le facce della *p* (100) e della *o* (111); spesso questi cristalli appariscono ricoperti da patine cristalline, costituite da individui cristallini assolutamente indeterminabili di *cerussite* o di *piromorfite*, facilmente riconoscibili per le differenze di tinta che presentano.

La **blenda** apparisce in laminette o scagliette che hanno tutta l'apparenza di frammenti di cristalli separatisi da individui maggiori in seguito ad una frantumazione; tale fatto unito all'altro che anche la galena apparisce come cementata dalla baritina lascia supporre che i campioni da me raccolti non rappresentino già il vero modo di presentarsi del giacimento, ma derivino da alcuni punti in cui i minerali del giacimento siano stati rimaneggiati e poscia ricementati dalla baritina.

In quanto ai rari cristalli di **zolfo** e di **gesso** che talvolta si osservano qua e là sono certamente dipendenti da fenomeni secondari; tanto in un caso quanto nell'altro si tratta sempre di individui di dimensioni talmente piccole da rendersi impossibile qualsiasi tentativo di determinare le forme che entrano a costituirli.

Istituto Mineralogico della R. Università di Torino.
20 aprile 1910.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

Digitized by Google

CLASSI UNITE

Adunanza del 15 Maggio 1910.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: NACCARI, Direttore della Classe, MOSSO, SPEZIA, SEGRE, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA, MATTIROLO, GRASSI, SOMIGLIANA, FUSARI e CAMERANO Segretario.

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: CARLE, PIZZI, CHIRONI, RUFFINI, BRONDI e SFORZA.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente a Classi Unite. — Scusano la loro assenza i Soci RENIER e D'ERCOLE.

Il Presidente comunica: 1° che la presidenza ha accolto favorevolmente l'invito del Sindaco ROSSI di far parte del Comitato per le onoranze a Camillo Cavour; 2° una lettera del Socio NACCARI il quale ringrazia l'Accademia della nomina a Vice-presidente, ma dichiara che per ragioni di salute non può accettare tale carica.

Il Presidente dice che già ha fatto vive preghiere al professore NACCARI perchè voglia accettare la carica, ma senza

Digitized by Google

frutto, rinnova le preghiere stesse. Il Socio Naccari ringrazia, ma insiste nel suo divisamento.

L'Accademia procede quindi alla elezione del Vice-presidente e riesce eletto il Socio conte Tommaso Salvadori, salvo l'approvazione Sovrana.

Gli Accademici Segretari
Lorenzo Camerano.
Gaetano De Sanctis.

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 15 Maggio 1910.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: NACCARI, Direttore della Classe, MOSSO, SPEZIA, SEGRE, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA, MATTIROLO, GRASSI, SOMIGLIANA, FUSARI e CAMERANO Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Presidente comunica: 1° l'adesione dell'Accademia alle onoranze al Prof. Guglielmo KOERNER di Milano; 2° la morte del Senatore Stanislao CANNIZZARO Socio nazionale non residente della nostra Accademia. La presidenza ha inviato vive condoglianze alla famiglia dell'illustre e compianto consocio e ha incaricato il Vice-presidente Sua Ecc. BOSELLI di rappresentarla ai funerali.

Il Socio FILETI pronunzia brevi ma calde e sentite parole di commemorazione intorno a Stanislao CANNIZZARO, una delle maggiori glorie scientifiche italiane. Le parole del Socio FILETI verranno inserite negli *Atti*.

Viene presentata per l'inserzione negli *Atti* la nota seguente: *D. Bernoulli ed A. Avogadro e la teoria cinetica dei gas*, del Socio GUARESCHI.

Il Socio NACCARI, anche a nome del Socio GRASSI, legge la relazione intorno alla Memoria del Dr. A. CAMPETTI e del

Digitized by Google

Dr. C. Delgrosso, intitolata: *Sull' equilibrio di coppie di liquidi parzialmente miscibili.* La relazione favorevole è approvata all'unanimità; con votazione segreta la Classe delibera la stampa della Memoria nei volumi delle *Memorie* accademiche.

Il Socio Guidi, anche a nome del Socio Segre, legge la relazione sulla Memoria dell'Ing. G. Colonnetti intitolata: *I sistemi elastici continui trattati col metodo delle linee d'influenza.* La relazione favorevole è approvata all'unanimità, e così pure con votazione segreta la stampa della Memoria nei volumi accademici.

Il Socio Fusari presenta per la stampa nei volumi accademici il lavoro del Dr. A. Civalleri intitolato: *Sullo sviluppo della Guaina midollare nelle fibre nervose centrali.* Il Presidente delega i Soci Fusari e Camerano per riferire intorno a detta Memoria.

Raccoltasi poscia la Classe in seduta privata procede alla elezione di Soci, e riescono eletti i seguenti signori:

1° A Socio nazionale residente:

Prof. Luigi Balbiano del R. Politecnico di Torino.

Salvo l'approvazione Sovrana.

2° A Soci stranieri:

Prof. Massimiliano Noether dell'Università di Erlangen;

Prof. Adolfo v. Baeyer dell'Università di München;

Prof. John Joseph Thomson dell'Università di Cambridge;

Prof. Federico Edoardo Suess dell'I. R. Università di Vienna.

Salvo l'approvazione Sovrana.

3° A Soci corrispondenti:

I Sezione, *Matematiche pure*:

Prof. Federico Enriques Ordinario di Geometria proiettiva e descrittiva dell'Università di Bologna;

Digitized by Google

Prof. Gio. Batt. Guccia Ordinario di Geometria superiore nell'Università di Palermo.

II Sezione, *Matematiche applicate, Astronomia e Scienza dell'ingegnere civile e militare*:

Dott. Vincenzo Cerulli Direttore dell'Osservatorio Collurania, Teramo;

Prof. Sir Giorgio Howard Darwin di Astronomia al Trinity College, Cambridge;

Prof. Valentino Boussinesq di Calcolo delle probabilità e di Fisica matematica nell'Università di Parigi;

Prof. Tullio Levi-Civita Ordinario di Meccanica razionale nella R. Università di Padova;

Prof. Ernesto Cavalli di Meccanica generale nella R. Scuola Superiore politecnica di Napoli.

III Sezione, *Fisica generale e sperimentale*:

Prof. Angelo Battelli Ordinario di Fisica sperimentale della Università di Pisa;

Prof. Antonio Garbasso di Fisica sperimentale dell'Università di Genova;

Prof. Carlo Neumann di Matematica nell'Università di Lipsia;

Prof. P. Zeemann di Fisica nell'Università di Amsterdam;

Prof. Michele Cantone Ordinario di Fisica sperimentale dell'Università di Napoli.

IV Sezione, *Chimica generale ed applicata*:

Prof. Albin Haller di Chimica organica nell'Univ. di Parigi;

Prof. Richard Willstätter di Chimica generale nell'Università di Zürich;

Prof. Carlo Engler di Chimica nella Scuola superiore tecnica di Karlsruhe;

Prof. Ernesto v. Meyer di Chimica organica nella R. Scuola Tecnica superiore in Dresda;

Digitized by Google

V Sezione, *Mineralogia, Geologia e Paleontologia*:

Prof. Alfredo Lacroix di Mineralogia al Museo di Storia naturale di Parigi;

Prof. Wilfrid Carlo Kilian di Mineralogia e Geologia nell'Università di Grenoble.

VI Sezione, *Botanica e Fisiologia vegetale*:

Prof. Pasquale Baccarini Ordinario di Botanica nell'Istituto di Studi superiori in Firenze;

Prof. Luigi Mangin di Botanica al Museo di Storia naturale di Parigi.

VII Sezione, *Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata*:

Prof. Santiago Ramon y Cajal di Istologia e Patologia dell'Università di Madrid;

Dr. Metchnikoff Vice-Direttore dell'Istituto Pasteur in Parigi;

Prof. Albrecht Kossel di Fisiologia nell'Università di Heidelberg;

Prof. Paolo Ehrlich Direttore dell'Istituto sperimentale di terapia in Frankfurt a. M.

Digitized by Google

LETTURE

STANISLAO CANNIZZARO

Parole commemorative lette nell'Adunanza del 15 maggio 1910
dal Socio MICHELE FILETI.

Non è una vera e propria commemorazione che io mi accingo a fare di Stanislao CANNIZZARO, perchè non avrei avuto nemmeno il tempo di raccogliere il materiale necessario; ma per l'affetto reverente che a Lui mi legava sin dai miei venti anni e che mi legherà sempre alla sua memoria, non voglio lasciar passare questa adunanza, la prima dopo la sua morte, senza rammentarne, sia pur brevemente, le somme benemerenze verso la scienza.

Stanislao Cannizzaro nacque a Palermo il 13 luglio 1826. Studiò prima medicina e poi chimica a Pisa, col Piria, del quale fu in seguito assistente. Nel 1845 pubblicò qualche memoria su argomenti di medicina; il primo suo lavoro di chimica riguarda la scoperta della cianamide, fatta assieme a Cloëz. Nel 1853, con una reazione che porta il suo nome, scoprì gli alcooli aromatici, e sul primo termine di essi, cioè sull'alcool benzoico, pubblicò in quell'anno e negli anni successivi importanti memorie.

Io non analizzerò il centinaio circa di pubblicazioni del Cannizzaro, una gran parte delle quali sono ricerche di chimica organica, specialmente sul gruppo della santonina; mi limiterò soltanto a mettere in rilievo l'influenza che Egli ebbe sullo sviluppo della teoria atomica e molecolare, e che si esercitò principalmente per mezzo di un opuscolo pubblicato nel 1858 col titolo di *Sunto di un corso di filosofia chimica fatto nella R. Uni-*

Digitized by Google

versità di Genova: quello scritto di poche pagine valse infatti a togliere la confusione e l'incertezza che, tra il 1850 e il 1860, dominavano nel sistema di pesi atomici e di notazione chimica, e che il Lothar Meyer descrive maestrevolmente nella nota all'edizione tedesca dell'opuscolo del Cannizzaro, pubblicata nella raccolta dei classici delle scienze esatte edita dall'Ostwald.

Il Cannizzaro diede pel primo la spiegazione delle densità di vapore anomale fondandosi sul fenomeno della dissociazione, ammettendo cioè, come fu poi dimostrato sperimentalmente da altri chimici, che quei vapori non appartengono alle sostanze inalterate, ma ai prodotti della loro decomposizione, ed arrivando così alla conseguenza che le densità anomale dipendono da uno stato anomalo del vapore e non da insufficienza o fallacia della regola di Avogadro. Inoltre il Cannizzaro propose di raddoppiare i pesi atomici di un gran numero di metalli per metterli in armonia colle leggi di Dulong e Petit e di Avogadro: considerò quindi questi metalli come bivalenti e i loro idrati come corrispondenti ai glicoli scoperti in quel tempo da Wurtz, colmando così la lacuna allora esistente tra gli idrati dei metalli monovalenti, come l'idrato potassico, che corrispondono agli alcooli monovalenti, e gli idrati dei metalli trivalenti, come l'idrato ferrico, che corrispondono alla glicerina. In tal modo, mentre eliminò ogni ostacolo all'accettazione della teoria di Avogadro da parte di tutti i chimici e alla sua applicazione generale, dimostrò l'accordo tra i pesi atomici ai quali da essa si giungeva con quelli dedotti dai calori specifici e dall'isomorfismo e, presentando il nuovo sistema di pesi atomici, rese possibile o più facile a Mendeléeff di scoprire la legge periodica degli elementi.

Grandissima fu dunque l'influenza che l'opuscolo del Cannizzaro esercitò sulle teorie chimiche le quali, in quel periodo di tempo, si dibattevano tra dubbi, incertezze e lotte vivissime. Il Naquet scrive: " Non ho capito definitivamente la teoria ato-
" mica, che dopo averla studiata nell'opera così semplice e lu-
" cida pubblicata dal Cannizzaro ,. Il Lothar Meyer, dopo di aver parlato del congresso di Karlsruhe del 1860, dice: " Dopo
" la chiusura del congresso, l'amico Angelo Pavesi distribuì,
" per incarico dell'autore, un piccolo e modesto scritto, che era
" il *Sunto di un corso ecc.* pubblicato alcuni anni prima, ma

Digitized by Google

" poco conosciuto. Anch'io ne ebbi un esemplare, che misi in " tasca per leggere durante il viaggio di ritorno. Lo lessi ripe- " tutamente, anche a casa, e fui sorpreso della luce che l'opu- " scoletto diffondeva sulle più importanti questioni controverse. " La benda mi cadde allora dagli occhi, i dubbi si dileguarono " e al loro posto subentrò il senso della più placida certezza. " Se qualche anno più tardi io ho potuto contribuire (1) a di- " lucidare alquanto lo stato delle cose, ciò è dovuto in gran " parte allo scritto del Cannizzaro „.

Dopo questo giudizio, merita di essere riportato ciò che il Cannizzaro, nella sua modestia, dice del suo opuscolo. Egli scrive anzitutto che la confusione allora dominante era il suo tormento, tutti gli anni, quando cominciava le lezioni, e compativa i suoi studenti perchè non doveano capir nulla del vero valore delle formole; poi continua: " Di tanta ed insperata fortuna del mio " modesto opuscolo, io non mi attribuisco altro merito che quello " del maestro di scuola, che pone il massimo zelo nel suo inse- " gnamento. Se non fossi stato tormentato e spinto dal vivo " desiderio di comunicare ai miei allievi chiari i concetti fon- " damentali della scienza, io non avrei rivolto l'attenzione e " l'intenso studio a quell'importante argomento della chimica " generale che svolsi nel mio Sunto „.

Stanislao Cannizzaro fu patriotta ardentissimo, e prese parte alla rivoluzione siciliana del 1848. Fu membro della Camera dei Comuni del Parlamento siciliano. Fu professore successivamente nell'Istituto tecnico di Alessandria, nell'Università di Genova, in quella di Palermo e, dal 1871, in quella di Roma. Dal 3 luglio 1864 fu Socio nazionale non residente della nostra Accademia; appartenne anche a molte altre Accademie e Società scientifiche. Nel 1871 fu nominato senatore, ma non prese mai parte attiva alla vita politica. Nel 1872 lesse il discorso Faraday alla Società chimica di Londra. Nel 1891 ebbe, dalla Società reale di Londra, la grande medaglia Copley pel contributo da Lui portato alla filosofia chimica.

Nel 1896 si festeggiò il 70° anniversario della sua nascita; la festa assunse l'importanza di un vero plebiscito da parte

(1) Col trattato: *Die modernen Theorien der Chemie.*

Digitized by Google

degli scienziati di tutto il mondo, per gl'innumerevoli attestati di omaggio, di stima e di ammirazione che il Cannizzaro ricevette in quella occasione. Mi piace ricordare qui l'indirizzo della Società chimica di Londra, nel quale, tra l'altro, è detto: " Come uno dei fondatori della nuova chimica, il vostro nome " vivrà negli annali della nostra scienza, come quello di un " uomo che è tenuto nel più alto onore e nella più alta stima " — un nome degno di essere unito a quelli dei vostri grandi " connazionali, Galileo, Torricelli, Volta e Galvani „.

Fu un insegnante esemplare: grazie alla lucidità della mente ed all'acutezza e prontezza dell'ingegno, esponeva ai suoi allievi in modo chiarissimo i concetti più astrusi. Zelantissimo nell'adempimento dei suoi obblighi, il Cannizzaro, malgrado la sua tarda età, fece lezione sino a qualche mese prima di morire. Si spense il 10 di questo mese, lasciando nella scienza una traccia luminosa e perenne del suo passaggio.

Digitized by Google

Daniele Bernoulli ed Amedeo Avogadro e la teoria cinetica dei gas.

Nota del Socio ICILIO GUARESCHI.

Tutto ciò che riguarda la storia della costituzione dei gas è della massima importanza. Io ho voluto in questo mio lavoro associare i due nomi illustri di Daniele Bernoulli e di Amedeo Avogadro non tanto perchè furono i primi ad emettere idee chiare intorno allo stato aeriforme della materia, quanto perchè ora qualche fisico e qualche chimico vorrebbe attribuire il merito della legge di Avogadro, non più all'Ampère come si fece in passato, ma bensì al Bernoulli. È bene, secondo me, dimostrare subito erronea anche questa credenza prima che si diffonda; perchè allora meno facile sarebbe sradicare l'errore.

Daniele Bernoulli nella sua *Hydrodynamica* (1) espose una teoria del movimento delle particelle dei gas che sviluppata da Krönig (2) e da Clausius (3) nel 1856-1857, fu la fonte della attuale teoria cinetica dei gas. Poco dopo conosciute le memorie di Krönig e di Clausius, il Poggendorff pubblicò nei suoi *Annalen* (4) una nota: *Daniel Bernoulli's Ansicht über die Constitution der Gaze*; in cui riproduce tradotte alcune pagine della *Hydrodynamicæ sectio decima*: *De affectionibus atque motibus fluidorum elasticorum praecipue autem aëris*. Senza che perciò intendesse di diminuire i meriti delle ricerche di Krönig e di Clausius. Ed io credo utile, a schiarimento di quanto dirò in seguito, di riprodurre tradotte

(1) D. Bernoulli, *Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum Commentarii*. Argentorati, 1738, Sectio decima, pag. 200.

(2) " Pogg. Ann. „, 1856, t. 99, p. 315-322; " A. Ch. „ (3), 1857, t. L, p. 491-497.

(3) " Pogg. Ann. „, 1857, t. 100, p. 353; " A. Ch. „ (3), 1857, t. L, p. 497-507.

(4) " Pogg. Ann. „, 1859, t. 107, p. 490-494.

Digitized by Google

appunto queste prime pagine della antica e poco conosciuta teoria del Bernoulli:

" *Parte decima dell'idrodinamica. Delle proprietà e dei movimenti dei fluidi elastici, specialmente dell'aria* ".

§ 1. Sul punto di studiare i fluidi elastici, sarà lecito a noi di attribuire ai medesimi una natura siffatta che convenga a tutte le qualità finora conosciute, onde per tal modo si dia adito ad investigarne le altre proprietà non ancora ben note.

Le principali proprietà dei fluidi elastici consistono in ciò: 1° che sono pesanti; 2° che si espandono in ogni direzione, ove non ne siano trattenuti; 3° che possono essere vieppiù compressi, successivamente, col crescere delle forze comprimenti. Di siffatta natura è l'aria, alla quale si rivolgono ora in modo speciale i nostri studi.

§ 2. Supponi un vaso cilindrico posto verticalmente *ACDB* (fig. *A*), con un coperchio mobile *EF*, su cui poggia il peso *P*. Contenga la cavità *ECDF* dei corpuscoli piccolissimi (*corpuscula minima*) agitati qua e là da un movimento rapidissimo. In questo modo i corpuscoli, urtando contro il coperchio *EF* e sorreggendolo coi loro urti costantemente ripetuti, compongono un fluido elastico che si dilata col togliere o diminuire il peso *P*, e si condensa coll'aumentarlo, gravitando sul fondo orizzontale *CD* non altrimenti che se fosse privo di qualsiasi forza elastica; imperocchè i corpuscoli, siano in quiete o in moto, non cambiano di peso, di guisa che il fondo sorregge tanto il peso quanto l'elasticità del fluido. Si sostituirà dunque all'aria un fluido tale che corrisponda alle principali proprietà dei fluidi elastici, e noi rintracceremo così altre qualità già scoperte nell'aria e altre più ampiamente ne illustreremo, non ancora a sufficienza esaminate.

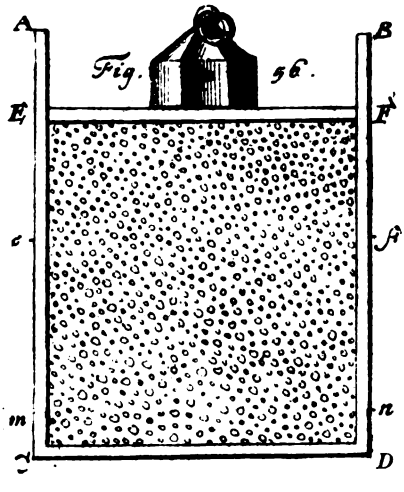


Fig. 56.

§ 3. Considereremo come infiniti di numero i corpuscoli inclusi nella cavità del cilindro e, con l'occupare lo spazio *ECDF*, diremo che esse formano l'aria naturale, alla cui misura debbono riferirsi tutte le

Digitized by Google

cose; e così il peso P che trattiene il coperchio nei punti EF non differisce dalla pressione dell'atmosfera sovrastante, la quale perciò, in seguito, designeremo per P.

Notisi che questa pressione non è punto uguale al peso assoluto del cilindro verticale di aria sovrastante al coperchio EF nell'atmosfera, ciò che gli autori affermarono fin qui erroneamente; bensì questa pressione è uguale alla quarta proporzionale alla superficie della terra, alla grandezza del coperchio EF ed al peso di tutta l'atmosfera sulla superficie della terra.

§ 4. Cerchisi ora il peso π che valga a condensare nello spazio $eCDf$ l'aria $ECDF$, supposta uniforme la velocità delle particelle in ambedue le arie, cioè nella naturale e nella condensata; sia $EC = 1$ e $eC = s$. Quando il coperchio EF viene trasportato in ef, il fluido sopporta uno sforzo maggiore, in due modi: 1° perchè il numero delle particelle, in ragione dello spazio nel quale sono racchiuse, è ora maggiore; 2° perchè ciascuna particella ripete più frequentemente gli urti. Per calcolare più esattamente l'aumento dipendente dalla prima causa, considereremo le particelle come in quiete e faremo $= n$ il numero di quelle contigue al coperchio nella posizione EF, ed allora per la posizione del coperchio in ef il numero analogo sarà $= n : \left(\frac{eC}{EC}\right)^{\frac{2}{3}}$. ossia $= n : s^{\frac{2}{3}}$.

Notisi che noi non consideriamo il fluido più condensato nella parte inferiore che nella superiore, quale è veramente, essendo il peso P pressochè infinitamente maggiore del peso proprio del fluido. Ne segue evidentemente che, sotto quest'aspetto, le forze del fluido stanno come le quantità n e $n : s^{\frac{2}{3}}$, cioè come $s^{\frac{2}{3}}$ sta ad 1.

Per quanto riguarda l'aumento proveniente dalla seconda causa, lo si ritrova esaminando il moto delle particelle, i cui urti risultano riprodotti tanto frequentemente, quanto più le particelle sono situate vicino le une alle altre; in altre parole, il numero degli urti sarà in relazione reciproca alle distanze medie tra le superfici delle particelle; e queste distanze medie si determineranno così.

Supporremo che le particelle siano sferiche; chiameremo D la distanza media tra i centri dei globuli, giusta il posto del coperchio EF, e designeremo il diametro dei globuli con d; così vi sarà una distanza media tra le superfici dei globuli $= D - d$. È quindi manifesto che, nella posizione ef del coperchio, vi sarà una distanza media tra i centri dei globuli $= D\sqrt[3]{s}$, e perciò una distanza media tra la superficie dei globuli $= D\sqrt[3]{s} - d$. Ond'è che, rispetto alla seconda causa, la forza dell'aria na-

Digitized by Google

turale $ECDF$ starà alla forza dell'aria compressa $eCDf$ come $\frac{1}{D-d}$ sta a $\frac{1}{D\sqrt[3]{s}-d}$, ossia come $D\sqrt[3]{s}-d$ sta a $D-d$.

Riunite ambedue le cause, le forze predette staranno come $s^{\frac{2}{3}} \times (D\sqrt[3]{s}-d)$ a $D-d$.

Al rapporto tra D e d possiamo sostituirne un altro più intelligibile, ove cioè si supponga che il coperchio EF, compresso da un peso infinito, discenda fino al punto mn, nel quale le particelle tutte si toccano. Chiamisi m la linea mC; avremo che D sta a d come 1 sta a $\sqrt[3]{m}$, e sostituendo questo rapporto, le forze dell'aria naturale $ECDF$ e dell'aria compressa $eCDf$ staranno fra loro come $s^{\frac{2}{3}} \times (\sqrt[3]{s}-\sqrt[3]{m})$ sta ad $1-\sqrt[3]{m}$, ossia come $s-\sqrt[3]{mss}$ sta ad $1-\sqrt[3]{m}$. Si ha adunque: $\pi = \frac{1-\sqrt[3]{m}}{s-\sqrt[3]{mss}} \times P$.

§ 5. Da tutti i fenomeni noi possiamo arguire che l'aria naturale si può condensare di molto e ridurre in uno spazietto, piccolo pressochè all'infinito; onde facendo $m=0$, si ha $\pi = \frac{P}{s}$, di guisa che i pesi comprimenti sono quasi in ragione inversa degli spazi che occupa l'aria variamente compressa; il che confermarono svariati esperimenti. E questa regola può certo tenersi con sicurezza per l'aria più rarefatta della naturale; se poi possa parimenti tenersi per l'aria molto più densa, ancora non l'ho bastevolmente constatato, imperocchè finora gli esperimenti non furono condotti con quella diligenza che qui si richiede. E di un solo esperimento è d'uopo per definire il valore della lettera m, ma vuolsi condurlo con la massima cura e inoltre con l'aria violentemente compressa, conservando inalterato il grado di calore nell'aria allorchè la si comprime.

§ 6. Frattanto l'elasticità dell'aria non solo sarà aumentata dalla condensazione, ma eziandio dall'accresciuto calore, e poichè consta che il calore si distende dappertutto col crescere del movimento interno delle particelle, ne segue che l'aumentata elasticità dell'aria invariata di spazio imprime un moto più intenso nelle particelle dell'aria; il che corrisponde esattamente alla nostra ipotesi, imperocchè è manifesto che a trattenere l'aria nei limiti $ECDF$, richiedesi un peso tanto maggiore quanto maggiore è la velocità onde sono animate le particelle dell'aria. Anzi non è difficile il vedere che il peso P seguirà il rapporto duplicato di questa velocità, essendochè per l'aumentata velocità aumenti tanto

Digitized by Google

il numero degli urti, quanto la loro intensità; l'uno e l'altra, separatamente, proporzionali al peso P.

Qualora adunque si dica v la velocità delle particelle dell'aria, il peso che essa dovrà sostenere nella posizione EF del coperchio sarà $= vvP$ e nella posizione ef, $= \frac{1-\sqrt[3]{m}}{s-\sqrt[3]{mss}} \times vvP$, e approssimativamente $= \frac{vvP}{s}$, perchè, come vedemmo, la quantità m è assai esigua in rapporto all'unità e alla quantità s.

Ma io debbo qui osservare che il Bernoulli tratta ancora di questa questione in un altro lavoro, in un'altra memoria, ancor meno conosciuta, ed è: *Nouveaux principes de méchanique et de physique, tendans a expliquer la nature et les propriétés de l'Aiman*, pour concourir au prix de l'année 1746 (1). Ecco il brano principale, pel caso nostro, di questo lavoro:

§ 5. *Je considere d'abord la matière subtile Magnétique, comme un simple fluide élastique, semblable à l'air, sans y supposer ni tourbillons ni torrens centraux, pour ne pas multiplier les hypothèses sans nécessité.*

Il ne sera pas hors de propos de faire voir à ce sujet, en quoi consiste la fluidité et l'élasticité des fluides. Je crois donc comme démontré, que l'air est un amas de petits corps agités en tout sens; non contigus, mais laissant de grands intervalles entre eux. Ces petits corpuscules s'entrechoquant continuellement, changent les uns la direction des autres; et cette agitation confuse doit sans doute être entretenue par un fluide beaucoup plus subtile, qui traverse l'air. On voit bien que cette idée de l'air répond parfaitement à toutes ses propriétés: elle explique en quoi consiste son élasticité, sa qualité de souffrir de grandes dilatations et condensations; pourquoi son élasticité est à peu près en raison réciproque de son volume, pourquoi cette élasticité est augmentée par la chaleur, qui cause une plus grande agitation dans les parties de l'air; et enfin, pourquoi cette élasticité est en raison doublée, de la vîtesse avec laquelle les parties sont agitées; je puis même démontrer, sur certaines expériences qu'on a faites, quelle doit être la vîtesse absolue dans ce mouvement d'agitation, pour un degré de chaleur donné; quelle est la grosseur de ces parties par rapport à leur intervalle moyen; en quel volume l'air peut être condensé par une force infinie; quelle est la vîtesse du son; quel doit être le son absolu d'un tuyau d'orgue

(1) *Daniel et Jéan Bernoulli*, en *Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'Acad. des Sciences.* Paris, 1752, T. V, prix en 1744, p. 121.

Digitized by Google

d'une hauteur donnée, etc. Et tous ces résultats ont un caractère de vérité, qui frappe et qui confirme merveilleusement l'idée que je viens de donner des fluides élastiques tels que l'air.

In questi e negli altri scritti del Bernoulli non si trova nulla che possa dirsi in relazione diretta colla teoria di Avogadro. Questo io ho fatto osservare anche nel breve discorso sull'opera scientifica di Avogadro che ho pronunciato nella Sezione di Chimica del Congresso della Società Italiana pel Progresso delle Scienze tenutosi in Firenze nell'ottobre 1908.

L'Herapath nel 1821 (1) ha emesso una teoria analoga a quella del Bernoulli, ma anch'essa rimase sconosciuta; il Waterston l'11 Dic. 1845 presentò alla Società Reale di Londra una memoria bellissima sulla cinetica dei gas, che non fu pubblicata. Questa memoria fu fatta conoscere solamente nel 1892 dal Rayleigh che la trasse dagli archivi della Società Reale (2).

Clausius considerò la teoria cinetica sotto un punto di vista più generale, aggiungendovi alla considerazione dei movimenti di traslazione delle molecole quella dei loro movimenti interni, dei loro movimenti di rotazione e dei movimenti possibili dei fluidi imponderabili (Verdet). Il Clausius dice: " Il faut arriver " à cette conclusion que en dehors du mouvement progressif de " la molécule entière, il existe d'autres mouvements des élé- " ments composants de la molécule, mouvements dont la force " vive doit former également une partie de la chaleur „ (3).

Le leggi di Boyle e di Gay-Lussac sulla compressibilità e sulla dilatabilità dei gas sono conseguenza di questa teoria. Da essa scaturisce anche la legge di Avogadro, la quale così ha ricevuto una piena conferma (1857). Ma Avogadro dedusse la sua legge dai dati sperimentali, dalle ricerche sui rapporti semplici delle combinazioni gasose; rapporti semplici che non si

---

(1) " Annals of Philosophy „, New Series, vol. I e " Mathematical Physics „ etc., by JOHN HERAPATH, 2 vol. 1847 (Vedi " Graham's Chem. a. Phys. Researc. „, 1876, XIV).

(2) *J. J. Waterston on the Physics, of Media that are Composed of Free and Perfectly Elastic Molecules in a State of Motion*, " Phil. Trans. of the R. Soc. of London „, 183 (A), 1893, pag. 1-79, con introd. di Lord Rayleigh.

(3) Vedi VAN DER WAALS, *La continuité des états gazeux et liquide*. 1894, p. 56.

Digitized by Google

potevano spiegare nè mettere in rapporto colla teoria atomica di Dalton, se non ammettendo l'egual numero di molecole in volumi eguali, e la divisibilità delle molecole tanto ne' corpi semplici quanto ne' corpi composti. La teoria cinetica dei gas quale fu sviluppata da Krönig e da Clausius prima, poi da Maxwell e da Boltzmann, fece dunque rivivere la legge di Avogadro per altra via, fisica, che non fosse la prima seguita dall'Avogadro stesso, e quella prettamente chimica seguita dal Gerhardt.

La legge di Avogadro divenne una conseguenza legittima, anzi necessaria, della teoria cinetica; essa ha servito mirabilmente al progresso della scienza, ed in modo speciale ha guidato la grande maggioranza dei chimici in tutte le ricerche da oltre sessanta anni. La teoria cinetica e l'importanza della legge di Avogadro sono esposte magistralmente nell'opera di O. E. Meyer: *Die Kinetische Theorie d. Gaze*, Breslau, 1877, ed anche abbastanza bene, da Naumann nel *Gmelin-Kraut's Handb. d. Chem.*, 1877, I.

W. Thomson (lord Kelvin) pur riconoscendo i grandi meriti del Bernoulli relativamente alla teoria cinetica dei gas nel capitolo: *Acheminement vers une théorie cinétique de la matière*, discorso d'apertura pronunciato nella sezione fisico-matematica della Associazione britannica a Montréal nel 1884 (*Conférences Scientifiques et allocutions*, Paris, 1893, pag. 143) scrive:

> Bernoulli, autant que je sache, pensait seulement à la loi de Boyle et de Mariotte, relative au *ressort de l'air*, comme disait Boyle; il n'avait pas égard aux variations de la température, ni à l'accroissement de la pression d'un gas que l'on échauffe l'empêchant de se dilater, phénomène qu'il connaissait à peine peut-être; encore moins s'occupait-il de l'élévation de température dû à la compression et de l'abaissement de température dû à la dilatation, et de la nécessité qui en résulte d'attendre une fraction de seconde ou quelques secondes (avec appareils servant aux expériences ordinaires), pour voir la variation de pression, d'abord trop grande, retomber à la valeur qui vérifie la loi de Boyle.

Il Thomson ricorda un brano dell'opera *Recherche de la Verité* di Malebranche (1712) che dimostrerebbe essere l'idea cinetica ancora anteriore a Bernoulli.

Il Boltzmann che tanto ha contribuito allo sviluppo della teoria cinetica, tenne in alto onore il nome di Avogadro e in

Digitized by Google

un capitolo della sua classica opera: *Leçons sur la théorie des gaz*, 1902, P. I, pag. 45 discorre della legge d'Avogadro. Il Brillouin, nella prefazione a quest'opera scrive (pag. VII):

Bernoulli retrouve ainsi la loi de Mariotte, et prenant, il y a plus d'un siècle et demi, la force vive moléculaire comme mesure de la température, *fait des mesures* de températures météorologiques sur l'échelle absolue qui marque 1 pour l'eau bouillante (373° dans nos notations) un demi-siècle avant Charles et Gay-Lussac.

Il Langevin nelle sue lezioni intorno " *les bases expérimentales de l'atomisme* „ (1907-1908) discutendo la discontinuità delle molecole, le loro dimensioni, ecc. fa vedere che i metodi più suscettibili di precisione sono quelli relativi al *numero* delle molecole contenute in un volume di gas: " On admet, avec Avo- " gadro et Ampère, que dans les mêmes conditions, ecc. „. (*Rev. Scient.*, 1908).

Però non tutti gli scrittori moderni di fisica, di chimica, di chimica-fisica e di fisica-matematica, distinguono bene l'opera del Bernoulli da quella di Avogadro. Ed è molto strano vedere talora confondere l'opera dell'uno con quella dell'altro. Il Bouty, professore di fisica alla Sorbonne, dopo avere brevemente esposta la teoria cinetica dei gas ed esposta ancor più brevemente la teoria di Bernoulli degli urti fra le particelle gasose, nel suo libro: *La verité scientifique, sa poursuite*, Paris, 1908, pag. 295, così scrive:

La loi du mélange des gaz fournit encore un renseignement du plus haut intérêt. Puisque, à volume constant, le mélange des gaz ne modifie pas la pression résultante; qu'une fois les gaz mêlés, les molécules de l'un d'eux heurtent indifféremment des molécules de même espèce ou d'espèce différente, c'est donc que les forces vives des molécules des divers gaz se trouvent égalisées d'avance. Et puisque, sous une même pression, les forces vives totales, proportionnelles à la pression, sont aussi égales, c'est que *sous le même volume, les gaz, à la même pression, contiennent le même nombre de molécules.* Par suite, la masse d'une molécule de chaque gaz est proportionnelle à la densité.

Sans pousser plus loin cette étude, on voit déjà quelle est la fécondité de l'hypothèse de Bernoulli. D'ailleurs, en dehors de la théorie des gaz, pour laquelle elle a été imaginée, elle a fourni un modèle précieux

Digitized by Google

pour l'édification de quelques-unes des théories les plus hardies de la physique moderne.

Transportée, en premier lieu, aux molécules d'une substance dissoute, elle a interprété, avec élégance, les lois de la pression osmotique, ecc.

Questa pagina, mi si permetta l'osservazione, oltre al non essere molto chiara, nè molto esatta, non corrisponde punto al titolo del libro perchè la *verità scientifica* deve consistere innanzi tutto nel dare ad ognuno quanto gli spetta e non nell'attribuire agli uni i meriti degli altri.

Qui si attribuisce al Bernoulli ciò che appartiene all'Avogadro poi al Krönig, al Clausius, ecc.

Ma arreca ancor più meraviglia il vedere un altro cultore della scienza, un assai distinto chimico, quale è il Le Chatelier esporre in modo non conforme al vero quanto riguarda all'Avogadro ed alle teorie chimiche in generale. Leggendo le sue *Leçons sur le carbone, la combustion, les lois chimiques*, Paris, Dunod, 1908. parrebbe che l'ipotesi o legge di Avogadro consista nell'aver ammesso la divisibilità delle molecole in due. A pag. 401 scrive:

Aussitôt la découverte des lois de Gay-Lussac sur les volumes des combinaisons gazeuses, un chimiste italien, Avogadro, chercha si, en combinant l'hypothèse de Bernoulli sur la constitution des gaz et celle de Proust sur les phénomènes chimiques, il ne serait pas possible de donner l'explication mécanique de ces lois. Les hypothèses antérieures, comme il fut facile de le reconnaître, se trouvèrent incompatibles avec les lois de Gay-Lussac. Soit par exemple, la combinaison de l'hydrogène et du chlore. Ils se combinent à volumes égaux. D'après l'hypothèse de Bernoulli, chacun de ces volumes renferme le même nombre des molécules de chacun des deux gaz. D'après l'hypothèse de Proust, la combinaison chimique résulte de l'accolement de ces molécules de nature différente: puisqu'il y en a le même nombre des deux côtés, elles devront se réunir deux à deux.

Le nombre des molécules d'acide chlorhydrique ainsi formé sera donc le même que celui des molécules de chlore ou celui des molécules d'hydrogène. Par suite, le volume de l'acide chlorhydrique sera égal à celui du chlore ou à celui de l'hydrogène. Or, l'expérience montre qu'il en est le double.

Pour faire disparaître cette anomalie, Avogadro introduisit l'hypothèse nouvelle que les molécules des corps simples gazeux ne sont pas

Digitized by Google

des particules indivisibles, insécables, comme on l'avait admis, mais sont déjà des sortes de combinaisons résultant de la réunion en un même groupe d'un certain nombre de parties plus petites qui furent appelées Atomes (insécables). La molécule de chlore, la molécule d'hydrogène renfermeraient, l'une deux atomes de chlore, l'autre deux atomes d'hydrogène. Dans la combinaison du chlore et de l'hydrogène, il ne se produit pas à proprement parler une addition de deux molécules différentes, mais une substitution d'une demi-molécule, c'est-à-dire d'un atome de chlore à une demi-molécule d'hydrogène. De telle sorte que le nombre total des molécules ne change pas.

Ma, a quanto io so, Proust non ha mai emesso una teoria chimica, egli non ha mai discusso di atomi e di molecole. Era un chimico esperimentatore a cui si deve la legge della costanza delle proporzioni nelle combinazioni chimiche, ed altre ricerche, ma non delle teorie chimiche.

Come pure è certo che Bernoulli non ha mai detto che volumi eguali di gas contengono un numero eguale di molecole, nè poteva pensare allora (1738) a delle reazioni chimiche fra diversi gas; l'unico gas che si conosceva era l'aria. Inoltre Avogadro non ha emesso come ipotesi a sè la divisibilità delle molecole, ma bensì come conseguenza della sua legge e della legge sui volumi gasosi di Gay-Lussac.

Il Le Chatelier a pag. 398 del suo libro dice che: " Enfin " l'un des Bernoulli formula, vers le milieu du dixhuitième " siècle, une théorie de la constitution des gas, qui a été le " point de départ de la théorie atomique actuelle „.

La teoria atomica è di Dalton; Dalton ha ripreso l'antico concetto degli atomi di Democrito e di Epicuro e poi di Gassendi ed ha emesso la sua teoria nel 1804-1808 indipendentemente dai lavori di Bernoulli e tenendo conto delle proporzioni secondo cui i corpi si combinano e di altre leggi sperimentali. Nessuno di coloro che hanno scritto, anche ampiamente, sull'origine della teoria atomica nella mente di Dalton, ha mai pensato che egli deducesse la sua teoria dal lavoro di Bernoulli; nè Charles Henry, nè Aug. Smith, nè Harden e Roscoe hanno mai sospettato ciò. È stata veramente geniale la teoria daltoniana ed ha avuto una immensa influenza nel progresso della

Digitized by Google

chimica; senza con ciò voler dire come fa il Roscoe che: John Dalton sia il fondatore della chimica moderna (1).

Bernoulli ha avuto il grande merito di concepire la materia aeriforme come costituita da piccole particelle in continuo movimento; nessuno può a lui negare questo merito, origine della teoria cinetica; ma andare più in là e vedere in ciò la teoria atomica di Dalton, che nacque invece dall'osservazione dei fatti e principalmente dalle tre leggi sperimentali: della costante composizione dei corpi, delle proposizioni multiple e della equivalenza secondo la quale i corpi si combinano, è un voler negare la verità. Dalton scoprì fra le particelle materiali delle relazioni di peso; coll'ipotesi di Dalton si previdero nuovi fatti, si spiegarono le leggi recentemente scoperte, ecc., il che non era possibile con quanto aveva ammesso Bernoulli.

Il Le Chatelier riguardo poi alla dilatazione dei gas scrive (loc. cit., p. 399):

Pour expliquer les coefficients de dilatations semblables des gaz, et différentes analogies dans quelques autres de leurs propriétés, on compléta l'hypothèse de Bernoulli en admettant que des volumes égaux de différents gaz renfermaient tous le même nombre de molécules de chacun de ces gaz, c'est-à-dire que le poids des molécules des différents gaz était proportionnel au poids de l'unité de volume de ces gas mesuré sous la même pression et à la même température.

Questa sarebbe in fondo la legge di Avogadro che a p. 401 attribuisce invece al Bernoulli.

Secondo il Le Chatelier, Dalton non sarebbe dunque l'autore della teoria atomica, ma bensì Proust; o se sì, deriverebbe le sue idee da quelle di Bernoulli. Si attribuisce, in altre parole, a Proust ciò che è di Dalton ed Bernoulli ciò che è di Avogadro.

E si badi bene che non solamente Avogadro formulò la sua legge nel modo che è comunemente conosciuto, cioè che: *volumi eguali di gas nelle stesse condizioni di temperatura e di pressione contengono un numero eguale di molecole*, ma la espose in altra maniera, e disse chiaramente che: *i volumi corrispondono*

(1) *On the genesis of Dalton's atomic Theory*, di Sir Henry Roscoe, in " Beiträge aus die Geschichte d. Chemie d. Gedächtnis ,, v. G. W. A. Kahlbaum, 1909, p. 532.

Digitized by Google

alle molecole e che quindi dire *volume e molecola è la stessa cosa* e che *i pesi delle molecole sono proporzionali alle densità* e che quindi *conoscendo le densità si poteva dedurne i pesi molecolari.*

Ecco quanto egli scriveva nel 1821:

J'ai proposé en outre une hypothèse sur la constitution des gaz, qui justifierait encore plus completement ce choix. Elle consiste à dire que tous les gaz à pression, et température egales contiennent sous un même volume le même nombre de molécules intégrantes, en sorte que la distance des centres des molécules dans ces circonstances est la même pour tous les gaz. Alors les densité des gaz représentent immédiatement les masses de ces molécules intégrantes, et les rapports des volumes dans les combinaisons représentent les rapports des nombres de ces molécules intégrantes.

Ora, di tutto ciò, non vi è, nè vi poteva essere, nemmeno lontanamente l'ombra nel lavoro di Bernoulli.

Tutte queste confusioni, tutte queste inesattezze, più sopra accennate, provengono dal fatto che non pochi discorrono di Avogadro senza conoscerne l'opera scientifica. È strano, ad es., come il concetto della divisibilità delle molecole anche nei corpi semplici, così chiaro nella mente dell'Avogadro, non sia ancora penetrato nella mente di non pochi chimici. Ne abbiamo una prova evidente in un recente lavoro di E. Urbain: *Le rôle de l'atomistique dans l'enseignement et dans la recherche* (1); questo chimico, che è membro della commissione internazionale per i pesi atomici, così scrive a pag. 422:

.....Avogadro avait bien distingué les molécules élémentaires des molécules intégrantes, mais cette distinction correspondait seulement aux notions de corps simples et de corps composés.

Ni les contemporains, ni lui-même ne pouvaient concevoir que les molécules du chlore et de l'hydrogène, par exemple, étaient formées de plusieurs atomes élémentaires. Or ces deux gas se combinent sans condensation pour former de l'acide chlorhydrique, ainsi que Gay-Lussac l'avait établi.

Identifiant la molécule avec l'équivalent, on pensait qu'une molécule de chlore en se combinant avec une molécule d'hydrogène donnait

(1) " La Revue du Mois „, 1909, t. VII, p. 417-429.

Digitized by Google

une molécule d'acide chlorhydrique. A l'aide des symboles de Berzelius la reaction se formulait ainsi:

$$H + Cl = HCl.$$

Le nombre de molécules devait donc être deux fois moindre après la réaction qu' avant. D'après l'hypothèse d'Avogadro, le volume gazeux aurait dû être après la réaction la moitié de son volume initial. Et l'expérience montrait que la réaction se produisait sans variation de volume. Un tel désaccord suffisait à faire rejeter l'hypothèse d'Avogadro.

Eppure l'Avogadro sino dal 1811, 1814, 1816, 1821 e sempre ancor dopo, aveva chiaramente detto che una molecola o volume di idrogeno reagendo con una molecola o volume di cloro danno due molecole o volumi di gas acido cloridrico e quindi:

$$HH + ClCl = HCl + HCl$$

che una molecola o volume di ossigeno con due molecole o volumi di idrogeno danno due molecole o volumi di vapore d'acqua:

$$HH + HH + OO = HHO + HHO$$

e così dimostra per la formazione dell'ammoniaca, dell'anidride carbonica, dell'acido cianidrico, ecc. ecc. Il concetto della divisibilità della molecola secondo le idee di Avogadro è chiaramente esposto anche nell'opera di Arrhenius: *Theorien der Chemie*, 1906, pag. 96-97; nel *Lehrb. d. allg. Chem.* di Ostwald; nella *Theoretische Chemie v. Standpunkte d. Avogadroschen Regel u. d. Termodyn.* di Nernst, ecc.

Non solo Avogadro ammise come regola più generale che le molecole nelle reazioni si dividessero in due atomi, ma ammise delle molecole con più di due atomi, ed anche molecole con un atomo solo, cioè monoatomiche, " de manière, scriveva nel 1821, qu'il y eût des gaz simples dont la molécule intégrante ne fut composée que de deux molécules partielles (atomi), ou même se reduisit à une seule molécule simple „.

Il Le Chatelier fa rilevare tutta l'importanza che deve avere la meccanica chimica nell'insegnamento della chimica. Ciò è giustissimo. Noi pure crediamo che nello insegnamento della chimica si debba introdurre un lungo capitolo, indipendentemente da ogni ipotesi, che riguardi lo studio degli equilibri chi-

Digitized by Google

mici. Egli però tralascia completamente tutto ciò che riguarda le concezioni atomistiche e molecolari; ed in questo dimostra una unilateralità che fa meraviglia. Lo studio e l'esposizione didattica della meccanica chimica, può essere fatto insieme all'esposizione delle teorie o ipotesi meccanistiche atomiche e molecolari. La chimica dei composti di carbonio e quindi la chimica della vita vegetale ed animale e la chimica inorganica, ecc., non hanno avuto tutto il loro immenso svolgimento in base alle teorie atomistiche e molecolari? Non sono state le grandi ricerche sperimentali e teoriche di chimica che da Berzelius a Dumas, a Liebig, a Laurent e Gerhardt ed a Kekulé, a Baeyer e Fischer hanno condotto all'immenso e rapido progresso della chimica moderna? Non ne hanno tratto profitto anche la chimica inorganica, la chimica-fisica e le altre branche della chimica? La questione estremamente importante delle isomerie tanto nella chimica organica quanto nella chimica inorganica, sarebbe stato, e sarebbe tuttora possibile, senza le concezioni strutturali, senza le ipotesi molecolari e atomiche? Decisamente si può dire: no.

Quei chimici che oggi credono di far a meno delle teorie atomistiche e molecolari, fanno le loro ricerche su corpi e su reazioni chimiche scoperte precisamente dai chimici che seguirono le teorie atomistiche e molecolari.

Il Berthelot stesso che, per principio, era contrario alle ipotesi, non ha potuto a meno in molti casi di farne uso, ed ha discusso con molto acume anche la questione relativa alla unità della materia. In Germania, in Inghilterra, in America ed in altri paesi si è più indipendenti dalle cosidette scuole e dai cosidetti maestri. Come ho fatto notare, in altra occasione, il dogmatismo è letale anche alla scienza; la libertà di pensiero promuove la discussione.

E dogmatismo eccessivo fu quello di Saint-Claire Deville il quale nel 1867 scriveva, pare incredibile, queste parole:

Toutes les fois que l'on a voulu imaginer, dessiner des atomes, des groupements de molécules, je ne sache pas qu'on ait réussi à faire autre chose que la reproduction grossière d'une idée préconçue, d'une hypothèse gratuite, enfin de conjectures stériles. Ces représentations n'ont jamais inspiré une expérience sérieuse: elles sont toujours venues non

Digitized by Google

pour prouver, mais pour séduire; et ces illustrations qui sont aujourd'hui si fort en vogue sont, pour la jeunesse de nos écoles, un danger plus sérieux qu'on ne pense. Elles frappent les yeux et satisfont l'esprit d'une manière trompeuse; elles font croire à une interprétation réelle des faits et oublier notre ignorance.

E così, cosa sarebbe oggigiorno della chimica con queste idee retrograde, con queste idee unilaterali, e diciamo pure, brutalmente sperimentali?

Nella mia commemorazione di M. Berthelot ho fatto rilevare come le cause per le quali le nuove teorie chimiche penetrarono tardi in Francia non si debbano cercare solamente nell'influenza contraria di Berthelot, ma ben più indietro, nell'assolutismo del Dumas, simbolo dell'assolutismo religioso, politico e scientifico di quel tempo: questo già dissi nel mio: *Amedeo Avogadro e la teoria molecolare* (1901) e più ampiamente dimostrerò in altra occasione.

La chimica, come già diceva il Gerhardt, come dicevano poi il Berthelot ed il Wurtz, è in fondo una sola: le stesse leggi regolano i suoi diversi rami. Lo studio della meccanica chimica, degli equilibri chimici, può e deve essere insegnato senza escludere le ipotesi atomiche e molecolari a cui la scienza deve i suoi migliori progressi.

È ammirabile la lotta che il Wurtz e la sua scuola ebbero a sostenere in Francia per far trionfare la teoria atomica moderna, e per conseguenza le idee di Avogadro, e farla introdurre nell'insegnamento. Solamente nel 1877, il Wurtz pubblicò su questo argomento, *sei* note (1) e concludeva che la legge di Avogadro: *est généralement envisagée aujourd'hui comme une proposition fondamentale en chimie... Les grandeurs moléculaires ainsi déterminées sont exprimées par des formules répondant à 2 volumes de vapeur, dans la notation aujourd'hui adoptée dans tous les pays de l'Europe* ».

Ed il Friedel nella sua: *Notice sur la vie et les travaux de*

(1) 1) *Recherches sur la loi d'Avogadro et d'Ampère*, C. R., 84, p. 977; 2) *Sur la loi des volumes de Gay-Lussac*, ivi, p. 1183; 3) *Recherches sur la loi d'Avogadro*, ivi, p. 1262; 4) *Sur la notation atomique*, ivi, p. 1264; 5) e 6) ibid., p. 1347 e 1349.

Digitized by Google

Ch. A. Wurtz, 1885. p. 65 scriveva riguardo alla dissociazione dell'idrato di cloralio:

C'est là une preuve frappante de la dissociation de cette vapeur.

Les théories peuvent être contrôlées aussi par leurs conséquences et acquérir ainsi un degré plus ou moins grand de probabilité. C'est à de pareilles vérifications qu'a été soumise la théorie d'Avogadro et jusqu'ici rien n'est venu la contredire.

Elle marque un grand progrès vers la solution du problème éternel de la constitution de la matière.

Il Grimaux poi è stato il primo chimico francese che ha sempre insistito nel voler chiamare questa legge col solo nome di Avogadro e non con quello di Ampère. Egli dichiarò formalmente che il nome di Ampère non può, nè deve, essere congiunto con quello di Avogadro.

Nè il Wurtz, nè il Friedel, nè il Grimaux nè altri distinti chimici francesi della loro scuola, che pur conoscevano, o conoscono, le ricerche di Bernoulli, ebbero mai il pensiero di voler attribuire a questi la benchè minima parte nell'opera di Avogadro.

La teoria cinetica, che considera cioè i gas come costituiti da piccole particelle sferiche in movimento e perfettamente elastiche, contiene in sè la legge di Avogadro: ma ciò è stato riconosciuto e sviluppato da Krönig e da Clausius solamente nel 1856-57 quando i chimici impiegavano già la legge di Avogadro per determinare i pesi molecolari. Ed a ragione scrive il van't Hoff:

Cette proposition (legge d'Avogadro), qui, dès le début s'est présentée comme une synthèse de faits déjà connus, se trouve confirmée par les faits nouveaux qu'elle a fait prévoir, tels que la dissociation du chlorure d'ammonium par la vaporisation; en outre elle découle de la théorie cinetique des gaz.

Senza la legge di Avogadro, o meglio senza una chiara concezione di questa legge, non avremmo avuto l'unificazione dei pesi atomici attuali, nè si sarebbero trovate e chiarite le grandi relazioni fra i pesi atomici e le proprietà fisiche e chimiche ossia il sistema periodico degli elementi (Mendelejeff), nè avremmo avuto i nuovi metodi per determinare i pesi molecolari. Le leggi di Raoult sarebbero forse rimaste sterili senza il

Digitized by Google

soffio di vita dato loro dal van't Hoff e dall'Arrhenius coll'applicazione della legge d'Avogadro.

Basterebbe ricordare qui la classica memoria di van't Hoff: *Loi de l'équilibre chimique dans l'état dilue, gazeux ou dissous* (1); ove discorre *di una proprietà generale della materia diluita* e dopo accennato alle leggi di Boyle e di Gay-Lussac relativamente alla pressione osmotica. a pag. 43 scrive:

Ce sont là les analogies qui ont été demontrées et vérifiées en détail dans le travail cité: elles ont rapport à la variation de la pression avec les circonstances. Je vais ajouter maintenant une troisième proposition, ayant rapport à la grandeur absolue de cette pression, et n'étant, en réalité, autre chose qu'une extension de la loi d'Avogadro:

3° *Loi d'*Avogadro *pour les solutions;* La pression exercée par les gaz à une température déterminée, si un même nombre de molécules en occupe un volume donné, est égale à la pression osmotique, qu'exerce dans les mêmes circonstances la grande majorité des corps, dissous dans les liquides quelconques. Cette pression revient à 22.4 atm. environ si à 0° Celsius la quantité moléculaire en grammes se trouve par titre.

E poco dopo scriveva:

Tandis que la détermination des poids moléculaires des gaz et des vapeurs raréfiés est une application directe de la loi d'Avogadro, diverses méthodes sont employées pour les solutions diluées et reposent sur la détermination du point de congélation, du point d'ébullition, de la tension de vapeur, etc. Cependant toutes ces méthodes ne sont pas sans relation entre elles et elles sont la conséquence d'une proposition qui correspond entièrement à la loi d'Avogadro mais se rapporte à la pression osmotique, au lieu de la pression gazeuse: *les solutions qui, à la même température, exercent la même pression osmotique, contiennent dans le même volume le même nombre de molécules dissoutes* (2).

E questo vale tanto pei gas come per i liquidi come per i solidi sciolti.

L'intérêt scientifique fondamental que présentent les résultats atteints par l'application de la loi d'Avogadro, réside dans la concordance entre les point atomiques obtenus dans le domaine de la chimie et les poids moléculaires établis sur une base physique (van't Hoff, loc. cit., p. 17).

(1) " Kongl. Sven. vet-s-Akad. Handlingar „, 1885, Band 21, N. 17, pag. 1-58 e " Arch. Néerlandaise „, 1885, XX, p. 239-302 e poi in " Zeits. f. physikal. Chem. „, 1887, I, p. 480-508.

(2) Van't Hoff, *Leçon de Chim. phys.*, II, p. 23.

Digitized by Google

Le ricerche di van't Hoff dimostrarono che le leggi di Raoult sull' abbassamento del punto di congelazione o crioscopia, ecc. sono una conseguenza della legge di Avogadro. E il Raoult stesso (C. R., 1882, t. 94, p. 1517-1519 e la bibliografia in: *Sur les progrès de la cryoscopie*, Grenoble, 1889, p. 59) come osserva anche van't Hoff, ha dimostrato che si poteva utilizzare l'abbassamento del punto di congelazione per determinare i pesi molecolari qualora fosse impossibile determinare la densità di vapore. Egli allora formulò la sua legge dicendo che: *les molécules des différentes matières organiques dissoutes dans la même quantité d'eau amènent sensiblement le même retard dans son point de congélation.* Fa vedere l'importanza di questa regola, poi scrive: *mais son application la plus importante sera la détermination des poids moléculaires, dans des cas nombreux où la mesure des densités de vapeur est impossible.* Ciò che poi fu confermato.

Ma anch'egli, a proposito di queste questioni mai ricorda il Bernoulli.

Vi è poi una enorme differenza fra la concezione di Bernoulli e quella di Avogadro. Bernoulli ha solamente accennato al movimento delle particelle e così come era, la sua teoria non poteva avere e non ha avuto, influenza alcuna sullo sviluppo della scienza. E giustamente il Chwolson (1) scrive: " Si devono riguardare Krönig (1856) e Clausius (1857) come i veri fondatori della teoria cinetica dei gas, benchè le idee e le nozioni, che sono alla base di questa teoria fossero conosciute prima di loro „. Molto meno poi ha avuto influenza sullo sviluppo della chimica. Invece, si badi bene, l'Avogadro considerò il numero delle molecole, la loro distanza, il loro peso relativo dedotto dalle densità, e la loro divisibilità; egli ha enunciato e sviluppato la sua legge nel 1811 e poi successivamente in molte occasioni sino al 1850 ed in modo sì chiaro che nessuna modificazione ha ricevuto dopo, e grande importanza ha avuto sullo sviluppo delle teorie chimiche, sulla determinazione dei pesi molecolari, dei pesi atomici; i lavori di Krönig e di Clausius hanno servito a confermarla deducendola dalla teoria cinetica, mentre Avogadro l'aveva dedotta da considerazioni ed esperienze chi-

(1) *Traité de physique*, I, p. 482.

Digitized by Google

miche e fisiche. Krönig e Clausius discussero ed ammisero la divisibilità delle molecole appunto come prima aveva fatto l'Avogadro.

E la teoria della *dissociazione elettrolitica* di Arrhenius, non è in fondo una conseguenza della legge di Avogadro? Quando van't Hoff ebbe applicata la legge di Avogadro alle soluzioni diluite egli s'accorse che vi erano numerose eccezioni, che davano un peso molecolare più elevato di quello che si poteva dedurre dalla legge di Avogadro. I corpi che in questo caso fanno eccezione alla legge *si notò essere tutti quelli le cui soluzioni sono conduttrici dell'elettricità, cioè tutti quei corpi che diconsi elettroliti.* Tutti gli elettroliti danno delle pressioni osmotiche superiori a quelle che sarebbero indicate dalla teoria Avogadro-van't Hoff, così è del punto di congelazione e dell'innalzamento del punto di ebollizione.

Queste anomalie si spiegano colla dissociazione elettrolitica, come le eccezioni alla legge di Avogadro per i gas e i vapori si spiegano colla dissociazione termica.

Arrhenius nella memoria: *Ueber die Dissociation der in Wasser gelosten Stoffe* (1) ammise che gli elettroliti siano già decomposti in soluzione nei loro rispettivi joni elettropositivi e joni elettronegativi; questa dissociazione, che fu detta *dissociazione elettrolitica* può essere parziale per le soluzioni di media concentrazione, ma è totale, o quasi, nelle soluzioni diluite. Quando una corrente passa in una soluzione di elettrolite trova questa già separata nei suoi joni e la corrente non fa che trasportare i joni ai due poli, non li separa. Se la corrente passa è segno che i joni erano già separati. Si capisce quindi che determinando la conducibilità elettrica si verrà a conoscere il grado della dissociazione elettrolitica.

L'Arrhenius in questa memoria ha preso come punto di partenza la legge d'Avogadro. Egli incomincia colle parole:

In einer der schwedischen Akademie der Wissenschaften am 14 oktober 1885 vorgelegten Arbeit hat van't Hoff sowohl experimentell wie auch teoretisch folgende ausserordentlich bedeutungsvolle Verallgemeinerung des Avogadroschen Gesetzes bewiesen.

(1) « Zeits. f physik. Chem. „, 1887, I, p. 631-648.

Digitized by Google

E più avanti:

Se un gas dimostra una densità irregolare relativamente alla legge di Avogadro, si spiega ammettendo che si trovi in istato di dissociazione, e un assai noto esempio, ad alta temperatura, l'abbiamo nel cloro, bromo e jodo i quali corpi in tale stato dimostrano di essere scissi nei relativi atomi.

La stessa spiegazione può naturalmente valere per spiegare le eccezioni alla legge di van't Hoff, ecc.

A tutte queste importanti conseguenze, e ad altre che non starò ora ad indicare, non si sarebbe arrivati se non si ammetteva in tutta la sua pienezza la legge di Avogadro. Questi ultimi sessanta anni di lavoro dei chimici, specialmente nella chimica organica, servirono a preparare un'immenso numero di corpi nuovi ben definiti, a conoscerne le relazioni fra loro, le relazioni fra le proprietà e la costituzione chimica, ecc. ecc.

J. Perrin in un assai interessante nota dal titolo: *Peut-on peser un atome avec précision ?* (1) fa vedere quanta importanza ha ora la legge di Avogadro e a pag. 516 scrive:

Le résultat expérimental se généralise pour les divers corps, en sorte que nous retrouvons, *comme une conséquence nécessaire de l'expérience*, une proposition célèbre formulée à titre hypothétique, il y a plus d'un siècle, par Avogadro et Ampère:

" Deux gaz quelconques, pris aux mêmes conditions de tempéra- " ture et de pression, contiennent sous le même volume le même nombre " de molécules „.

On appelle souvent molécule-gramme d'un corps la masse de ce corps qui, à l'état gazeux, occuperait le même volume que 2 grammes d'hydrogène amenés à la même température et à la même pression. L'énoncé d'Avogadro et Ampère équivant alors au suivant:

Deux molécules-gramme quelconques contiennent le même nombre de molécules (2).

Ce nombre invariable N est une constante universelle (qu'on pourrait appeler " *constante d'Avogadro et Ampère* „). Le poids de la molécule d'un corps est le quotient par N de la molécule-gramme de ce corps.

---

(1) " La Revue du Mois „, 1908, 10 nov. p. 513.

(2) A questo proposito vanno pure ricordate le belle ed estese ricerche di Ph.-A. Guye, *Sur la détermination expérimentale de l'écart à la loi d'Avogadro* (1905-1909).

Digitized by Google

La legge di Avogadro ha oggi assunto un alto grado di certezza sperimentale colle stupende ricerche di Gouy e specialmente di J. Perrin sul movimento browniano e sugli ultramicroscopici. Il Perrin nella bellissima memoria: *Mouvement brownien et molécules* (A. Ch., sett. 1909, p. 5-114) propone di chiamare il numero invariabile N di molecole nella molecola-grammo di una sostanza qualunque, col nome di *costante d'Avogadro*. Il numero invariabile N è secondo Perrin una *costante universale*.

Già J. J. Thomson (*Elettricità e materia*, 1905) ha indicato col nome di *costante d'Avogodro* il numero N di molecole in un millimetro cubo di gas.

Le ricerche del Perrin e di altri conducono quasi alla dimostrazione dell'esistenza *reale* delle molecole, quali le vedeva l'Avogadro cogli occhi acuti e profondi della sua mente.

È col più vivo compiacimento che io veggo oggi la grande maggioranza dei chimici e dei chimico-fisici francesi inneggiare alla teoria di Avogadro, già da tanti anni glorificata in Germania, e prenderla come base dei loro studi. Sono straordinariamente mutate le condizioni attuali dai tempi in cui il Wurtz doveva tanto combattere per introdurre nello insegnamento ufficiale la nuova teoria atomico-molecolare che procedeva dalle ricerche classiche di Dalton, di Avogadro, di Gerhardt e di Kekulé.

" Au moment même, scrive giustamente il Brillouin (loc. " cit., 1902, p. XIX) où le *Énergetistes* se constituaient en École " dissident et niaient la fécondité de l'hypothèse moléculaire en " Physique, de l'hypothèse atomique en Chimie, celle-ci repa- " raissait, imposée par l'expérience en Électricité „. E ciò relativamente alle ricerche di J. J. Thomson e di altri fisici, e chimico-fisici, moderni.

La legge di Avogadro è entrata anche nel pensiero filosofico moderno e noi vediamo, ad esempio, il Lange nella sua eccellente *Histoire du Matérialisme* (1879), il Mabilleau nell'*Histoire de la philosophie atomistique* (1895), l'Hannequin nell'*Essai critique sur l'hypothèse des atomes dans la science contemporaine* (1), ecc. che ne discorrono ampiamente.

---

(1) Arthur Hannequin fu un distinto professore di filosofia nella Facoltà di Lettere di Lyon. Nel 1895 pubblicò il bel libro: *Essai critique sur l'hy-*

Digitized by Google

Nessun chimico o fisico potrà mai attribuire a Bernoulli la legge di Avogadro. Nessun libro moderno di chimica tace, nè può tacere, il nome di Avogadro; l'opera sua è entrata nella parte fondamentale dell'insegnamento della chimica in tutti i paesi.

L'opera scientifica di Bernoulli, di Proust, di Dalton, di Avogadro è grande, è gloriosa, e ad ognuno di essi spetta la propria parte di gloria.

Torino, R. Università. Maggio 1910.

Relazione sulla Memoria dei sig. A. CAMPETTI e C. DELGROSSO intitolata: *Sull'equilibrio di coppie di liquidi parzialmente miscibili.*

Nella Memoria affidata al nostro esame gli autori descrivono delle esperienze dirette a studiare la miscibilità di otto coppie di liquidi, che non erano state ancora esaminate. Essi determinarono per ciascuna coppia la solubilità d'una sostanza nell'altra a temperature diverse, comprendendo nei limiti delle loro esperienze la così detta *temperatura critica*, cioè la più bassa temperatura, alla quale le due sostanze si scioglievano in tutte le proporzioni l'una nell'altra.

Costruendo una curva con ascisse proporzionali alle temperature e con ordinate proporzionali al rapporto, in cui il peso di uno dei liquidi (sempre il medesimo per tutte le concentra-

---

pothèse des atomes dans la science contemporaine, Paris, Baillière, 2ª ed., 1879 (la 1ª ediz. è stata pubblicata negli " Annales de l'Univ. de Lyon „, 1895). Egli era ammiratore e seguace delle teorie moderne, della scuola di Wurtz. Il capitolo: *La chimie atomique et l'atome chimique*, è quasi esclusivamente consacrato a dimostrare l'importanza della legge di Avogadro. Sue guide sono le opere di Wurtz e di Lothar Meyer. Ed a questo proposito io scrivevo nel 1905 (*La Chimica e le Arti*, Discorso inaugurale dell'Università di Torino, 1905, p. 26): " È bello, è confortante, vedere in certe Università la coltura scientifica allearsi e fondersi cogli studi letterari e filosofici al punto che giovani e valenti professori delle Facoltà di Lettere e Filosofia, discutono ad esempio l'*ipotesi atomica nella scienza moderna*, dimostrando anche una elevata coltura matematica, tanto da poter discutere a fondo la legge del nostro Avogadro „.

Digitized by Google

zioni) sta al peso totale del miscuglio, quando tra i due liquidi sussiste l'equilibrio, si ha una curva, la cui massima ascissa dà la temperatura critica. Tali sono le curve, che gli A. costruirono per le varie coppie di liquidi.

Il Rothmund osservò che se in una di queste curve si prende la media delle due ordinate spettanti alla medesima ascissa, si ottengono dei punti che stanno sopra una retta, la quale taglia la curva in un punto corrispondente alla temperatura critica. Questa legge è simile a quella che il Cailletet e il Mathias stabilirono per la temperatura critica dei gas. Gli A. la trovarono verificata con discreta esattezza nelle loro esperienze. Anche la legge degli stati corrispondenti è applicabile a questi fenomeni, almeno in prima approssimazione.

Le non facili esperienze vennero eseguite con cura e riguardano un argomento importante. Esse sono discusse nella Memoria con esatta cognizione dei lavori precedenti. Per ciò noi proponiamo alla classe la lettura della Memoria, che ci pare degna d'essere inserita nei volumi accademici.

GUIDO GRASSI
A. NACCARI, *relatore*.

Relazione sulla Memoria dell'Ing. G. COLONNETTI che ha per titolo: *I sistemi elastici continui trattati col metodo delle linee d'influenza*.

Il metodo intuitivo e rigoroso delle *linee d'influenza* nella ricerca delle sollecitazioni e delle deformazioni nelle costruzioni staticamente determinate od iperstatiche, soggette a carichi mobili, che tanto sviluppo ha preso nei moderni calcoli della scienza delle costruzioni, è stato, com'è noto, grandemente avvantaggiato dal geniale teorema di reciprocità di Maxwell sui sistemi elastici, teorema fecondo d'innumerevoli applicazioni. In particolare, la ricerca della linea d'influenza dello spostamento verticale di una sezione qualunque di una trave continua ad asse rettilineo o curvilineo (arco continuo) a sezione piena o reticolare, comunque vincolata agli estremi, e semplicemente appoggiata in orizzontale su sostegni intermedî; ovvero la ricerca

Digitized by Google

della linea d'influenza della reazione di un appoggio intermedio del medesimo sistema, è ridotta, in virtù del teorema ricordato, al tracciamento della linea elastica dell'asse geometrico della trave sollecitata da determinate forze.

L'A. con questo nuovo lavoro porta un notevole contributo alla risoluzione di questi problemi, facendo vedere come si possa costruire la detta linea elastica quale poligono funicolare di determinati *pesi elastici*, combinazioni lineari di *pesi elastici fondamentali* relativi alla stessa trave resa, in giudizioso modo, staticamente determinata; pesi elastici che vengono calcolati una volta per sempre, e servono alla risoluzione dei varî problemi che possono presentarsi per la determinazione sia di quantità iperstatiche, sia di deformazioni; senza cioè che occorra più alcun'ulteriore analisi del comportamento elastico del sistema corrispondentemente alle varie condizioni di carico a cui conviene immaginarlo assoggettato per la risoluzione dei detti problemi.

La soluzione indicata dall'A. è elegante, e per la sua semplicità abbrevia notevolmente le operazioni che devonsi eseguire per raggiungere lo scopo; i sottoscritti ne propongono pertanto l'inserzione nei volumi delle Memorie dell'Accademia.

C. Segre
C. Guidi, *relatore*.

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

Digitized by Google

CLASSI UNITE

Adunanza del 29 Maggio 1910.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: NACCARI, Direttore della Classe, MOSSO, SPEZIA, CAMERANO, SEGRE, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA, GRASSI, SOMIGLIANA, FUSARI; scusa l'assenza il Socio MATTIROLO;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: BOSELLI, Vice Presidente dell'Accademia, CHIRONI, RUFFINI, STAMPINI, BRONDI, SFORZA, EINAUDI, BAUDI DI VESME, SCHIAPARELLI e RENIER che funge da Segretario.

Approvasi l'atto verbale dell'adunanza plenaria antecedente 15 maggio 1910.

Il Presidente saluta i nuovi Soci EINAUDI, BAUDI DI VESME e SCHIAPARELLI, i quali ringraziano.

Invitato dal Presidente, il Socio Tesoriere espone il rendiconto finanziario dell'anno 1909, sia del fondo accademico, sia dei fondi particolari per i premi Bressa, Gautieri, Pollini e Vallauri.

L'Accademia approva tanto il conto consuntivo quanto il bilancio preventivo.

Avendo il Presidente dato lettura di una lettera del Socio SALVADORI, con la quale egli ringrazia l'Accademia per l'onore fattogli eleggendolo Vice Presidente, ma dichiara di non poter accettare quella carica, si passa ad una nuova votazione e riesce eletto a Vice Presidente il Socio Lorenzo CAMERANO, salvo l'approvazione Sovrana.

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 29 Maggio 1910.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti i Soci: NACCARI, Direttore della Classe, MOSSO, SPEZIA, SEGRE, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA, GRASSI, SOMIGLIANA, FUSARI e CAMERANO Segretario.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente. — Scusa l'assenza il Socio MATTIROLO.

Il Presidente comunica una lettera della famiglia del compianto Socio S. CANNIZZARO colla quale ringrazia l'Accademia per la parte presa nella dolorosa circostanza.

Il Presidente annunzia che al Socio PEANO è morta testè la madre, e la Classe incaricò il Presidente di inviare al collega le più vive condoglianze.

Il Socio FOÀ prende la parola per ricordare la morte recentemente avvenuta di Roberto KOCK. Egli dice: " Si è dif-
" fusa rapidamente nel mondo la triste notizia della morte di
" Roberto KOCK. Sebbene egli non fosse iscritto fra i Soci della
" nostra Accademia, il suo nome e l'opera sua sono state troppo
" grandi perchè l'Accademia possa lasciare passare questa cir-
" costanza senza esprimere il suo profondo cordoglio per una
" perdita che colpisce la scienza e l'umanità. Infatti se grande
" fu l'opera di Roberto KOCK nel campo scientifico, se le sue
" fondamentali scoperte ebbero la virtù dinamogena di creare
" tutto un nuovo capitolo di scienza medica e una ingente

Digitized by Google

" nuova letteratura nella medicina contemporanea, altrettanto " si può dire della vastità dei beneficî che le scoperte di " Roberto Kock hanno assicurato alla umanità.

" L'Accademia pertanto vorrà consentire che sia posta a " verbale l'espressione del suo alto rimpianto per la grave per- " dita che sarà sentita da tutto il mondo civile ".

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le Note seguenti:

1° Dr. Luigi Botti: *Di alcuni fenomeni di grandezza apparente, di distanza e di prospettiva*, dal Socio Foà;

2° *Sul raddoppiamento di frequenza di una corrente per mezzo di lampade a filamento metallico*, del Socio Grassi.

Il Socio Fusari, anche a nome del Socio Camerano, legge la relazione intorno alla Memoria del Dr. A. Civalleri, intitolata: *Sullo sviluppo della Guaina midollare nelle fibre nervose centrali.* La relazione favorevole è approvata alla unanimità e così pure si approva con votazione segreta la stampa della Memoria nei volumi accademici.

Il Socio Naccari presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* il lavoro del Prof. G. B. Rizzo, intitolato: *Sulla propagazione dei movimenti prodotti dal terremoto di Messina del 28 dicembre 1908.* Il Presidente incarica i Soci Naccari e Jadanza per esaminare detto lavoro.

Il Socio Parona presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* il lavoro della sig.na G. Osimo, intitolato: *Alcune nuove Stromatopore giuresi e cretacee della Sardegna e dell'Appennino.* Il Presidente delega i Soci Parona e Camerano per riferire sopra questo lavoro.

Il Socio Camerano presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* il lavoro del Dr. Luigi Cognetti de Martiis, intitolato: *Ricerche sulla distruzione normale dei prodotti sessuali maschili.* Dal Presidente vengono delegati i Soci Camerano e Fusari per esaminare detto lavoro.

Digitized by Google

LETTURE

Di alcuni fenomeni di grandezza apparente, di distanza e di prospettiva.

Nota del Dr. LUIGI BOTTI.

È noto che il nostro mondo visivo, che pure induce in noi la certezza dell'esistenza di un mondo esterno, riposa in gran parte su illusioni. Un cieco nato, il quale per una fortunata operazione acquisti il beneficio del vedere, si meraviglia di non poter toccare con la mano una casa lontana, nè può convincersi che la immagine impicciolita di quella corrisponda realmente alla casa stessa. Egli ragiona probabilmente così: " Di una stanza io posso percorrere il pavimento con un certo numero di passi o tastar le pareti sino ad una data altezza; con tutto ciò non la posso tuttavia insieme comprendere in un sol momento entro il campo delle mie sensazioni tattili-muscolari. Ora come mai una stanza può esser contenuta più volte in una immagine riunita e minuscola quale quella che mi si presenta ora come fenomeno luminoso? „. Ed il cieco nato ragiona benissimo, affermando che prima era nel vero, e che adesso è vittima di un errore. Dobbiamo però pensare che non solo codesta classe di disgraziati, ma tutta quanta l'umanità è in errore: soltanto che non se ne accorge per il fatto che vi si è avvezza da tempo e che sa come regolarsi. Difatti la prospettiva non esiste oggettivamente; ma siamo noi e sono le leggi ottiche, a cui ubbidisce anche il nostro apparecchio visivo, che la fanno esistere. Una via regolare che si allarga presso di noi e s'assottiglia nell'allontanarsene è un'illusione. Un oggetto che con due lenti diverse si vede entrambe le volte ma trasfigurato nelle sue dimensioni, è un'altra illusione. Lo stesso è per la distanza. Se noi non possedessimo che la vista monoculare, di

Digitized by Google

per sè, la nostra percezione della distanza sarebbe imperfetta. Helmholtz (1) dice che con un occhio solo non si ha da principio che la percezione della direzione nella quale giace il punto veduto. Per ottenere la conoscenza della dimensione in profondità, occorrono mezzi che in parte sono dati dalla esperienza immediata, come la conoscenza della grandezza dell'oggetto, della sua forma, la distribuzione dell'ombra, l'offuscamento dell'aria frapposta, e in parte sono forniti dalle sensazioni. A questi mezzi appartengono le sensazioni dello sforzo necessario all'accomodamento, l'osservazione con capo e corpo in movimento e l'uso simultaneo dei due occhi. Quindi si capisce che uno solo di questi mezzi sarebbe insufficiente a procurarci la possibilità di un esatto apprezzamento. Basta pensare agli errori che commettono i bambini, i quali sono indotti a giudicare le dimensioni degli oggetti lontani e meno noti dalla ampiezza dell'angolo visivo, che è quanto dire delle proporzioni che sulla loro retina assume l'oggetto, e dalla relativa impressione sensoriale; mentre gli adulti si valgono dalla lunga esperienza che li ha fatti accorti delle relazioni costanti tra la distanza e la grandezza apparente. Spesso noi vediamo i nostri bimbi cercar di afferrare e cogliere un uccello che vola a distanza, e stendere le manine per chiudervi un insetto o una foglia che cadono lungi da loro. Helmholtz narra che da piccino, passeggiando con sua madre per una via, vide in alto sulla piattaforma di una torre una figura umana che gli apparve come una bambola, e s'incapricciò di possederla. Del resto non cadono in errore i soli bambini ; perchè in generale la visione di un oggetto lontano e poco noto è fonte di sbagli. Un abitante della pianura può ritenere una vigna lontana, sospesa su un pendio, per un campo di patate, e apprezzerà le distanze e le grandezze dei monti troppo piccole. Se però riesce a persuadersi della reale distanza dell'oggetto, questo gli sembrerà crescere in proporzione. L'Helmholtz crede anche, come abbiamo veduto, che a darci una precisa conoscenza della grandezza e della distanza di un oggetto qualsiasi contribuiscano la sua forma, i giuochi di luce ed ombra, e quello che i tedeschi chiamano " sinnliches Anschauungsbild „, che

(1) *Handbuch d. physiologischen Optik,* 2 Aufl., S. 766, 1896.

Digitized by Google

si osserva nella famosa esperienza del mulino a vento di Sinsteden (1) e nella visione di un disegno rimasto celebre, la scala di Schroeder (2), che appare in doppio senso. E vi entra ancora — dice Helmholtz — la prospettiva dell'aria, prodotta da trasparenza incompleta. Se l'atmosfera è chiara, i monti appaiono più vicini e più piccoli; se ingombra, il contrario. Negli alti monti, di solito, l'aria è assai trasparente; e se un viaggiatore inesperto li vede splendere nevosi in piena luce solare, li trova così chiari come egli solo potè vedere chiari degli oggetti vicini, onde li apprezza vicini anch'essi. Ma se la distanza e grandezza delle montagne ci appaiono talora problematiche, ben più difficili lo sono quelle degli astri, p. es. della luna. Tutti sanno che la luna appare più grande all'orizzonte che allo zenith; ma le spiegazioni di questo fatto non le diede nessuno, o, meglio, le diedero troppi e troppo diverse. Helmholtz — giacchè gli abbiamo dato a maggior diritto la preferenza — dice che il fatto è in rapporto con la rappresentazione che ci facciamo della volta celeste come schiacciata, in causa della visione del cielo nuvoloso. E però — egli nota — la luna e il sole appaiono più grandi all'orizzonte quando l'aria vi è più scura ed essi sono meno luminosi, precisamente come avviene per le montagne. Poi il fenomeno sarebbe più notevole per la luna che pel sole, ed avrebbe fondamento nello stato dell'atmosfera.

Non però tutti gli scienziati sono perfettamente d'accordo nello stabilire le condizioni di un esatto apprezzamento della grandezza apparente in rapporto con la distanza. C'è, per esempio, un glorioso psicologo, Guglielmo Wundt (3), il quale da molti anni sostiene che, accanto alle qualità sensitive della retina, hanno grande importanza nella percezione visiva le sensazioni muscolari dell'occhio. Per questo autore la visione monoculare non ci fornirebbe risultati sufficienti se l'asse visivo non potesse muoversi dal punto in cui si trova l'osservatore sino a quello in cui giace l'oggetto veduto lungo l'apparente salita prospet-

(1) " Poggendorff's Annalen „ Bd. CXI, S. 336-339.

(2) " Poggendorff's Annalen „ Bd. CV, S. 298.

(3) *Beiträge zur Theorie d. Sinneswahrnehmung*, Leipzig u. Heidelberg, 1862. — *Grundzüge d. physiologischen Psychologie*, 6 Aufl., Bd. II, S. 696 ff., Leipzig, 1910.

Digitized by Google

tica del suolo, specie nel caso di oggetti vicini. In genere, quando ci sono nascosti i piedi degli oggetti, la rappresentazione della loro distanza relativa ed assoluta riesce più indeterminata: catene di montagne, vedute ammonticchiarsi le une dietro le altre, sembrano giacere in una sola superficie. Ma per il Wundt ci sono ancora altri fattori, come la parallasse dell'accomodamento nella vista indiretta, ossia la distanza angolare che deve essere percorsa dall'occhio perchè sulla retina si coprano i due cerchi di dispersione di due punti che nella vista diretta giacciono precisamente un dietro l'altro sulla linea visiva. Sotto certe condizioni — dice l'autore — la visione monoculare, quando agiscono le associazioni, come nel guardar la prospettiva dei quadri, acquista importanza maggiore che non la visione binoculare, la quale piuttosto ha il primato nel caso della reale visione in profondità. La distribuzione della luce e delle ombre può pure aiutarci ad apprezzare le distanze: queste sembrano maggiori alla sera, quando son più lunghe le ombre. Poi — dice ancora il Wundt — noi apprezziamo secondo l'angolo visivo entro cui è compreso l'oggetto considerato. Oggetti conosciuti sono giudicati nella loro distanza a norma di oggetti egualmente distanti e noti per la loro grandezza. D'altra parte oggetti veduti sotto il medesimo angolo visivo possono percepirsi a distanze diverse e quindi anche con dimensioni diverse, perchè se un oggetto che sta sempre entro un medesimo angolo visivo è portato man mano più lontano, deve per necessità apparire anche man mano più grande. E questa sarebbe, secondo Wundt, Smith (1) ed altri, la ragione per cui la luna appare più grande all'orizzonte che non allo zenith: la luna, cioè, sembrerebbe più grande all'orizzonte, perchè ivi è veduta più lontana, e quindi, rimanendo costante l'angolo visivo, di dimensioni maggiori. Il motivo per cui la luna all'orizzonte appare più lontana, dovrebbe cercarsi nel fatto che la volta celeste si vede appiattita nel mezzo, allo zenith, e più estesa all'orizzonte. Però questa illusione relativa alla luna non escluderebbe il concorso di altre condizioni come le nebbioline atmosferiche, i movimenti dell'occhio (Zoth) (2), richie-

(1) *Lehrbegriff d. Optik*, übersetzt v. KAESTNER, S. 56, 1755.
(2) " Pflüger's Arch. „ Bd. LXXVIII, S. 363, 1900.

Digitized by Google

dendo maggior sforzo ed energia il movimento di rotazione oculare verso l'alto; e inoltre il fatto che il piano del suolo ci appare come una superficie che sale dai nostri piedi sino all'orizzonte e si vede disseminata di oggetti, e quindi, per essere una estensione divisa, sembra maggiore di una eguale estensione non divisa (Wundt). Invece in senso antagonistico e correttivo della influenza del puro angolo visivo agirebbero gli effetti associativi derivanti da rappresentazioni famigliari, e l'accomodamento monoculare, che vale piuttosto per il confronto di impressioni successive ed è mezzo abbastanza imperfetto. Anche la lucidezza, la specchiatura, la dispersione retinica agevolano sotto condizioni diverse la rappresentazione in profondità, come attestano oltre che il Wundt, le esperienze di Kirschmann (1), Einthoven (2), ed altri.

Come è facile immaginare, è immensa la falange di coloro che trattarono codesto problema della rappresentazione di grandezza e di distanza; ma ancor più numerosi sono quelli che ne considerarono un lato solo, quello, dirò così, più popolare: l'apprezzamento di grandezza degli astri maggiori (rispetto alla nostra visione) e specialmente della luna. Furono proposte ipotesi di varia natura: si osservò persino la luna stando sdraiati a terra, in modo da vedere l'astro argenteo allo zenith come se si trovasse all'orizzonte, e si notò che l'illusione di ingrandimento diminuiva e cessava. Si osservarono le fotografie telescopiche prese in punti diversi del corpo lunare; e si trovò che le dimensioni del satellite terrestre non mutavano. Si osservò la luna con telescopii e cannocchiali: gli astronomi stessi attestano che, esaminata con tali mezzi, la luna rimane sempre delle identiche dimensioni apparenti. Uno scienziato illustre, ben noto per lavori di ottica fisiologica, lo Zehender (3), sostiene che il cielo di per sè, sgombro, non ci presenterebbe alcuna forma; ma che noi gli assegnamo quella di una volta depressa, perchè, osservando il percorso delle nubi, specialmente quando queste sono

(1) " Philos. Stud. „ Bd. XVIII, S. 114 ff., 1901; e Bd. IX, S. 497 ff., 1894.

(2) " Pflüger's Arch. „ Bd. LXXI, S. 1 ff., 1898.

(3) " Zeitschr. f. Psych. u. Physiol. d. Sinnesorg. „ Bd. XX, S. 353 ff., 1899; e *Ueber optische Täusch., mit besond. Berücksicht. d. Täusch. üb. d. Form. d. Himmelsgewölbes, etc.*, 1902.

Digitized by Google

basse (e le nubi sono il solo mezzo che ci rimane in tal caso per orientarci), lo vediamo svilupparsi come sulla superficie di una immensa cupola appiattita. Lo Sterneck (1), matematico insigne, fece esperienze interessanti sulla vetta del Sonnblik a m. 3103. Egli pone in rapporto l'apparente forma del cielo notturno con quella del cielo diurno, tenendo conto della estinzione della luce degli astri nell'atmosfera e della mutata illuminazione: d'altra parte però la forma del cielo diurno riposa sulla forma del cielo nuvoloso, il quale si misura in base all'apprezzamento comune delle distanze. Haenel (2) cita un altro autore non meno di lui diligente, il Reimann. Fa anche una storia dei tentativi di spiegazione del problema qui discusso. E, dopo aver passato in rassegna le teorie fisiche di Aristotele e Tolomeo, quelle fisiologiche di Gassendi, Stroobant, Schäberle, quelle psicologiche di Descartes, Molineux, Vitello, Brandes, Euler, Malebranche, Lühr, Gauss, fino a Zehender, Bourdon, Filehne, ecc., conferma la validità di un risultato ottenuto da Claparède con esperienze semplicissime. Costui, interrogate cento persone ignare di ottica, se vedessero all'orizzonte la luna più vicina o più lontana che allo zenith, si sentì ripetere quasi da tutte: " più vicina „. Conclusione: l'ingrandimento apparente della luna all'orizzonte non può dipendere dall'essere veduta più lontana. Il che significa che le teorie del Wundt e di altri sono alquanto arbitrarie. Lo Haenel, premesso ciò, ricorda che la grandezza angolare sotto cui ogni volta è veduta da noi la luna non varia mai, restando costantemente $= 31'$. Gli errori di apprezzamento dipendono adunque da cagioni soggettive. Avvengono in egual modo — si domanda l'autore — i nostri apprezzamenti di grandezza sul piano del suolo e nel piano verticale diretto allo zenith? No: all'orizzonte si vedono gli oggetti a una distanza finita, che noi valutiamo valendoci della esperienza acquisita coi movimenti dei nostri muscoli, del nostro corpo, dei nostri occhi; mentre allo zenith non ci vengono in soccorso che le esperienze retiniche. All'orizzonte l'impressione visiva consta di due componenti, grandezza dell'immagine della

(1) *Der Schraum auf Grund d. Erfahrung, Psych. Unters.*, Leipzig, 1907.

(2) *Die Gestalt d. Himmels u. Vergrösserung d. Gestirne am Horizonte*, " Zeitschr. f. Psych. „, Bd. LI, Heft 3-4, S. 161 ff., 1909.

Digitized by Google

retina, e distanza: allo zenith, della sola immagine retinica. Anche la luna giace a distanza non apprezzabile, ed è misurata dall'ampiezza della sua immagine nel totale campo visivo. Quando però compare all'orizzonte, è veduta insieme con gli oggetti terrestri; e all'orizzonte un oggetto compreso da un angolo visivo di 31′ è apprezzato già molto grande. Questo apparente ingrandimento è dunque per lo Haenel non una impressione sensoriale semplice, ma l'espressione di un processo psichico complesso. L'argomento fu ancora trattato recentemente da Pozděna (1), Jaensch (2), Alberto Müller (3), ecc.

La importanza della questione è tale che, a volerla trattare per esteso, si dovrebbe approfondirla sino a tentar la ricerca dell'origine delle rappresentazioni spaziali visive: ricerca che ci porterebbe indietro sino a Kant, o almeno a Giovanni Müller (4), Hering (5), Helmholtz, ecc. Però accenniamo brevissimamente un punto che qui ci può riguardare. Helmholtz dice che codeste rappresentazioni di spazio (egli usa ancora la parola kantiana " Anschauung „) sono prodotto della esperienza e dell'esercizio. Dalle esperienze di Chedelsen, Wardrop, ecc. sui ciechi nati, divenuti veggenti in seguito ad una operazione, risultò che, malgrado quelli potessero già prima dell'operazione distinguere in qualche modo il chiaro dallo scuro (è difficile dire se vi siano ciechi nati in senso assoluto, ossia individui nei quali, pur essendo presente l'intero apparecchio visivo ma mancante la funzione e quindi la prova della rispondenza dell'organo, ritenuto specifico, allo stimolo adeguato, sia affatto esclusa la possibilità di recezione degli stimoli luminosi, e del concetto di luce e tenebre, e della capacità di rendersene conto), e anche le direzioni della luce, non possedevano tuttavia un giudizio sulla distanza degli oggetti, e percepivano in modo imperfetto

(1) *Eine Methode z. experiment. u. konstructiven Bestimmung d. Form d. Firmamentes*, Bd. LI, H. 3-4, S. 200, 1909.

(2) *Zur Analyse d. Gesichtswahrnehmungen*, 4. " Ergänzungsband d. Zeitschr. f. Psych. u. Physiol. d. Sinnesorg. „, Leipzig, 1909.

(3) *Einige Bemerkungen üb. d. Täuschung am Himmelsgewölbe, etc.*, " Arch. f. d. ges. Psych. „, Bd. XVI, H. 3-4, S. 549, 1910.

(4) *Zur vergleichenden Physiologie d. Gesichtssinnes*, 1826.

(5) " Beitr. z. Physiol. „; e *Raumsinn d. Auges*, " Hermann's Handb. d. Physiol. „, III, 1, S. 447, 1879.

Digitized by Google

la formazione e grandezza di questi, specie se mancavano rilievi e incisioni. Un operato di Franz credeva sì vicini alcuni oggetti lontani, che temeva ad ogni istante di urtarli. Tutti questi operati percepivano le impressioni in ordine spaziale, ma paragonandole con le rappresentazioni tattili, sia facendo uso del toccamento immediato, sia suscitando rappresentazioni tattili riprodotte (alcuni sentivano, senza toccare, una specie di impressione tattile alla punta delle dita, per una specie di abitudine di localizzazione (1)). Sicchè appare abbastanza evidente che veramente — come opina Helmholtz — l'esperienza e l'esercizio sono necessari se vogliamo farci una, se non esatta, approssimativa rappresentazione della grandezza in rapporto con la distanza dei corpi che noi vediamo disseminati intorno a noi nello spazio esterno.

Ed è pur sempre l'esperienza che ci guida anche nell'apprezzamento della forma del cielo. Se noi osserviamo i movimenti delle nubi, li vediamo compiersi in un piano presso a poco parallelo a quello della superficie terrestre quale essa ci appare, cioè su una superficie non sferica ma leggerissimamente incurvata in basso e in lontananza, dove si fonde in apparenza con la linea dell'orizzonte presso a poco all'altezza della nostra linea visiva. Se non ci sono nubi, più difficile è determinare la forma della volta celeste: ad ogni modo essa non può apparire sferica, ma piuttosto una immensa superficie colorata che si sovrappone, a distanza incerta, al piano del suolo e lo seconda e accompagna sino a ricongiungersi con esso nel lontano orizzonte. Insomma questa forma è per noi relativa alla forma e posizione degli oggetti circostanti. Veduto da un finestrino di una cella o di una vettura, esclusa la visione del suolo, il cielo al primo momento sembra un piano verticale, se non ci sono sfumature e gradazioni di luce: veduto da una pianura, sembra più depresso e meno sferico che non da una torre, da una collina o da un monte. Il fatto dell'apparente ingrandimento della luna all'orizzonte, ci sembra che sia di natura diversa, e fa piuttosto pensare alla forte ingerenza dello stato dell'atmosfera: tanto è

(1) Un fatto analogo fu recentemente scoperto dal Kiesow (*Ueber einige Berührungstäuschungen,* " Arch. f. d. ges. Psych. „, Bd. X, H. 3-4, S. 311 ff.).

Digitized by Google

vero che quanto più la luna (e anche il sole) si vede ingrandita all'orizzonte, tanto meno appare luminosa e splendente, ma tanto più colorata di tinte che stanno tra il giallo ed il rosso vermiglio. Nelle sere brumose di Novembre e Dicembre o in sere di Maggio in cui l'aria è afosa, si può vedere il sole tramontare ingrandendosi e accendendosi di codesti colori, oppure la luna elevarsi facendosi man mano più piccola, più nitida e lucente di un bianco argenteo. Ma l'atmosfera può essere limpidissima, e l'illusione d'ingrandimento della luna all'orizzonte sussistere egualmente. E qui torna in acconcio di ricordare che noi facciamo più precisi apprezzamenti di corrispondenza tra distanza e immagine retinica all'orizzonte che non allo zenith. Di un oggetto che si trova all'orizzonte è più facile e più conforme alla nostra esperienza il conoscere la distanza e perciò la grandezza che esso deve avere a tal distanza e che esso ha realmente in confronto di altri oggetti noti. Non è che sia maggiore la distanza (V. le esperienze di Claparède e di Haenel), ma si apprezza sempre in tal caso la grandezza insieme ed in rapporto con la distanza, e quindi anche la distanza in rapporto con la grandezza. Isolando l'oggetto da ogni mezzo di confronto, in modo che appaia in una direzione dello spazio ed in una orientazione a noi affatto sconosciuta, l'apprezzamento della grandezza si fa più difficile. Naturalmente oggetti lontani, come montagne od astri, si vedono più grandi quando l'atmosfera è carica di vapori, ossia quando il mezzo interposto tra noi e quelle è più denso del solito (difatti astri come il sole e la luna appaiono più vicini e più piccoli a cielo tersissimo: la luna sembra in tali casi poco più lontana di una comune lampada ad arco). Ma ciò non spiega che un caso particolare. Come spiegare, per esempio, che in una giornata limpida, specialmente al mattino o alla sera, guardando dalla vetta di un alto monte verso punti egualmente lontani, ma di cui l'uno sia disgiunto da noi dalla sola atmosfera, e l'altro da una serie di particolari conosciuti, si ha l'impressione che il primo sia anche più vicino del secondo? L'illusione è reale e tanto più forte quanto più un tale punto od oggetto lontano è isolato nello spazio, l'aria limpida e scarica, il grado di chiarore dell'oggetto massimo o minimo, i suoi contorni evidenti e non diffusi, accentuati i contrasti ed abolite le sfumature pallide. L'illusione può ancora aumentarsi nel caso che

Digitized by Google

l'oggetto considerato presenti all'osservatore una superficie sprovvista di particolari, sia uniformemente illuminato, e inoltre sconosciuto nella sua grandezza assoluta e relativa. Ora, come è più facilmente sovrapprezzata quella estensione che è riempita e che può tutta intera essere percorsa dalla nostra linea visiva di fissazione (Wundt), così al contrario è subapprezzata una estensione o distanza non riempita e che sopratutto sia sconosciuta alla nostra varia esperienza. Valga un esempio. Guardando a distanza dalla terrazza dell'osservatorio alpino al Monte dei Cappuccini di Torino in una giornata chiara di primavera, si vedono le Alpi più vicine e rimpicciolite che non nei giorni brumosi: ciò nondimeno noi ce le rappresentiamo ancora molto lontane, perchè separate da noi per una estesa pianura visibile e disseminata di oggetti noti. Una volta ch'io mi trovai invece sulla vetta della Ciamarella, a m. 3676 d'altitudine, credetti veder lontano anzi vidi realmente lontano non più di dieci chilometri il Monte Bianco, che invece ne dista non meno di 40 in linea retta. Dalla vetta del Pizzo Rotondo (Gruppo Gottardo) a m. 3197, mentre mi apparivano rimpiccioliti ma distinti i borghi di Madrano e Brugnasco oltre Airolo, ad una distanza apparente di 18 km. (ciò che corrispondeva al vero), vedevo vicino a me, immediata, verso Nord-Ovest la bianca vetta del Galenstock, che pure non dista di h meno di 18 km. Ciò, naturalmente, perchè i primi si vedevano allo sfocio di Val Bedretto disseminata di particolari noti, mentre la seconda (e con essa il Finsteraarhorn e gli Schreckhörner) costituiva un oggetto di grandezza assoluta ignota, isolato in un'atmosfera limpidissima, scintillante al sole, uniforme. Il gruppo Ortler-Cevedale posto ad oriente sotto i raggi diretti del sole e dietro molte catene di monti, appariva annebbiato e lontano. L'inganno era tale da aspettarsi di veder comparire, p. es., in vetta al Galenstock un alpinista di grandezza naturale. Questa illusione di piccolezza e vicinanza si ripete sempre nei ghiacciai, qualunque sia l'inclinazione di questi, purchè si mantengano costanti le condizioni suaccennate di direzione dei raggi luminosi (molto inclinati e provenienti di fronte), di limpidezza dell'aria, di esclusione di ombre, di assenza o scarsezza di particolari in modo da avere dinanzi soltanto una superficie lucente e ininterrotta di assimilazione. Così il ghiacciaio d'Alpien al Monte Leone (Alpi Lepontine)

Digitized by Google

sembra, in tali condizioni, ampio come un cortile. Il ghiacciaio del Rodano al di sopra della potente cascata di seracchi, tra la Furka ed il Naegelisgraetli, non par davvero della lunghezza di ca. 10 km. La vetta del Monte Bianco, veduta dalla capanna Vallot, dà una impressione di bassezza e di esiguità. Salendo al Lysjoch e guardando a destra, la capanna Margherita appare un giocattolo posto su un mucchietto di neve vicino, mentre è lontana qualche chilometro. Non altrimenti una persona di mia conoscenza, trovandosi per la prima volta in montagna, si meravigliava che nei minuscoli paeselli lontani potessero trovar posto delle persone di grandezza normale. Il ghiacciaio d'Aletsch (grosser Aletsch Gletscher) veduto dall'Eggishorn, sembra un viale da giardino, mentre è largo in media 1-3 km. e lungo 25-30 km., e si trova incredibile che occorrano 8 o 10 km. a risalirlo dal Maerjelensee sino al Jungfraujoch. Se vi si ode il rombo di una valanga, ci si aspetta di vederla in prossimità immediata. Ma se per caso lo sguardo cade verso lo sfocio, sui microscopici châlets d'Oberaletsch, si ristabiliscono i rapporti di grandezza tra questi e l'ambiente, e la nostra rappresentazione si corregge. Così il panorama del Gornergrat, che comprende più di 40 ghiacciai, sembra mancare di grandiosità; e quando su quei ghiacciai si scopre qualche alpinista, lo si trova troppo piccolo. Illusioni o sorprese di questo genere capitano anche sul mare, in giorni sereni, guardando alle coste. Talora si danno montagne che per i contorni ricordano oggetti noti come case, torri, zolle, ecc., e perciò possono ritenersi di una grandezza assoluta non diversa da quella di tali oggetti. Inoltre nella impressione che riceviamo della forma di una montagna agiscono sempre (come accade per illusioni ottico-geometriche) delle fusioni associative, delle assimilazioni psichiche. Poi ci sono dei fattori che concorrono ad aumentare o favorire queste illusioni. In alta montagna, l'aria è in generale più limpida e rarefatta (le fotografie prese in alta montagna sono più nitide ed evidenti e danno una impressione di maggiore immediatezza). Il candore e il luccichio dei ghiacciai producono una impressione così viva sulla nostra retina, che sembrano venir quasi a contatto con essa. La mancanza o scarsezza di particolari o mezzi d'analisi sulle superfici ghiacciate, favoriscono il prodursi di una impressione di immediatezza, perchè non possiamo giovarci, pel controllo, di elementi

Digitized by Google

noti alla nostra esperienza. Con potenti cannocchiali, potendosi discoprire talora maggiori e più noti particolari, l'assegnamento e la distribuzione dei rapporti di grandezza e distanza si fa più agevolmente malgrado l'ingrandimento prodotto dalle lenti e il forte avvicinamento. Dunque è evidente che le dimensioni dei ghiacciai e in genere delle estensioni deserte in alta montagna si apprezzano non secondo i rapporti tra la grandezza apparente e la distanza, ma secondo l'angolo visivo e quindi in conformità della grandezza della immagine retinica confrontata con l'ampiezza totale del campo visivo o con immagini rappresentative reali o riprodotte di oggetti noti per grandezza e distanza: in fondo si fa lì un apprezzamento dedotto da impressioni immediate. Ma in questi casi ci sono anche altre ragioni di disturbo e di errore. Il giudicar da lontano l'altezza delle montagne è cosa assai ardua. Nel piano verticale v'è meno occasione di vedere ed apprezzare estensioni, e vi si danno meno oggetti di confronto: l'esperienza e l'esercizio ci soccorrono qui assai meno. Al contrario è continuo e famigliare alla nostra coscienza l'apprezzamento di grandezza e distanza nel piano orizzontale del suolo. Guardando da Torino alle Alpi, non si crederebbe che esse siano in media dell'altezza di circa tre chilometri, perchè sembrano molto più basse. Altrettanto difficile è giudicare la distanza e la grandezza assoluta di un pallone in un dato momento della sua ascensione, o di un aquilone sospeso nell'aria, o di un uccello che vola. Dal Santuario di Nòtre Dame de la Guérison, presso Courmayeur, il ghiacciaio della Brenva e la massa del Monte Bianco appaiono non più alti di una casupola, ossia non più estesi della immagine retinica della chiesuola vicina. Il Monte Rosa, visto dal Belvedere di Macugnaga, appare alto come un semplice mucchio di detriti. In questi casi il nostro apprezzamento può anche riuscir meno sicuro per la posizione rientrante delle vette dei monti in confronto della loro base, per cui quelle appaiono più basse: inoltre quanto più una catena di monti è estesa in lunghezza, tanto più diminuisce l'impressione della sua altezza, e viceversa un picco erto ed isolato appare aumentato in altezza: poi un monte può apparire più o meno esteso secondo che è in confronto immediato, nella coscienza, con uno spazio di cielo più o meno grande, o con oggetti di dimensioni relativamente più o meno grandi, ecc.

Digitized by Google

Nella mia città di Cremona, quando trovandomi per istrada, vedo affacciarsi delle persone alla piattaforma del Torrazzo alta ca. m. 100 sul suolo, mi meraviglio di trovarle troppo piccole; mentre le medesime non mi danno più un'impressione di piccolezza se viste ad una egual distanza nella via. Tali sorprese, come vedemmo notato da Helmholtz, capitano più spesso ai bimbi perchè sono sprovvisti di esperienza. Quando però essi incominciano a rendersi conto delle dimensioni degli oggetti, sono indotti a sovrapprezzarle, anche perchè mettendo in confronto gli oggetti esterni col proprio organismo, coi proprii movimenti, statura, ecc., li trovano grandi più che non li trovino gli adulti. L'adulto però conserva la tendenza a subapprezzare la grandezza di oggetti situati in alto ed a distanza, ed è poi indotto a correggere la prima impressione commettendo l'errore contrario, cioè nel senso di un sovrapprezzamento. Così, mentre le colonnette della piattaforma superiore di una torre viste da lungi mi sembran troppo piccole, se io salgo sulla torre sino a toccarle, mi sembrano ancora troppo piccole, perchè per aver voluto correggere la prima impressione mi sono preparato a riceverne una di grandezza eccessiva. La statua di Vittorio Emanuele II a Torino, che è collocata molto in alto, sembra delle dimensioni di una persona normale o poco più; mentre è parecchie volte più grande. Guardando monocularmente un oggetto lontano (p. es. la luna) all'orizzonte, e confrontandolo con uno vicino eguale e più piccolo che produca sulla retina una immagine identica, siamo sorpresi dal fatto che, malgrado questa eguaglianza di immagini, l'oggetto all'orizzonte pare sempre più grande. Ripetendo la stessa esperienza quando quell'oggetto è collocato nella direzione dello zenith, quella sorpresa diminuisce, e l'eguaglianza delle due immagini è più facilmente riconosciuta. Una estensione in altezza, veduta non più lungi ma in vicinanza immediata, p. es., una casa o torre vedute dalla base, ci danno invece immediatamente la impressione di una estensione troppo grande. Una casa, in generale, ci pare, a primo aspetto, alta parecchi metri più del vero, anche se si guarda col capo riverso all'indietro. Guardando dall'alto di una torre (o casa) in basso, codesta illusione diminuisce. Sul piano del suolo, invece, l'apprezzamento di grandezza e distanza è facilitato, oltre che dalle ragioni riferite, anche dal vedere gli og-

Digitized by Google

getti scaglionati successivamente su un piano che continua in apparente salita sino all'orizzonte: difatti, sdraiandoci al suolo in modo che questo coincida quasi col piano orizzontale della linea visiva, e guardando da tal posizione i varii oggetti (persone, case, alberi, ecc.), questi si vedono ammucchiati l'uno dietro l'altro con diminuzione dell'effetto di profondità. Allo stesso modo se guardiamo ad una persona ritta sul tetto di una casa o entro la navicella di un pallone ad una determinata altezza e distanza, la troviamo subito troppo piccola; e però l'illusione si fa minore se quella persona si trovi egualmente in alto e distante ma non sospesa, bensì separata da noi da una strada o gradinata in salita; perchè in quest'ultimo caso si presenta la superficie continua e conosciuta del suolo come ausilio alla nostra rappresentazione di grandezza e di distanza. I cacciatori si fanno un'idea meno errata degli altri sulla grandezza e distanza degli uccelli, possedendo un'esperienza precedente e avendo occasione di osservare la traiettoria del volo di quegli animali.

Tornando per un momento al caso speciale degli apprezzamenti di estensione e distanza in montagna, bisogna ancora ricordare qualche altra cagione di errore del nostro giudizio. Quando man mano si ascende un monte e si guarda agli altri monti più lontani, si pone troppo in alto il punto che si crede alla nostra medesima altitudine: per cui ci si crede sempre troppo in su. Per punti lontanissimi, ciò può essere spiegato in parte dalla rotondità della terra: ma nei casi più comuni ciò probabilmente è dovuto al fatto che il piano orizzontale d'orientazione è per noi il suolo. Quando questo è parallelo al livello delle acque, sembra leggermente salire sino all'orizzonte lontano, che però ci appare un po' più basso del nostro occhio fissante. Ma se il suolo è realmente in salita dinanzi a noi, allora apparentemente si alza il piano orizzontale consueto della nostra linea visiva, quasi per mantenersi col primo nel medesimo rapporto di parallelismo. Se il suolo piano ed orizzontale è veduto da una grande altitudine, appare come se fosse in ancor più forte ascesa, sebbene in realtà non lo sia menomamente, verso l'orizzonte lontano. Naturalmente ciò si verifica meglio per oggetti lontani che per vicini, data l'orientazione nostra sul suolo e la piccolezza quasi trascurabile dell'angolo visivo. In generale la superficie orizzontale del suolo e la posizione perpendicolare

Digitized by Google

che assume rispetto ad essa il nostro organismo, costituiscono dei fattori primarii per la nostra orientazione sulla superficie terrestre. Se il suolo è appena insensibilmente inclinato o è tale soltanto in apparenza, la nostra psiche si trova nell'impossibilità di distinguere tra il piano orizzontale assoluto di orientazione e quello sul quale ci troviamo o ci immaginiamo di trovarci; e così nella nostra rappresentazione essi si fondono fra di loro. Così si può spiegare perchè, viaggiando in ferrovia o in piroscafo, quando la vettura o il battello nel compiere una lenta curva s'inclinano dall'uno dei lati, si abbia l'impressione che gli oggetti all'esterno s'inclinino in senso opposto: perchè, sentendoci perfettamente orientati sul suolo e tra le pareti che sono immediatamente prossime a noi, l'impressione della nostra giusta posizione si prolunga, per così dire, all'esterno ove quindi gli oggetti per contrasto ci sembrano inclinati in senso opposto.

Per mostrare ancora in altro modo come l'esercizio e la lunga esperienza comune siano divenuti una forma imprescindibile per i nostri apprezzamenti nel mondo delle percezioni visive, non sarà inopportuno citare un caso, che questa volta riguarda la prospettiva. Se ci poniamo dinanzi ad una statua o ad una persona immobile in tutte le sue membra, e facciamo in modo che il suo sguardo venga ad incontrare il nostro, e poi man mano ci tiriamo da parte, osserviamo che la prospettiva ne viene mutata e che il suo sguardo non si dirige più su di noi. Invece se ci vien fatto di incontrar col nostro lo sguardo di una persona dipinta in un quadro, non riusciamo ad evitarlo neppure spostandoci lateralmente, perchè l'occhio che ci fissa dal dipinto non potrà mai essere veduto di fianco, giacendo su una superficie piana che non ammette modificazioni di prospettiva. Per lo stesso motivo la direzione in cui appare una persona coricata in iscorcio in un quadro, sembra che ci accompagni nei nostri spostamenti laterali. E per la stessa ragione lo sguardo di una persona dipinta che non ci fissi non potrà mai essere incontrato dalla nostra linea di fissazione. Un dipinto su un soffitto raffigurante in iscorcio una persona ritta in piedi, appare errato a chi lo contempli perpendicolarmente dal basso con la linea visiva verticale, perchè l'osservatore si aspetterebbe di vedere solo la pianta di un corpo umano, e invece vede una figura distesa di fianco. Ma se l'osservatore si pone a di-

Digitized by Google

stanza in modo da vedere lo scorcio col suo asse longitudinale coincidere presso a poco con la propria linea visiva, allora la figura, pur presentando all'osservatore più vicina la testa e più lontani i piedi, apparirà sorgente dalla linea del suolo o dell'orizzonte e protendentesi verso l'alto.

Concludendo: gli errori, di cui abbiamo discorso, e che si commettono in generale nell'apprezzamento della grandezza e della posizione degli oggetti disseminati nello spazio, sono dovuti in massima parte alla relatività della nostra misura visiva: per correggerli, ossia per mettere la grandezza nel suo giusto rapporto con la distanza, e la posizione e la forma degli oggetti in rapporto esatto con la nostra orientazione nello spazio e con la prospettiva, si rende necessaria una lunga esperienza acquisita con la cooperazione di altri campi sensoriali.

Un ringraziamento speciale rivolgo al Prof. F. Kiesow, che mi sovvenne gentilmente del suo consiglio e del suo aiuto.

R. Istituto di Psicologia Sperimentale (Fondazione E. E. Pellegrini) diretto dal Prof. F. Kiesow, in Torino.

Sul raddoppiamento di frequenza di una corrente per mezzo di lampade a filamento metallico.

Nota II del Socio GUIDO GRASSI.

Credo opportuno aggiungere qui alcune considerazioni sugli esperimenti che ho descritto nella Nota precedente.

La spiegazione sommaria degli effetti osservati, quale io l'ho indicata, è soltanto un abbozzo; essa mi servì bensì di guida nell'eseguire gli esperimenti e può dar ragione del fenomeno nel suo andamento generale, ma non è certamente sufficiente a spiegarne i particolari e a far conoscere tutti i fattori che influiscono sul fenomeno.

Nell'esperimento primo, dove la lampada metallica è inserita in uno dei lati di un ponte di Wheatstone, l'onda di doppia frequenza che si manifesta nel ponte è sempre simmetrica rispetto all'onda fondamentale, cosicchè propriamente non si può

Digitized by Google

dire che sia una corrente di frequenza doppia, se non limitatamente ad un mezzo periodo della corrente principale. Quando la corrente principale s'inverte, l'onda di doppia frequenza si inverte pure; si hanno quindi due semiperiodi positivi seguiti da due semiperiodi negativi, come se si trattasse di una corrente pulsante e nello stesso tempo alternata. L'alternativa però non è in concordanza di fase con quella della corrente principale, perchè invece è sfasata di un quarto di periodo.

Ma ciò che più deve colpire, se ben si riflette, nel risultato dell'esperimento, è che la corrente nel ponte viene ad avere i due semiperiodi eguali; ciò non mi sembra facilmente spiegabile, sebbene fosse prevedibile, come io stesso previdi, che si dovesse produrre una oscillazione di frequenza doppia. Il risultato interessante adunque consiste in ciò che

1° la corrente nel ponte ha i due semiperiodi di eguale lunghezza;

2° la corrente stessa è rappresentata da una curva che nel semiperiodo positivo ha una forma quasi identica a quella del semiperiodo negativo.

Se si tenta di determinare *a priori* la forma della curva della corrente nel ponte, seguendo l'andamento della temperatura del filamento e la conseguente variazione di resistenza della lampada, e quindi la variazione nel valore e nel segno del potenziale all'estremità del ponte, si arriva d'ordinario a curve assai più irregolari di quella realmente osservata. D'altronde io credo ben difficile arrivare ad una soluzione esatta per questa via, data la imperfetta cognizione che possiamo avere del modo di variare della temperatura del filamento al variare della corrente, quando la temperatura è ad un grado così alto che si avvicina in media ai 2000°. Non sappiamo poi neppure come al crescere della temperatura, in quelle condizioni, aumenti la resistenza del filamento: sappiamo solo il segno delle variazioni; non ne conosciamo la grandezza e quindi possiamo appena prevedere pressapoco l'andamento del fenomeno, non le sue leggi quantitative.

Perciò il risultato dell'esperimento è più interessante e non credo invece che valga la pena di esporre i tentativi fatti per costruire teoricamente la curva della corrente pulsante e alternata.

Digitized by Google

Un altro particolare interessante mi sembra l'aver messo in evidenza che la variazione di resistenza della lampada metallica sotto l'azione della corrente alternata, pur con frequenza di circa 50 periodi, si dimostra realmente così grande da produrre un effetto molto sensibile; cioè deve realmente la lampada subire una oscillazione di temperatura piuttosto forte.

Posto ciò, passiamo a considerare il secondo esperimento descritto nella Nota precedente.

In un circuito che contenga una lampada metallica, se si fa una derivazione fra due punti fissi, su di un conduttore all'infuori della lampada, la caduta di tensione fra di essi dovrà subire una variazione periodica, con frequenza doppia, che si sovrapporrà alla variazione di frequenza fondamentale.

Però anche qui non è possibile prevedere direttamente come questa oscillazione potrà manifestarsi relativamente alla sua forma ed alla sua fase. La differenza di potenziale fra i due punti fissi subisce la variazione periodica dovuta alla forza elettromotrice applicata, ma nello stesso tempo deve pulsare come se i punti, fra i quali la differenza di potenziale ha un rapporto costante colla f. e. m. applicata, si spostassero continuamente oscillando a destra e a sinistra dei punti d'attacco della derivazione.

Essendo il caso simile a quello dell'esperimento col ponte e visto il risultato di quello, cioè che nel ponte si stabilisce una pulsazione di frequenza doppia e molto regolare, è lecito supporre che anche qui all'onda fondamentale si sovrapponga una pulsazione doppia. Ma non si può prevedere se questa sarà più o meno regolare nei suoi semiperiodi, se sarà simmetrica o dissimmetrica rispetto all'onda principale; tanto più se si riflette che la stessa deformazione della corrente, prodotta dalla variazione di resistenza della lampada, deve influire a sua volta a far variare la legge di successione delle temperature del filamento.

Perciò il risultato dell'esperimento fatto, inserendo un semplice galvanometro per corrente continua nel circuito derivato, è degno di nota, in quanto mette in evidenza che la detta pulsazione avviene in modo che il valor medio della corrente nel semiperiodo positivo è diverso dal valor medio nel semiperiodo negativo, precisamente come se vi fosse un armonico di fre-

Digitized by Google

quenza doppia spostato alquanto di fase, ed in tali condizioni il galvanometro dà una deviazione permanente.

Affinchè il lettore possa meglio giudicare del valore dell'esperimento ricorderò più in particolare come era disposto.

Il circuito era formato da una lampada metallica, tipo Z, a filamento di tungsteno, e da una resistenza in serie formata da un reostato a filo metallico avente la resistenza complessiva di 4,7 ohm. Il galvanometro, corazzato, colla resistenza di circa 10 ohm, si leggeva con cannocchiale e scala, ed era derivato su di un piccolo tratto del reostato comprendente la resistenza 0,19.

Il circuito era alimentato con corrente alternata di circa 0,37 Ampère. Al primo chiudere del circuito del galvanometro sempre si aveva una deviazione fortissima ora da un lato ora dall'altro; ma poi, tenendo chiuso il circuito, l'oscillazione diminuiva e l'ago si arrestava con una deviazione dallo zero che era da 13 a 14 centimetri. L'ago propriamente vibrava sempre rapidamente per effetto della corrente alternata, ciò che impediva di vedere chiaramente i numeri della scala e bisognava riferirsi a qualche segno particolare, luminoso, per fare la lettura. Ma sul risultato dell'esperimento non vi è dubbio.

Quando si aveva al posto della lampada un semplice reostato in cui le variazioni di temperatura erano certamente piccolissime, la deviazione al galvanometro si riduceva a qualche centimetro, mentre nel circuito principale la corrente aveva la stessa intensità di prima. L'influenza della lampada metallica era dunque bene accertata.

Nei circuiti da me sperimentati vi erano sempre generatori di corrente alternata contenenti masse di ferro; nell'ultimo esperimento l'alternatore era con indotto senza ferro, ma nel circuito magnetico vi era sempre il ferro dell'induttore. Perciò non è escluso che anche i fenomeni d'isteresi magnetica possano influire sui risultati.

Però io credo che a spiegare l'andamento generale del fenomeno presentato dalla lampada metallica, si debba tener conto piuttosto degli effetti termoelettrici prodotti dalle oscillazioni di temperatura, poichè questi effetti devono riprodursi ad ogni mezzo periodo e sempre col medesimo segno qualunque sia la direzione della corrente che riscalda il filamento.

Digitized by Google

Relazione sulla Memoria del D.r Alberto Civalleri intitolata: *Sullo sviluppo della Guaina midollare nelle fibre nervose centrali.*

Lo sviluppo della guaina midollare nelle fibre nervose centrali fu già più volte argomento di studio per parte degli istologi, tuttavia non si è potuto fino ad ora delinearne nettamente la storia, sia perchè esistevano notevoli lacune, sia per i risultati spesse volte in opposizione gli uni agli altri che si erano ottenuti. Per queste considerazioni il D. Alberto Civalleri, assistente nell'Istituto anatomico di Torino, si è proposto di fare delle ricerche metodiche sulla midolla spinale del pollo col sussidio dei più moderni metodi di fissazione e di colorazione allo scopo di seguire tutte le fasi dello sviluppo delle fibre midollate.

Comprendendo la grande importanza che in questo fenomeno doveva avere il substrato in cui compaiono e crescono le fibre nervose, egli richiama sopratutto l'attenzione su di esso, cioè sul velo marginale, che egli studia e minutamente descrive nelle successive e profonde modificazioni cui va incontro finchè si trasforma nel tessuto di sostegno dei fasci di fibre della sostanza nervosa midollare. Così egli potè osservare che il velo marginale, costituito sulle prime dalle basi esterne delle cellule epiteliali dell'abozzo del neurasse, si trasforma presto in un simplasma di struttura trabecolare. Non gli spazi limitati dalle trabecole, ma le trabecole stesse del simplasma sono invase dalle neuriti che originano dai neuroblasti dello strato del mantello o dai gangli spinali. Per tale intimo rapporto la sostanza protoplasmatica delle trabecole viene a costituire una primitiva guaina alle neuriti o fibre nervose.

Nella detta guaina protoplasmatica appaiono minute goccioline lipoidi, le quali addensandosi attorno alla fibra nervosa vi formano una guaina continua lipoide, ma non ancora mielinica.

Ad un certo tempo dello sviluppo nel simplasma del velo marginale appaiono dei nuclei emigrati dalla zona del mantello, come pure compaiono delle cellule vasoformative provenienti dal mesenchima avvolgente il tubo midollare. Una parte del

Digitized by Google

simplasma si addensa attorno ai nuclei e forma con questi degli elementi cellulari, i primi spongioblasti del velo midollare. Fra questi elementi alcuni, che assumono una forma ad anello, furono ritenuti da molti le sole cellule mielogene del velo marginale; invece, secondo il Civalleri, essi avrebbero questa proprietà in comune con tutti gli altri spongioblasti: la forma ad anello sarebbe solo un fatto accidentale dovuto a speciali condizioni di rapporto rispetto alla fibra nervosa. In ogni modo le nuove cellule si sostituiscono alle primitive trabecole simplasmiche nella formazione e nell'accrescimento della guaina midollare, con la sola differenza che la sostanza da esse formata già allo stato di granulo offre le reazioni caratteristiche della mielina.

La minuta relazione delle pazienti indagini del Civalleri è corredata da una tavola di figure. Nello scritto l'Autore non solo riporta tutta la storia dell'argomento, ma si intrattiene anche su altre questioni che sebbene di ordine secondario pure servono a dare rilievo ad alcuni fatti dell'istogenesi ed a portare una spiegazione dei risultati spesse volte opposti cui erano venuti gli osservatori precedenti.

Concludendo, noi crediamo che la Memoria del D.r Civalleri e per l'argomento che tratta e per il contributo che porta sia meritevole di essere letta alla Classe e di essere inserita nei volumi accademici.

L. Camerano
R. Fusari, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

Digitized by Google

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 19 Giugno 1910.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: NACCARI, Direttore della Classe, SALVADORI, D'OVIDIO, MOSSO, SPEZIA, SEGRE, PEANO, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, MATTIROLO, FUSARI e PARONA ff. di Segretario. — È scusata l'assenza del Socio Senatore CAMERANO.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente.

Il Presidente rivolge vive ed affettuose parole di condoglianza al Socio SALVADORI, che ebbe in questi giorni la sventura di perdere il padre. Il Socio SALVADORI ringrazia.

Si dà comunicazione della lettera del Ministero dell'Istruzione Pubblica che annunzia l'approvazione Sovrana delle nomine seguenti: Prof. Luigi BALBIANO a Socio nazionale residente, e dei signori Professori Massimiliano NOETHER, Adolfo von BAEYER, G. Giuseppe THOMSON, Federico Edoardo SUESS a Soci stranieri. Si comunicano inoltre i ringraziamenti, per la loro nomina a Socio corrispondente, dei signori F. ENRIQUES, W. C. KILIAN, T. LEVI-CIVITA, J. BOUSSINESQ, V. CERULLI, A. LACROIX, L. MANGIN, G. B. GUCCIA, P. BACCARINI, M. CANTONE, A. HALLER, sir G. H. DARWIN, C. NEUMANN, E. von MEYER, A. BATTELLI, E. CAVALLI, A. KOSSEL, A. GARBASSO, R. WILLSTÄTTER e P. ZEEMAN.

Digitized by Google

Il Presidente annunzia l'invio delle seguenti opere in omaggio:

dal Socio corrispondente sir Giorgio Howard DARWIN: *Scientific Papers*, Cambridge, 1907-1910, 3 vol. in-8°;

dal Socio corrispondente E. von MEYER: *Ueber dimolekulare Nitrile und ihre Abkömmlinge*, Leipzig, 1905, in-8°; *Ueber Konstitution und Bildungsweise der Kyanalkine gennanten trimolekularen Nitrile*, Leipzig, 1905, in-8°; *Neue Beiträge zur Kenntnis der dimolekularen Nitrile*, Leipzig, 1908, in-8°; *Ueber Zersetungsweisen Vierfach-Alkyliuerter Ammoniumverbindungen*, Leipzig, 1908;

dal Socio corrispondente C. NEUMANN: *Ueber das Logarithmische Potential einer gewissen Ovalfläche*, Leipzig, 1909, in-8°.

Il Socio GUARESCHI presenta in omaggio, a nome del Comitato, una Commemorazione in memoria del Prof. Enrico QUENDA fatta a Piacenza dal Prof. S. V. PERIN, ed il Socio GUIDI la 4ª edizione della parte quarta delle sue *Lezioni sulla scienza delle costruzioni*. Il Presidente ringrazia.

Vengono presentati per l'inserzione negli *Atti* i seguenti lavori:

1° C. AIMONETTI, *Una nuova maniera di costruire i livelli a cannocchiale*, dal Socio JADANZA;

2° L. COGNETTI DE MARTIIS, *Contributo alla conoscenza della fecondazione negli Oligocheti*, dal Socio SALVADORI;

3° A. C. BRUNI, *Sui primi stadi di sviluppo della colonna vertebrale dei Rettili e degli Uccelli*, dal Socio FUSARI;

4° G. LINCIO, *Di alcuni minerali dell'Alpe Veglia*, dal Socio SPEZIA;

5° dal Socio PARONA una sua Nota *Sui caratteri micropaleontologici di alcuni calcari mesozoici della Nurra in Sardegna*.

Il Socio NACCARI, anche a nome del Socio JADANZA, legge la relazione sulla Memoria del Prof. G. B. RIZZO intitolata: *Sulla propagazione dei movimenti prodotti dal terremoto di Messina*

Digitized by Google

del 28 dicembre 1908. La relazione favorevole è approvata e così pure si approva con votazione segreta la stampa della Memoria nei volumi accademici.

Il Socio Fusari, anche a nome del Socio Camerano, legge la relazione sulla Memoria del Dr. L. Cognetti de Martiis, intitolata: *Ricerche sulla distruzione normale dei prodotti sessuali maschili*. Approvata la relazione favorevole, la Classe approva con votazione segreta la stampa della Memoria nei volumi accademici.

Infine il Socio Parona, a nome anche del Socio Camerano, legge la relazione sulla Memoria della signorina Dr. G. Osimo su *Alcune nuove Stromatopore giuresi e cretacee della Sardegna e dell'Appennino*. La relazione è favorevole ed è approvata dalla Classe, la quale con votazione segreta ammette la stampa della Memoria nei volumi accademici.

Raccoltasi quindi la Classe in seduta privata procede alla votazione per l'elezione del suo Segretario, essendo ineleggibile il Socio Camerano per compiuto secondo triennio a detta carica, viene eletto il Socio cav. Prof. Corrado Segre, salvo l'approvazione Sovrana.

Digitized by Google

LETTURE

Una nuova maniera di costruire i livelli a cannocchiale.

Nota del Dr. CESARE AIMONETTI

Il principale inconveniente che presentano i livelli a cannocchiale mobile è, come è noto, la diseguaglianza dei perni; la quale ha per conseguenza che, dopo aver corretto l'istrumento colle norme proprie a ciascun tipo, l'asse congiungente i centri dei due perni (*asse meccanico del cannocchiale*) non è orizzontale, ma inclinato all'orizzonte di un angolo dipendente dalla differenza dei loro diametri, dalla loro distanza nonchè dalla forma e dall'ampiezza dell'angolo delle forchette d'appoggio.

Inoltre la ricerca sia della differenza dei diametri suddetti, sia dell'inclinazione residua dell'asse, sia dell'influenza di tale errore sulle battute è, a seconda dei tipi, più o meno difficile; sempre però è una operazione molto delicata. Così nei livelli a cannocchiale mobile e livella fissa od ai sostegni del cannocchiale (tipo Egault) od al cannocchiale stesso (tipo Chézy) essa si determina colla livellazione reciproca, o col metodo cosidetto delle due stazioni; nei tipi a livella mobile si determina colla stessa livella, ed in quelli a livella mobile con vite di elevazione (tipo Brunner, Ertel, ecc.) si richiede anche la conoscenza dell'angolo λ formato dai due lati della forchetta a V di sostegno del cannocchiale.

In nessun caso però si può con questi livelli usuali eliminare strumentalmente tale errore, e quindi avere una visuale perfettamente orizzontale: onde volendo eseguire delle livellazioni di precisione si deve ricorrere a procedimenti speciali, quali la livellazione dal mezzo, ed altri.

Occorrendo tuttavia di dover fare talvolta delle battute da un solo estremo, e quindi di avere delle visuali orizzontali, furono ideati a tale scopo molti altri tipi di livelli più o meno complicati.

Digitized by Google

Così vennero ideati: il livello a compensazione di Breithaupt e quello a due cannocchiali di Brito Limpo, entrambi di costruzione piuttosto complicata; il livello Amsler (1) con livella a doppia graduazione, che richiede la condizione, non facile ad ottenersi, che i due assi della livella siano paralleli fra di loro; il livello Baggi a due livelle (2), per il quale è necessaria una preventiva correzione delle due livelle, correzione che deve eseguirsi sul terreno con tre stazioni; il livello a due livelle, una fissa al cannocchiale, e l'altra mobile ad essa sovrapposta, ideato dai Prof.ri Jadanza e Baggi (3), più semplice dei precedenti, col quale si può ottenere con due sole letture una visuale orizzontale; ma anche questo richiede la preventiva correzione delle braccia delle due livelle, e inoltre che siano eguali gli angoli dei due lati dell'appoggio a V, sia delle forchette di sostegno del cannocchiale, sia dei piedi della livella mobile.

Recentemente la casa Zeiss, sulle indicazioni del D.r Wilde (4) ha costruito un livello ingegnoso di uso abbastanza semplice, che permette di avere delle visuali orizzontali dalla media di quattro letture. Esso è del tipo Amsler, cioè con livella a doppia graduazione: però le due graduazioni non sono segnate, e la bolla, nelle due posizioni della livella, si osserva per mezzo di un sistema di prismi, coi quali si giudica che la bolla è centrata quando le immagini dei due estremi, riflesse dal sistema di prismi, si vedono coincidenti. Inoltre il livello è munito di un cannocchiale ad obbiettivo composto di due lenti, e di distanza focale variabile, girevole attorno al suo asse. In esso il reticolo è a distanza fissa dalla lente obbiettiva, e l'adattamento del cannocchiale alle diverse distanze si ottiene mediante lo spostamento di una lente di distanza focale un po' minore dell'obbiettivo. Sulla lente obbiettiva è incisa una piccola croce, ed il suo coperchio porta un foro al quale si può adattare l'oculare; cosicchè, tolto questo dalla posizione che occupa normalmente e collocatolo davanti all'obbiettivo, in modo da vedere il

---

(1) V. Dingler's, " Polytechnisches Journal „, 1859, Bd. 153, S. 401-406.

(2) Cfr. " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino „, vol. XXXVII (1901-02), pag. 253.

(3) Cfr. " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino „, vol. XLII, 1907.

(4) Cfr. " Zeitschrift f. Instrumentenkunde „, XXIX F., novembre 1909.

Digitized by Google

reticolo che su di esso è inciso, il cannocchiale resta invertito e funziona come obbiettivo la lente che prima serviva per mettere a fuoco il cannocchiale.

Tale livello ha il vantaggio di dare, senza preventive rettifiche, una visuale orizzontale, prendendo la media di quattro letture fatte sempre colla bolla centrata per mezzo della vite di elevazione: due col cannocchiale in condizione normale, e due col cannocchiale invertito, cioè coll'oculare disposto davanti all'obbiettivo, ed in ciascuna posizione facendo una lettura colla livella a destra ed una colla livella a sinistra, dopo aver fatto cioè rotare il cannocchiale di due retti attorno al proprio asse di figura.

Il cannocchiale di cui è munito questo livello, presenta il grave inconveniente di avere il sistema obbiettivo di distanza focale variabile, e quindi il suo ingrandimento è variabile colla distanza della stadia: di più la chiarezza è molto differente nelle due posizioni del cannocchiale. La rettifica completa poi dell'istrumento è un'operazione piuttosto delicata; per cui, pur essendo ingegnoso, dubito che esso possa diventare di uso comune.

Allo scopo perciò di ottenere nei livelli una visuale orizzontale, propongo una semplice modificazione da apportare al cannocchiale che fa parte dei medesimi, colla quale si elimina completamente e facilmente l'errore proveniente dall'ineguaglianza dei perni, qualunque essa sia.

Tale modificazione consiste nel rendere scambiabili fra di loro nel cannocchiale l'obbiettivo col pezzo che porta il reticolo e l'oculare. Perciò esso dovrebbe essere costruito all'incirca come indica la fig. 1. AA' e BB' sono due tubi scorrevoli l'uno dentro l'altro per mezzo di una cremagliera e di un bottone V. Il tubo esterno AA' porta i due perni CC'; esso, anche quando il cannocchiale ha il massimo accorciamento, sopravanza dalla parte M di due o tre centimetri sul tubo interno; il quale, a sua volta, sopravanza dalla parte opposta N di quantità eguale sul tubo esterno. Essi portano rispettivamente in M ed N due anelli di rinforzo, in modo che i due diametri esterni o quelli interni delle estremità M ed N siano esattamente eguali. A queste, o per mezzo di una filettatura a vite, o per innesto a baionetta si possono adattare i due pezzi F e D, che è bene siano di egual peso, dei quali l'uno porta l'obbiettivo O, e l'altro il dia-

Digitized by Google

framma col reticolo, rettificabile per mezzo delle viti *S*, *R*, e l'oculare *L*. Cosicchè, scambiando, con facile manovra, tra di loro i due pezzi, il cannocchiale può servire tanto per guardare nella direzione *LO*, quanto in quella contraria *OL*.

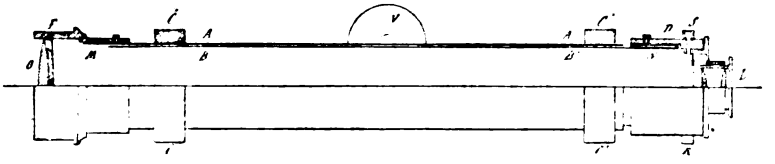


Fig. 1.

Applicando tale cannocchiale ad un livello Egault o ad uno Chézy, ne risultano due tipi di livello che dirò *a cannocchiale girevole*, non essendo più necessaria nè per le correzioni nè per l'uso l'inversione del cannocchiale, ma soltanto la sua rotazione di due retti attorno al proprio asse.

Le correzioni si faranno nei diversi casi nel modo seguente.

1. Livello a cannocchiale girevole e livella fissa ai sostegni del cannocchiale (*tipo Egault*).

La fig. 2 (1) mostra schematicamente il livello: *PQ* è l'asse della livella; *XX'* l'asse verticale; *EF* e *CD* sono le distanze dei centri *F* e *D* dei due perni dalla traversa di sostegno del cannocchiale, cosicchè la retta *DF* rappresenta l'asse meccanico di esso.

Le correzioni si fanno nel seguente modo:

1° Si rende l'asse della livella perpendicolare all'asse *XX'* e questo verticale; ciò si ottiene come in qualunque altro livello di questo tipo.

2° Si rende l'asse meccanico parallelo all'asse della livella: perciò, supposto che l'oculare sia dalla parte *D*, e l'obbiettivo dalla parte *F*, si diriga il cannocchiale ad una stadia *SS'*, e si faccia una lettura a_1; girato quindi il cannocchiale di due retti attorno al proprio asse *DF*, si faccia una seconda lettura a_2:

(1) Tanto in questa, quanto nelle figure seguenti, si suppone per semplicità già eseguita la 1ª correzione.

Digitized by Google

la media delle due letture $a = \frac{a_1 + a_2}{2}$ dà la lettura corrispondente al punto A in cui l'asse meccanico colpisce la stadia.

Si scambi ora nel cannocchiale l'oculare coll'obbiettivo, in modo che questo venga in D. Indi si giri l'alidada di 180° intorno ad XX': l'asse meccanico del cannocchiale assumerà la posizione $F'D'$ simmetrica di FD rispetto alla NM parallela all'asse della livella. Si facciano ora sulla stadia e colla bolla rigorosamente centrata di nuovo le due letture coniugate b_1 e b_2: la media delle due letture $b = \frac{b_1 + b_2}{2}$ darà la lettura corrispondente al punto B in cui l'asse meccanico colpisce attual-

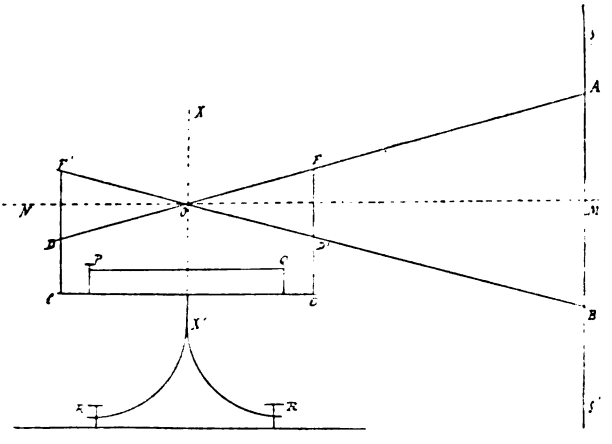


Fig. 2.

mente la stadia, *qualunque sia lo spostamento che abbia potuto subire l'asse ottico* nello scambio accennato tra l'oculare e l'obbiettivo.

È evidente che la lettura m corrispondente al punto M in cui l'orizzontale OM incontra la stadia, sarà data da

$$m = \frac{a + b}{2} = \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + b_1 + b_2).$$

Si muovano ora le viti in C ad E che variano la lunghezza di uno dei sostegni del cannocchiale fino a che la media delle letture coniugate b_1 e b_2 sia eguale ad m.

Digitized by Google

3° Si rende in ultimo l'asse ottico del cannocchiale coincidente coll'asse meccanico muovendo le viti del reticolo finchè si faccia sulla stadia la lettura $b = \frac{b_1 + b_2}{2} = m$.

Si vede facilmente come la lettura m corrispondente alla posizione OM dell'asse meccanico si può ottenere dalla media delle quattro letture; ossia

$$m = \frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2}{4}.$$

Si vede anche come non sia necessario correggere esattamente l'asse verticale, purchè le quattro letture si facciano sempre colla bolla rigorosamente centrata.

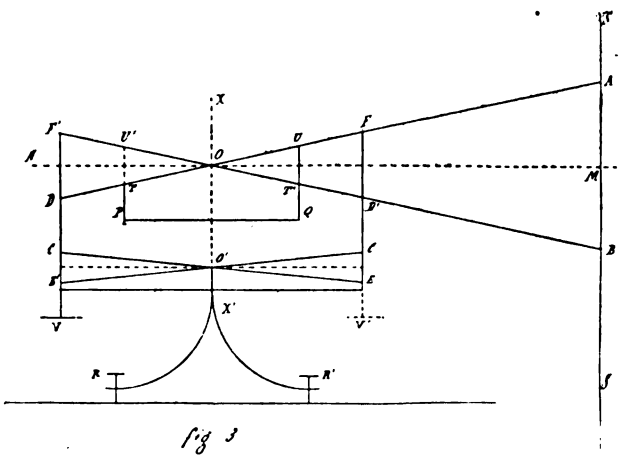


fig 3

2. Livello a cannocchiale girevole e livella fissa al cannocchiale (*tipo Chézy*).

La fig. 3 rappresenta schematicamente il livello di questo tipo: XX' è l'asse verticale dell'istrumento; CE la traversa di sostegno del cannocchiale, girevole nel piano verticale attorno al punto O' per mezzo della vite di elevazione V; CD e EF sono le distanze dei due centri dei perni dagli estremi della traversa di sostegno, sicchè DF sarà l'asse meccanico del cannocchiale; infine PQ è l'asse della livella di cui siano PT e QU le distanze degli estremi dall'asse meccanico del cannocchiale.

Digitized by Google

Le correzioni di questo tipo di livello, col cannocchiale modificato nel modo anzidetto, si eseguiranno come segue.

1° Diretta la livella PQ nella direzione di una vite del basamento, si centra con questa la bolla: indi, girata l'alidada di due angoli retti, si corregge lo spostamento della bolla per metà colla vite del basamento, e per l'altra metà con quella di elevazione V. Si ripete l'operazione finchè la bolla della livella rimanga centrata prima e dopo la rotazione dell'alidada di due retti. Si gira indi questa di un angolo retto, dirigendo la livella parallelamente alla congiungente le altre due viti del basamento, e la si centra col moto inverso e simultaneo delle medesime. Così l'asse della livella PQ è perpendicolare all'asse XX' dell'alidada, e questo è verticale.

2° Si rende l'asse meccanico parallelo all'asse della livella. Perciò si dirige il cannocchiale ad una stadia verticale SS' e colla bolla centrata si fa una lettura a_1: si ruota il cannocchiale di due angoli retti attorno al proprio asse meccanico DF e si fa la lettura coniugata a_2; la media delle due letture

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

dà la lettura che si farebbe sulla stadia nel punto A in cui essa è incontrata dall'asse meccanico DF del cannocchiale. Scambiato quindi l'obbiettivo coll'oculare, si gira l'alidada attorno ad XX' di due retti, dirigendo di nuovo il cannocchiale alla stadia. Il suo asse meccanico assumerà ora la posizione $F'D'$ simmetrica di DF rispetto all'orizzontale OM condotta per il punto O di intersezione dell'asse DF colla XX'. Si facciano ora le due letture coniugate b_1 e b_2 sulla stadia; la loro media

$$b = \frac{b_1 + b_2}{2}$$

darà la lettura corrispondente al punto B in cui l'asse $F'D'$ incontra attualmente la stadia. La media

$$m = \frac{a + b}{2} = \frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2}{4}$$

Digitized by Google

dà evidentemente la lettura che si farebbe nel punto M in cui l'orizzontale OM incontra la stadia. Si gira quindi la vite d'elevazione V finchè la media delle due letture b_1 e b_2 ossia b sia eguale ad m (1), e si centra poscia la bolla colle viti proprie della livella.

3° Si rende ora l'asse ottico del cannocchiale coincidente coll'asse meccanico, muovendo le viti del reticolo finchè le due letture b_1 e b_2 risultino eguali fra di loro ed eguali ad m (2).

Anche in questo caso la media delle quattro letture $\frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2}{4}$ dà la lettura corrispondente alla visuale orizzontale anche se l'istrumento non è stato corretto, purchè nelle due posizioni dell'alidada si abbia cura di centrare esattamente la bolla della livella per mezzo della vite di elevazione.

Siccome questo livello presenta l'inconveniente che nel fare la lettura coniugata, la livella capovolta presenta la sua graduazione in basso, e quindi non funziona, è impossibile accorgersi se l'istrumento nel girare il cannocchiale non ha subìto alcun spostamento: per cui per la pratica sarebbe consigliabile il tipo di livello rappresentato schematicamente alla fig. 4. Esso è simile al livello Egault, ma la traversa che sostiene il cannocchiale, alla quale è fissata la livella, è mobile in altezza attorno al suo punto medio O' per mezzo di una vite micrometrica V (vite di elevazione).

Le correzioni di questo livello si potranno fare nel seguente modo:

1° Si rende l'asse XX' verticale; perciò, diretta la livella parallelamente alla congiungente di due viti del basamento, si centra, col moto simultaneo ed inverso di queste, la bolla; girata quindi azimutalmente l'alidada di 180°, si centra la bolla per metà col moto delle stesse viti del basamento, e per l'altra metà colla vite di elevazione. Si ruota poi l'alidada di 90°, in modo cioè che la livella si disponga nella direzione della terza

---

(1) Ciò si ottiene praticamente girando la vite di elevazione finchè sulla stadia invece di b_2 si legga $l = m - \frac{b_1 - b_2}{2}$.

(2) Ciò si ottiene praticamente girando la vite di rettifica del reticolo finchè si legga m sulla stadia.

Digitized by Google

vite del basamento, e si centra la bolla col solo moto di questa vite.

2° Si rende l'asse meccanico del cannocchiale parallelo all'asse della livella: perciò si dirige il cannocchiale ad una stadia verticale S, e colla bolla centrata si fa una lettura a_1; girato il cannocchiale attorno al proprio asse di 180°, si fa una seconda lettura a_2. La media $\frac{a_1 + a_2}{2}$ dà la lettura a che si farebbe nel punto A in cui l'asse meccanico incontra la stadia. Scambiato quindi l'obbiettivo coll'oculare, si gira l'alidada di 180° e si ricollima alla stadia. Siano b_1 e b_2 le letture coniugate; cioè

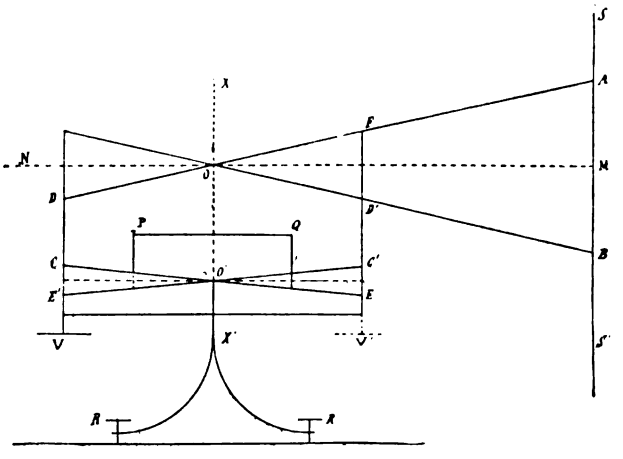


fig 4

quelle fatte sulla stadia colla bolla centrata rispettivamente prima e dopo aver ruotato il cannocchiale di due retti attorno al proprio asse. La media $b = \frac{b_1 + b_2}{2}$ dà la lettura che si farebbe nel punto B in cui attualmente l'asse meccanico incontra la stadia. Siccome OB è simmetrica di OA rispetto all'orizzontale OM, ne segue che la media

$$m = \frac{a + b}{2} = \frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2}{4}$$

darà la lettura m corrispondente al punto M in cui l'orizzontale OM incontra la stadia. Si muove ora la vite di eleva-

Digitized by Google

zione V finchè la media delle due letture coniugate sia eguale ad m, indi si centra la livella colle viti proprie.

3° Si rende l'asse ottico coincidente coll'asse meccanico muovendo le viti del reticolo finchè le due letture b_1 e b_2 siano eguali fra di loro, ed eguali naturalmente ad m.

Se il basamento è munito di una livella sferica colla quale si possa rendere approssimativamente verticale l'istrumento, si pnò fare a meno della prima correzione, purchè nel fare le letture alla stadia si abbia cura di avere la bolla della livella centrata ed in riposo, manovrando la vite di elevazione.

Corretto in una stazione l'istrumento, per avere la visuale esattamente orizzontale nelle successive stazioni di livellazione basterà, dopo aver reso grossolanamente verticale l'asse dell'istrumento, centrare la bolla colla vite di elevazione.

L'unico errore che può ricomparire è, come in tutti i livelli a cannocchiale, quello dovuto allo spostamento che l'asse ottico può subire nell'adattamento alle diverse distanze: errore che dipende da inevitabile imperfezione nella costruzione del cannocchiale e di cui si può determinare la grandezza prendendo la semidifferenza delle letture fatte sulla stadia nelle due posizioni coniugate del cannocchiale, e che si può in ogni caso eliminare prendendo la semisomma di dette letture.

Questo tipo di livello presenta il vantaggio del tipo Egault di poter sempre verificare se nelle due posizioni coniugate del cannocchiale la bolla della livella rimane centrata, mentre d'altra parte non presenta l'inconveniente di un eventuale e non avvertibile spostamento dell'asse del cannocchiale dovuto a qualche granello di sabbia che si depositi sulla forchetta d'appoggio; perchè, non essendo necessaria la inversione del cannocchiale, i due cuscinetti di appoggio possono essere fatti in forma di anelli che avvolgano completamente i due perni, impedendo ogni deposito di polvere al disotto dei medesimi.

In ogni caso poi, qualunque sia il tipo di livello adoperato, la modificazione del cannocchiale proposta permette di potere, senza la preventiva determinazione di costanti, e senza ricorrere a metodi speciali di livellazione, non sempre applicabili, **ottenere la visuale orizzontale.**

Gabinetto di Geodesia della R. Università
di Torino, Giugno 1910.

Digitized by Google

Di alcuni minerali dell'Alpe Veglia.

Nota dell'Ing. Dr. GABRIELE LINCIO

(Con 1 Tavola).

In una mia Nota precedente, *Del rutilo dell'Alpe Veglia* (1), descrissi la località ove venne trovato detto minerale e ne trattai dettagliatamente la paragenesi. Orbene in altra località finitima alla detta, ad altezza maggiore di ca. 200 m., dal lato della punta del Rebbio e più in alto del ghiacciaio di Moticcia trovai un giacimento di alcuni minerali interessanti, che qui intendo di descrivere. Essi rivestono litoclasi d'uno schisto grigiastro, il quale è molto ricco di quarzo, mostra due miche, l'una incolora e l'altra bruna, e contiene qualche granato sparso nella massa. Notizie particolareggiate, tanto geologiche che petrografiche, me le riservo ad una prossima pubblicazione. Qui dirò solamente che nella località Moticcia trovansi col suddetto micaschisto anfiboloschisti, gneiss e calcari dolomitici (2).

Interessante è la paragenesi del giacimento: si presentano due generazioni distinte di minerali.

Alla prima e più importante appartengono: l'albite, il quarzo, la mica, la clorite, la siderite, la calcite, la tormalina, la pirite, la blenda e l'anatasio.

Alla seconda generazione appartengono ancora la calcite e poi l'aragonite.

La tormalina, la blenda e l'anatasio si presentano solo in minuti cristalletti e con una distribuzione, direi, omeopatica, come avviene per altri minerali in Val Susa, p. es. presso Borgone.

Albite. — Sono generalmente piccoli cristalli di dimensioni fino ai tre o quattro millimetri, bianco-lattei, variamente raggruppati, del tipo periclino, geminati anche secondo il peri-

(1) G. Lincio, *Del rutilo dell'Alpe Veglia.* " Atti R. Acc. Scienze Torino ", vol. XXXIX, 1904.

(2) Schmidt-Preiswerk-Stella, *Geologische Karte der Simplongruppe*, 1 : 50.000.

Digitized by Google

clino e con lamelle di geminazione molto frequenti. Trovai alcuni cristalli semplici, che si presentavano prismatici secondo l'asse *c* e ne misurai due. Vi riscontrai le forme seguenti (Vedi tabella a pagina seguente):

Indicai in detta tabella i valori angolari migliori o medi. I cristalli vennero messi polari secondo la zona dei prismi. Trattandosi poi di sola identificazione di forme, trascurai le letture dei pochi minuti al disopra e al disotto di 90° pel valore ρ, perchè, con la messa in posizione polare sul goniometro a due cerchi, si cerca già di disporre tutte le facce di prisma nella posizione media più vicina a 90°.

I cristalli d'albite, qui descritti, presentano, come si vede, valori che vanno abbastanza d'accordo coi calcolati sugli Elementi di Brezina; però, tanto per lo sviluppo delle facce quanto per la limpidezza, essi non sono adatti a speciali determinazioni cristallografiche, ottiche e chimiche.

Quarzo. — Il quarzo presenta un abito molto simile a quello del quarzo descritto nel mio già citato lavoro sul rutilo, e non è ricco di forme ben distinte.

Nel prisma $(b) = \{10\bar{1}0\}$ e nei romboedri $(r, \rho) = \}10\bar{1}1\{$ abbiamo uno sviluppo diverso e ben caratterizzato delle facce nelle forme (±). I cristalli si appuntiscono trigonalmente in causa d'uno sviluppo a gradinata di alcuni romboedri molto acuti alternantisi con altri più ottusi, ciò che avviene con notevole prevalenza ed estensione in una delle due zone (±). Ne risultano così facce più o meno piane o curve; esse sono le facce tangenziali agli spigoli delle gradinate e formano zone che vanno dai prismi ai rispettivi romboedri principali, dei quali uno solo si estende generalmente fino ai poli.

In un mio prossimo lavoro d'indole generale sul quarzo mi riservo di trattare più minutamente tale argomento.

Mica. — Si presenta in tavolette esagone incolori o leggermente verdicce. L'angolo degli assi ottici è grande ed il loro piano si trova ad angolo retto sul piano di simmetria, $\rho > \upsilon$, cioè è una mica di prim'ordine (1). Non viene intaccata dagli

(1) *Lehrbuch der Mineralogie von Max Bauer*, 1904, pag. 699.

Digitized by Google

Tab. Goldschmidt		Simb. Miller	Misurato		Calcolato su Elem. Brezina		
			φ	ρ	φ	ρ	
1.	*P*	001	82°03′	26°43′	81°51′	27°01′	Facce grandi, imagini multiple.
2.	*M*	010	0°00′	90°00′	0°00′	90°00′	„ „ per lo più imag. mult.
4.	*f*	130	29°58′	„	30°23′	„	Facce strette, imagini allargate.
6.	*T*	110	60°31′	„	60°30′	„	Facce grandi, valori di posiz. varianti.
7.	*l*	110	119°56′	„	119°52′	„	„ „ buone imagini.
8.	ν	450	125°58′	„	125°38′	„	Faccia stretta, imagine allargata.
9.	*z*	$1\bar{3}0$	149°47′	„	149°44′	„	„ „ „ „
11.	*n*	021	154°27′	49°15′	154°16′	49°18′	Facce grandi, imagini buone.
15.	*y*	$\bar{2}01$	$\bar{8}5°55′$	56°11′	$\bar{8}6°50′$	55°37′	
18.	*p*	$\bar{1}11$	$\bar{3}7°09′$	38°45′	$\bar{3}6°53′$	38°30′	
22.	*o*	$\bar{1}\bar{1}1$	$\bar{1}3\bar{4}°58′$	34°14′	$\bar{1}3\bar{5}°21′$	34°11′	Facce piccole, imagini deboli.
23.	π	$\bar{6}\bar{6}5$	$\bar{1}31°45′$	41°54′	$\bar{1}31°25′$	41°56′	
25.	λ	$\bar{3}\bar{3}2$	$\bar{1}2\bar{8}°54′$	50°33′	$\bar{1}2\bar{8}°10′$	50°55′	

Digitized by Google

acidi e la si può ritenere una muscovite, comune, del resto, in giacimenti analoghi.

Clorite. — Cristallizza in bottoncini od in aggregati prismatici contorti ed anche in belle tavolette esagone, distintamente biassiche.

Siderite. — Questo minerale si presenta quasi interamente cambiato in limonite.

Un altro minerale, che è scarsissimo e che presenta molta affinità con la siderite, si mostra relativamente poco alterato.

Sono piccoli cristalli rosso-brunastri, poco riflettenti. Tale colorazione è però solo superficiale ed è dovuta all'ossidazione del ferro. Nell'interno sono incolori. Il colore scompare trattandoli con acido cloridrico, che li intacca molto lentamente solo se concentrato e caldo. Essi, così scolorati, arroventati nella fiamma ossidante, diventano neri e magnetici.

La forma di questi cristalli è determinata da un romboedro e dalla base. Il romboedro ha un angolo $\rho = 42°47'$.

Metto qui a confronto i valori angolari dei romboedri fondamentali di quelli fra i carbonati che hanno affinità col minerale qui studiato.

	$\measuredangle R:R$ (Bauer-Min.) (angolo esterno)	$\measuredangle c:r = \rho$ (Gdt.)
Ancherite	106°12′	—
Dolomite	106°17′	43°51′
Siderite	107°	43°23′
Magnesite	107°20′	43°04′
Breunnerite (1)	107°30′	—
Minerale qui studiato	107°56′	42°47′.

Dall'angolo misurato della base col romboedro $\rho = 42°47' = a$ si calcola l'angolo α del triangolo sferico, delimitato dalle normali alla base ed a due facce adiacenti del romboedro, e si trova il valore:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{ctg} 60°}{\cos 42°47'} = 38°11'26'',$$

(1) G. Piolti, *Sulla Breunnerite di Arigliana*, " Atti R. Accad. Scienze Torino „, vol. XLI, 1906.

Digitized by Google

col quale si ottiene poi il valore:

$$\cos c'_2 = \frac{\cos 42°47' \cdot \sin 60°}{\cos 38°11'26''} = \cos 36°2',$$

ovvero $c = \measuredangle R : R = 72°4$ (ang. delle normali) e quindi 107°56′ (angolo esterno).

Considerando che il minerale qui studiato è difficilmente solubile anche nell'acido cloridrico concentrato a caldo, ch'esso contiene una quantità ragguardevole di ferro e che l'angolo del suo romboedro misurato diede un valore che s'avvicina a quello della magnesite e breunnerite, si può conchiudere che esso appartenga a tale gruppo di carbonati di magnesio e di ferro, che, com'è noto, possono variar molto nella loro costituzione.

Calcite. — Si presenta delimitata dal romboedro $e = (01\bar{1}2)$ Dana $= \left(-\frac{1}{2}\right)$ Gdt. I cristalli talora raggiungono dimensioni di parecchi centimetri.

Tormalina. — Riempie piccole fessure per lo più con tipici aghetti neri opachi, ma anche con cristalletti bruni trasparenti.

Questi ultimi mi fecero dapprima pensare ad altri minerali. Essi si presentano con un prisma sottile allungato e generalmente non sono terminati ai due poli. Osservati al microscopio normalmente ad una faccia del prisma stesso mostrano, facendo uso del solo polarizzatore, a luce vibrante secondo il presunto asse c (asse della zona del prisma) un color bruno chiaro, a luce vibrante normalmente a c un color nero, cioè un pleocroismo molto forte. Osservando poi al microscopio il contorno d'alcuni di tali cristalli, orientati con l'asse c normalmente al tavolino del microscopio, essi mostravano una sezione trigonale. Cercando attentamente mi venne dato di trovare un cristallo terminato da un polo e abbastanza ben riflettente.

Mostrava i due romboedri r ed o, che diedero i seguenti valori angolari di posizione:

Dana	Gdt	∠ misurato	∠ calcolato
cr	= ρ di (+ 1) =	27°28′	27°20′
co	= ρ di (— 2) =	46°15′	45°57′

Digitized by Google

Tali valori s'accordano con quelli della tormalina; così che non rimase alcun dubbio intorno all'entità del minerale. Ciò risultava del resto come molto probabile dall'osservazione ottica, essendo che nelle tormaline i raggi straordinari, i quali vibrano in direzione dell'asse *c*, vengono molto meno assorbiti degli ordinari, che vibrano normalmente ad esso. Questi ultimi, come vedemmo, venivano quasi totalmente assorbiti.

Pirite. — È abbondante, con forma tipica e costante.

I cristalli mostrano le facce del cubo modificate da quelle dell'ottaedro, poi sovente si hanno cristalli distintamente prismatici, come a fig. 2, i quali sulle faccie del cubo mostrano la tendenza alla formazione d'un pentagonododecaedro molto vicinale al cubo. Nella fig. 2 segnai solo schematicamente la linea d'intersezione delle due facce di pentagonododecaedro su ciascuna faccia del cubo: dette linee corrispondono agli spigoli del cubo.

Blenda. — Essa è molto rara. Trovai alcuni cristalli raggruppati ed alcuni semplici. Di questi ne misurai un paio che avevano un diametro di 1-2 mm. Trovai le forme seguenti:

Gdt. Tab. = Miller.

b { $0\,\frac{2}{3}$ = (023); $0\,\frac{3}{2}$ = (032); $\infty\,\frac{3}{2}$ = (230) } Forma abbastanza ben sviluppata.

$p + 1$ = (111) Forma ben sviluppata.

d { 01 = (011); ∞ = (110) } " " "

$r + \frac{1}{3}\,1$ = (133) Forma abbastanza ben sviluppata.

c { 0 = (001); $0\,\infty$ = (010) } Forma appena visibile.

Digitized by Google

Inoltre si hanno al loro posto le facce di p (—1) piccolissime ed in ripetizione con quelle di $m = (-{}^1/_3\, Gdt = (113)$ Miller). La faccia m predomina ed è tanto stretta da formare con p (—1) solo uno spigolo, intagliato a gradini bassissimi. Vedi fig. 1. A prima vista si terrebbe tale spigolo come formato dalla forma $q = (-{}^1/_2\, Gdt = (112)$ Miller), ma le misure goniometriche mi diedero i valori angolari di posizione di m e di p.

Non entrai nella questione della determinazione del segno + e — mediante figure di corrosione etc. (1), non permettendolo il materiale.

La fig. 1 rappresenta fedelmente, per quanto possibile, l'abito di tali cristalli di blenda, bell'esempio di emiedria tetraedrica, che per le forme emiedriche correlate p ($\pm$1) s'avvicina alla forma oloedrica, conservando però nella forma m ed in quella r il carattere dell'emiedria.

Anatasio. — Minerale nuovo per l'Alpe Veglia, però molto scarso. Cristallizzato nella solita piramide acuta fondamentale presenta color metallico.

Sovente mostra anche la base e allora la piramide prende la forma di scalpello piatto e la base non è più quadratica, ma allungata a rettangolo. Vedi fig. 3. Trovai anche qualche cristallo, con base predominante, che mostrava una colorazione zonale giallo miele trasparente e metallica opaca. La fig. 3 mostra l'abito d'un tale cristallo, sul quale studiai pure le strettissime facce formanti delle striature sulla piramide fondamentale.

Per alcune di esse ottenni i seguenti valori angolari di posizione:

Gdt	Miller	ρ misurato	ρ calcolato
$\frac{3}{20}$	= (3.3.20)	20°15′	20°39′
$\frac{2}{7}$	= (227)	35°15′	35°41′
3	= (331)	82°35′	82°26′

(1) Ph. Hochschild, *Studien an Zinkblende 1908*, « Neues Jahrbch. für Min. etc. „ Beil., Bd. XXVI, pag. 205.

Digitized by Google

Alla figura 3 va unita la proiezione stereografica di queste ultime forme (fig. 4).

I minerali della seconda generazione, che si rintracciano in cavità propizie alla loro formazione, sono la calcite e l'aragonite; ambedue si presentano generalmente corrosi.

La **calcite** ha qui un altro abito cristallografico; essa è delimitata dallo scalenoedro (2131) Dana.

Maggior interesse presenta qui lo studio della formazione dell'**aragonite**.

La sua forma tipica, il suo depositarsi a preferenza su siderite e limonite, la mancanza di buona sfaldatura, la distinta reazione di Meigen, con la soluzione di nitrato di cobalto, bastarono per la sua determinazione come aragonite. Essa si mostra in aghetti arrotondati, raggruppati radialmente e qua e là sparsi come incrostazione. Tra i minerali sottostanti la siderite è cambiata in limonite e l'albite appare alterata e corrosa nell'interno, sì da non presentar più che parte della veste esterna del cristallo, costituita da residui di facce ridotte a sottile pellicola. Tale alterazione non deve parer strana, se si considera il probabile modo di formazione dell'aragonite.

L'aria e l'acqua debbono aver alterate le piriti, abbondanti in questo giacimento, e formato acido solforico, il quale a contatto con carbonato di calcio, magnesio etc. deve aver sviluppato acido carbonico. Questo avrà servito in parte a reazioni ed in parte sarà stato sciolto dalle acque, che, così ricche di acido carbonico, circolando avranno pure sciolto carbonato di calcio etc. (1), tenendolo in soluzione come bicarbonato e depositandolo poi, a seconda delle condizioni d'ambiente, o come calcite o come aragonite.

Vediamo ora alcune notizie che la letteratura ci dà intorno alla formazione dell'aragonite.

M. L. Michel (2) pubblica i risultati d'una sua esperienza

---

(1) Un litro d'acqua, satura d'acido carbonico a pressione ordinaria ed a 10° di temperatura, scioglie 0,88 gr. di carbonato di calcio. Vedi H. Erdmann, *Lehrbuch der Anorg. Chemie*, pag. 554, 1898.

(2) M. L. Michel, *Sur la reproduction de l'aragonite*, " Bull. de la Soc. Franç. de Minéralogie „, 1904, pag. 220.

Digitized by Google

sulla sintesi dell'aragonite. Introdusse in un sifone d'acqua di seltz del carbonato di calcio precipitato. La maggior parte di questa sostanza è stata sciolta dopo qualche mese. Tale soluzione di bicarbonato di calcio venne filtrata e lasciata evaporare molto lentamente a temperatura e pressione ordinaria. Ottenne così dei cristalli di qualche millimetro di lunghezza, che presentavano proprietà fisiche ed ottiche caratteristiche per l'aragonite. Le forme cristallografiche sono (001), (110), (010) e (011).

Il lavoro recente di Hans Leitmeier (1) ci presenta i risultati propri e d'altri sperimentatori intorno alla formazione dell'aragonite e della calcite.

Cito un brano, dove l'autore fa un riassunto dei risultati delle esperienze: " Io trovai adunque che da soluzioni di bicarbonato di calcio con le due sostanze solfato di magnesio e cloruro di magnesio quali compagni di soluzione, il carbonato di calcio si può formare anche nella modificazione rombica. Una temperatura più alta (20° C.) favorisce la formazione del carbonato rombico. Quanto maggiore è la quantità di sali compagni di soluzione, che viene introdotta, tanto più abbondante è la formazione dell'aragonite. „

Il giacimento qui studiato appartiene al secondo degli otto gruppi, in cui G. Rose (2) distribuì i giacimenti di aragonite. Questa appunto si trova all'Alpe Veglia entro cavità dove sonvi tracce di siderite e pirite, presso calcari dolomitici etc.; quindi la possibilità che nella sua formazione abbia avuto influenza il solfato di magnesio quale compagno di soluzione, è più che ovvia.

Del resto allo stato attuale delle nostre cognizioni intorno a questo argomento, mancando dati ed esperienze estese e fondamentali, non si può entrar troppo in dettaglio e far asserzioni gratuite. Possano le esperienze che H. Leitmeier già intraprese e che tuttora sta continuando portar luce in questo ancor oscuro capitolo della dimorfia del carbonato calcico.

Istituto Mineralogico della R. Università di Torino,
19 Giugno 1910.

(1) HANS LEITMEIER. *Zur Kenntnis der Carbonate. Die Dimorphie des Kohlensauren Kalkes*, " Neues Jahrbch. für Min. etc. „ Bd. I, I Theil, 1910. pag. 61.

(2) Loc. cit., pag. 64.

Digitized by Google

Contributo alla conoscenza della fecondazione negli Oligocheti.

Nota del Dr. LUIGI COGNETTI DE MARTIIS

(Con 1 Tavola).

Gli Oligocheti sono ermafroditi (1) eterogami. Le modalità dell'accoppiamento vennero già osservate per alcune specie. Così per i nostri comuni lombrichi (*Lumbricidae* s. s.) è ormai ben nota la posizione invertita dei due individui in copula (2). I fenomeni che seguono alla copula sono assai meno noti; anche oggi si potrebbe ripetere con VAILLANT (22): " il règne encore " une certaine obscurité sur la manière dont peut s'effectuer la fécondation „ (p. 30). Questa, per i *Lumbricidae*, s'ammette generalmente che s'effettui fuori del corpo dell'animale, all'atto della deposizione delle uova nell'ooteca secreta dal clitello (3); le uova uscite dai pori femminili e gli spermatozoi usciti dalle spermateche s'incontrerebbero nell'ooteca medesima mentre l'animale si libera di questa.

Per i *Lumbricidae*, come per altre famiglie, sono stati descritti a più riprese gli " spermatofori „, sulla origine e sulla funzione dei quali i pareri sono discordi (4). Gli spermatofori sono prodotti da organi ghiandolari posti accanto ai pori maschili, come ROSA (20, p. 12) dimostrò chiaramente per *Helodrilus (Dendrobaena) samariger* (Rosa) (5); essi sono ceduti durante l'accoppiamento dall'uno all'altro individuo. Se la fecondazione si effettua realmente dentro all'ooteca, il còmpito degli spermatofori in rapporto alla fecondazione risulta poco chiaro, al pari del modo in cui essi giungono all'ooteca. Cosicchè ROSA (21) li considerò " come prodotti accidentali salvo " nelle specie mancanti di spermateche „ ove " servirebbero a sostituire

(1) Riguardo alla temporanea unisessualità di una specie — *Enantiodrilus Borellii* Cogn. — si consulti il mio lavoro sulle ghiandole ermafroditiche di questa specie (6, p. 12 e 19).

(2) Vedansi fra altri i trattati di VOGT e YUNG (24, p. 476), di VAILLANT (22, p. 29-31, *ubi liter.*), di EMERY (11, p. 35, fig. 36), le tavole murali di LEUCKART e NITSCHE (14, fig. 15), la monografia di ROSA (21, p. 415).

(3) Cfr. RATZEL und WARSCHOWSKY (18, p. 547), ROSA (21, p. 416).

(4) Si consultino a questo riguardo i capitoli appositi nelle monografie di VEJDOVSKY (23, p. 151) e di BEDDARD (1, p. 135).

(5) Per la sinonimia della specie cfr. MICHAELSEN (15, p. 495).

Digitized by Google

" fisiologicamente questi organi „ (p. 416). Il compito delle spermateche sarebbe quello di raccogliere spermatozoi durante l'accoppiamento, tenerlo in serbo per un certo tempo, e in seguito riversarli nell'ooteca.

Simile tipo di fecondazione — meritevole di conferma — non pare possa estendersi a tutti gli Oligocheti. V'è una famiglia in cui è nota, per interi generi, la comunicazione interna fra spermateche e organi centrali femminili (ovarî racchiusi in capsule ovariche, ovisacchi). È questa la famiglia africana degli Eudrilini, e per alcuni suoi rappresentanti sono stati descritti anche gli spermatofori. Così dicasi dei generi *Stuhlmannia*, *Polytoreutus* e *Pareudrilus*, nei quali si verifica appunto la comunicazione suddetta, com'è specificato anche nelle loro diagnosi (1).

Recentemente ho avuto occasione di studiare due esemplari d'una specie di *Pareudrilus* da me descritta col nome *P. pallidus* (**8**, p. 1; **9**, p. 29), e alcune serie di preparati microscopici assai ben riusciti, mi diedero agio di scoprire alcuni fatti non privi d'importanza che portano un po' di luce sull'oscuro problema della via seguita dagli spermatozoi per raggiungere le uova, mentre mi conducono a correggere una inesattezza della mia descrizione nella parte che si riferisce all'apparato sessuale femminile.

Una ridescrizione più completa di questo apparato varrà a correggere l'inesattezza e a porre in rilievo i fatti cui sopra ho fatto cenno.

In un esemplare appositamente sezionato trovai gli ovarî situati, com'è di norma, al 13° segmento. Essi, in numero di un paio, pendono dal margine ventrale del sottile dissepimento 12-13, ai lati della catena nervosa, a una certa distanza da questa.

Ogni ovario è fondamentalmente un tubo piatto, floscio e sinuoso, la cui parete esterna corrisponde alla membrana peritoneale (fig. 1, *pe.*) accompagnata da un discreto numero di elementi connettivi che formano lo stroma. Nella porzione più lontana dal punto d'attacco al dissepimento gli ovociti sono disposti in un solo piano. Il loro diametro massimo è di 45-50 μ;

(1) Cfr. Michaelsen (**16**, p. 467, per *Stuhlmannia*; **15**, p. 412, per *Polytoreutus*; **15**, p. 398, per *Pareudrilus*). Per la descrizione degli spermatofori vedasi Beddard (**2** e **3**, p. 200; **4**, p. 219) e Michaelsen (**17**, p. 339).

Digitized by Google

molti altri appaiono assai più piccoli, verosimilmente atrofici. Procedendo verso il punto d'attacco dell'ovario al dissepimento gli elementi sessuali diminuiscono sempre più in diametro. Gli ovociti (1) escono dal tubo ovarico per la sua estremità libera, e cadono nel 13° segmento. Qui se ne trovano in scarso numero, e avvolti ognuno da uno o due strati di cellule fuse in sincizio. Pure avvolti da sincizio sono gli elementi femminili situati in buon numero nelle ampie maglie dell'ovisacco sporgente nel 14° segmento fig. 2, *u.* e fig. 5 *E*, *o. s.*

Le cellule, che unite in sincizio circondano ogni grosso ovocito libero, hanno citoplasma ricco di vacuole, grosso nucleo dotato di membrana cromatica (fig. 4), e mostrano in complesso una grande rassomiglianza con speciali fagociti che si trovano nel 13° segmento o nel lume degli organi che confluiscono a quel segmento. Questi fagociti, di cui è trattata a lungo la struttura e la funzione in un mio lavoro corredato di figure e in corso di stampa (2), si caricano di materiali nutritizî provenienti dalla fagocitosi di spermatozoi (vedi innanzi!), e possono riversarli, come ho dimostrato, nel circolo sanguigno, ricavando forse dal sangue altro materiale. Invero i fagociti (fig. 9, *fag.*) sono capaci di fissarsi su speciali esili fimbrie (fig. 2, *fi. ci.*), percorse da capillari sanguigni (fig. 9, *cap.*) pendenti dalla periferia delle tube degli ovidotti, situate a loro volta contro al dissepimento 13-14, di fronte agli ovarî. Tali fimbrie ho chiamato *fimbrie circumtubali*: i fagociti attaccati ad esse appaiono clavati, e mostrano un canalicolo ramificato che serve a scaricare prodotti raccolti in un'ampia vacuola centrale (3).

Se liberi, i fagociti appaiono subtondeggianti (fig. 3 e fig. 12 *f.*), a contorno spesso deformato da lobi che stanno a dimostrare la mobilità dei fagociti stessi. Il nucleo, relativamente voluminoso (4-6 μ), è dotato di una spessa membrana cromatica e d'un

---

(1) Non ho potuto riconoscere fenomeni di maturazione che mi permettessero una sicura determinazione degli elementi femminili staccati dall'ovario, onde il termine ovocito ha qui e in seguito un valore dubitativo.

(2) *Ricerche sulla distruzione normale dei prodotti sessuali maschili* (10).

(3) In fig. 9 non è rappresentata la struttura dei fagociti; in fig. 3 è visibile la vacuola centrale di due di essi, così in fig. 12 *f.* Cfr. il mio lavoro sopra citato (10) e le sue figure.

Digitized by Google

granulo di cromatina (? nucleolo) più grosso. Il citoplasma mostra quasi sempre una grande vacuola centrale e ben spesso vacuole minori in vario numero.

Questi caratteri si ripetono nelle cellule di sincizi che circondano le uova. Aggiungasi infine che nel sincizio possono trovarsi spermatozoi (fig. 4, *spm.*), probabilmente fagocitati (1), come spessissimo se ne trovano (e qui senza dubbio fagocitati) nel citoplasma dei fagociti liberi o fissati sulle fimbrie circumtubali. Tutto ciò mi fa credere che i fagociti siano capaci di funzionare anche come elementi nutritori degli ovociti.

D'altra parte l'ovario non possiede elementi che rassomiglino a quelli del sincizio e che siano capaci di funzionare al pari di essi. I piccoli ovociti (? oogoni) mescolati nell'ovario a quelli voluminosi prossimi a staccarsi sono in numero troppo scarso per poter avvolgere questi ultimi, nè mai vidi in essi fenomeni di moltiplicazione (2). Onde non mi pare applicabile, almeno a *Pareudrilus pallidus*, la spiegazione dell'origine del sincizio da cellule germinative data da Beddard (**1**, pag. 90, et alibi ante) e da Horst (**12**, pag. 233) (3). Di fronte agli ovari stanno le tube (fig. 2, *t. o.*), espanse contro il setto 13-14.

Ogni tuba si continua in un robusto canale muscoloso, il collo dell'ovisacco (fig. 2, *c. os.*), il cui lume (cigliato al pari della tuba) s'apre in quello (virtuale) di quest'ultimo organo. L'ovisacco (*os.*) contiene (in un esemplare), oltre agli elementi femminili, un numero veramente enorme di fagociti liberi, dei quali moltissimi contenenti spermatozoi (4).

(1) Potrebbero essere destinati alla fecondazione. Si noti che l'ovocito figurato mostra una condizione che osservai con una certa frequenza negli elementi femminili contenuti nell'ovisacco, cioè l'assenza di un nucleo delimitato da membrana, e il citoplasma munito di sferule cromatiniche (o frammenti di nucleoli?) sparse senz'ordine. Ciò corrisponde a un periodo avanzato di maturazione, quale descrisse e figurò Horst (**12**, p. 233, 234, tav. 8, fig. 11) per *Eudrilus*.

(2) Nè mai vidi fenomeni riproduttivi nelle cellule dei sincizi che circondano ogni ovocito fuori dell'ovario.

(3) Sincizi avvolgenti singole uova sono ricordati anche da Rosa (**19**, p. 580) pel suo *Teleudrilus ragazzii*. Questo autore riconobbe che le cellule capaci di unirsi in sincizio " si trovano anche aderenti alle pareti degli " alveoli (dell'ovisacco) e talora li riempiono interamente ".

(4) Nella fig. 2, semischematica, gli ammassi di fagociti liberi sono segnati con un tratteggio.

Digitized by Google

Dal collo dell'ovisacco s'origina lateralmente, nel 14° segmento, l'ovidotto (*od.*) che si flette subito in avanti per attraversare il sottile dissepimento 13-14; indi, flesso all'indietro, riattraversa questo dissepimento per poi raggiungere la parete ventrale del 14° segmento, e aprirsi all'esterno davanti ai fasci di setole ventrali (fig. 2, *se.*).

Il dissepimento 13-14, medialmente a ciascuna tuba, appare per breve tratto foggiato a imbuto a destra e a sinistra (fig. 5, *E*): ciò in seguito ad intimi rapporti d'aderenza che su ciascun lato del corpo una stretta area della sua pagina posteriore (fig. 2, * *) contrae con la parete anteriore del canale del receptaculum seminis. La parete di ogni imbuto è parzialmente ispessita: questo parziale ispessimento, a mo' di fascia (fig. 2, *dsp.* $^{13}/_{14}$), scambiai per un " tenue tubulo che unisce su ciascun lato il sacco ova- " rico (= ovisacco) al canale della spermateca „. Questa è l'inesattezza della mia descrizione (**9**, p. 31) cui sopra ho accennato. *Non v'è comunicazione diretta fra spermateca* (= receptaculum sem.) *e ovisacco.*

Ogni receptaculum seminis consta di canale e di ampolla. Il canale (fig. 2, *c. r. s.*), subito dopo l'apertura esterna situata presso il margine posteriore del 14°, mostra l'epitelio che ne tappezza il lume (1) sollevato in profonde ripiegature (fig. 5, *A, B, C, D*), la qual cosa attesta una grande dilatabilità del lume stesso. In seguito il lume si fa angusto, e il suo rivestimento appare assai modificato, privo di ripiegature. Invero, a uno strato di cellule epidermiche relativamente basse (40-50 μ), si sostituiscono cellule, prive di cuticola, molto allungate e sottili o sottilissime (2) sorta di fibre, disposte (almeno in apparenza) in più strati (3) e orientate radialmente all'asse del lume (fig. 2, *a. c.*; fig. 5 *E*; fig. 6, *a. c.*; fig. 8). Queste cellule allungate corrispondono verosimilmente alla " couche épithéliale très " épaisse „ ricordata da Horst (**12**, p. 231) per *Eudrilus eugeniae*

---

(1) Questo epitelio corrisponde all'epidermide (fig. 7, *ep.*), dotata ancora di cuticola (*cu.*) per breve tratto oltre l'apertura esterna.

(2) Forse modificazione dell'epidermide. Ho già avuto occasione di descrivere profonde modificazioni della epidermide in rapporto ai *receptacula seminis* in altri oligocheti (cfr. **7**, p. 10-13 e fig.; **9**, p. 38 e fig.).

(3) Altezza massima complessiva circa 200-250 μ.

Digitized by Google

(Kinberg) (1). Esse hanno probabilmente funzione ghiandolare, giacchè sono frequenti le vacuole nel loro citoplasma (fig. 8); raggiungono in gran parte (? tutte) lo strato muscolare circolare (v. sotto!) e fra esse corrono dei capillari sanguigni, accompagnati da elementi connettivi. Esaminando sezioni trasverse del canale dei receptacula seminis si ha l'impressione che le lunghe cellule sopra descritte siano raggruppate a formare tante cripte con lume virtuale disposte raggiatamente attorno alla cavità dell'organo (fig. 6). Dalla porzione del canale a lume angusto si passa direttamente all'ampolla del receptaculum seminis, che è flessa all'indietro e sporge nel 15° segmento, mentre il canale è situato quasi per intero davanti al dissepimento 14-15, e quindi contenuto nel 14° segmento (fig. 2 e 5). Davanti ad ogni poro di receptaculum seminis si trova una papilla (trascurata in fig. 2) cui corrisponde, nell'interno del corpo, una massa di cellule ghiandolari, riprodotta in fig. 5 *A, B, C* (*p.*).

Il rivestimento di cellule allungate e sottili del tratto prossimale del canale dei receptacula seminis poggia su uno strato di muscoli circolari (fig. 6, *m. c.*), e questo a sua volta è abbracciato a mo' di manicotto da un tessuto connettivo a cellule ramificate e allacciate fra loro in modo da costituire delle ampie maglie (fig. 2 e 6, *conn.*; fig. 12, *f. conn.*). Mescolate alle cellule connettive si trovano delle fibre muscolari dirette longitudinalmente, obliquamente, o radialmente: le prime sono più numerose e disposte soprattutto alla periferia dell'organo (fig. 12, *m. l.*) contro il rivestimento peritoneale (*pe.*).

Si accompagnano allo strato muscolare longitudinale periferico parecchi vasi sanguigni, alcuni dei quali di calibro rilevante (fig. 12, *v. s.*).

Fra le maglie delle fibre connettive sono impigliati in gran numero fagociti provenienti dal 13° segmento, e altre cellule migranti, pure copiose, di cui è detto più innanzi.

Ho ricordato sopra l'aderenza che il dissepimento 13-14 contrae su ciascun lato del corpo con la parete anteriore del canale del receptaculum seminis. Tale aderenza s'effettua in corrispondenza del tratto prossimale del canale ch'è dotato del

(1) Cfr. la sinonimia di questa specie in Michaelsen (15, p. 402).

Digitized by Google

manicotto connettivo a maglie, cosicchè dalle lacune del connettivo si passa nel lume del 13° segmento attraverso alle scarse fibre muscolari longitudinali del canale della spermateca, e a quelle che percorrono il dissepimento 13-14. Questo a sua volta mostra in quella regione ristretta una soluzione di continuo nello strato peritoneale che lo tappezza alla pagina anteriore. Attraverso a questa soluzione di continuo hanno passaggio numerose fimbrie nastriformi, da non confondersi con le fimbrie circumtubali sopra ricordate (cfr. figg. 9 e 10). Queste ultime pendono attorno alla periferia di ogni tuba, mentre le prime sono radicate profondamente nel manicotto connettivo lasso del canale di ogni receptaculum seminis, e si collegano intimamente con le sue maglie. Cosicchè dal fondo dei due imbuti costituiti dal dissepimento 13-14 accanto alle tube ovariche si protendono nel lume del 13° segmento due ciuffi di fimbrie molto allungate e lungamente ripiegate su loro stesse (fig. 5 *C*, *D*, *E*). Sia le fimbrie circumtubali che le altre, cui darò il nome di *fimbrie conduttrici* (1), sono percorse da capillari sanguigni (figg. 11 e 12, *cap.*). Le cellule tipiche delle varie fimbrie aderiscono a questi, ma non saldamente (2), onde, staccandosene, possono trovarsi libere già nel 13° segmento (3), e di qui passare negli ovisacchi, nel manicotto connettivo che cinge il tratto prossimale del canale dei receptacula seminis (fig. 12, *f.* e *c. n. m.*), infiltrarsi nello strato muscolare circolare, nell'alto strato di cellule allungate e sottili, e — la qual cosa constatai per i soli fagociti — persino passare nel lume del canale suddetto.

Per i fagociti, sia fissati sulle fimbrie circumtubali che liberi, rimando al mio lavoro sopra citato (**10**), che tratta pure della loro funzione fagocitaria rispetto a spermatozoi. Quanto alle cellule tipiche delle fimbrie conduttrici esse sono in complesso

(1) Vedasi più innanzi.

(2) La superfice d'adesione è alquanto più estesa nelle cellule delle fimbrie conduttrici che in quelle delle fimbrie circumtubali; i fagociti di queste ultime cedono specialmente materiale al sangue, mentre invece le cellule delle fimbrie conduttrici probabilmente traggono dal sangue nutrimento.

(3) Nel 13° segmento si trovano pure scarsi linfociti ameboidi o petaloidi simili a quelli che si trovano in altre regioni del corpo.

Digitized by Google

di mole un po' minore dei fagociti, e meno deformabili di questi; inoltre hanno nucleo più piccolo, a membrana più sottile, e più ricco di cromatina; il loro citoplasma è dotato di molte piccole masserelle più dense; infine non hanno assolutamente potere fagocitario rispetto agli spermatozoi, nè si mettono in rapporto con gli elementi femminili (figg. 10, 11, 12, *c. n. m.*) (1).

In uno dei due esemplari di *Pareudrilus pallidus* che potei studiare, i receptacula seminis portano ciascuno uno spermatoforo, disposto nel canale e nel tratto prossimale dell'ampolla (fig. 2, *b. stf.*). Per forma e per struttura esso corrisponde alla descrizione e alla figura che BEDDARD ha dato (**4** p. 219, e fig. 38, p. 220) dello spermatoforo di *Pareudrilus sp.*, ma è meno allungato (2). La struttura fibrillare dello spermatoforo concede agli spermatozoi di attraversarne la parete in determinate circostanze, soprattutto in corrispondenza della porzione che precede il bulbo. Quest'ultimo sporge nel lume dell'ampolla del receptaculum seminis occupandolo in gran parte, onde la porzione suddetta dello spermatoforo occupa il tratto prossimale del canale, quel tratto ch'è rivestito internamente dalle speciali cellule allungate e sottili (fig. 8, *a. c.*; fig. 10). È molto probabile che queste cellule secernano una materia atta ad agire sulla sostanza che costituisce la parete dello spermatoforo, sciogliendola o divaricandone le fibre. Dette cellule, o la loro secrezione, provocherebbero un tactismo positivo negli spermatozoi che appaiono insinuati a fiocchi o isolati fra le cellule, nelle lunghe cripte virtuali da esse formate (v. sopra). Al tactismo positivo concorrono verosimilmente anche le cellule tipiche delle fimbrie conduttrici (figg. 13 e 14, *c. n. m.*), le quali sono, come sopra ho detto, capaci di migrare e di insinuarsi profondamente nello spessore del canale del receptaculum seminis. Non è da escludere per dette cellule migranti una funzione nutritizia rispetto agli spermatozoi, visto l'intimo rapporto ch'esse contraggono coi capillari sanguigni, ma la loro funzione precipua credo sia quella di guidare, in virtù del tactismo positivo, gli spermatozoi, attraverso allo spessore del canale del receptaculum se-

(1) Confrontare con fig. 3 e con fig. 12 *f.*

(2) Lungh. totale mm. 2,6; lungh. del collo mm. 1,1; diam. del collo mm. 0,1; diam. del bulbo mm. 0,8.

Digitized by Google

minis, fino a farli passare nel manicotto connettivo ad ampie maglie, di dove, guidati specialmente dalle fimbrie conduttrici, attraversano il setto 13-14 per passare nel 13° segmento. Concorrono all'avanzamento degli spermatozoi il loro proprio movimento e la contrazione dell'intreccio di fibre muscolari che attraversano.

Non va dimenticato che gli spermatozoi incontrano nel loro viaggio, fin da quando passano nel lume del canale del receptaculum seminis, un numero gradatamente crescente di fagociti: questi hanno il còmpito di eliminare gli spermatozoi morti o malsani. Dei due esemplari studiati, quello appunto munito di spermatofori, mostra gli spermatozoi fagocitati in quantità sorprendente, essendo i fagociti distribuiti come indica la fig. 2, e mostra pure moltissimi spermatozoi liberi, isolati, o aggruppati in masserelle più o meno grosse, e contenuti, oltrechè nella parete dei receptacula seminis, nel 13° segmento, negli ovisacchi, e ancora negli ovidotti fin presso i pori femminili.

Il secondo esemplare, verosimilmente copulato da maggior tempo, è privo di spermatofori e mostra assai meno evidente la fagocitosi e la migrazione degli spermatozoi seguendo la via indicata dalle lancette nella fig. 2, ch'è tolta dal primo individuo.

Non m'è stato possibile scoprire uova nell'atto d'essere fecondate, ma tutto fa credere che quell'atto segua alla migrazione sopra descritta, e si compia probabilmente nell'ovisacco.

Un particolare che merita ancora d'esser ricordato è la struttura del tessuto ghiandolare che sta in rapporto alle papille della regione genitale di *Pareudrilus pallidus*.

Le papille sono in un paio rispettivamente al 14°, al 18° e al 19° segmento; in un esemplare v'è pure una papilla impari mediana al 15° (1).

Nell'interno del corpo corrispondono ad esse le masse sporgenti sopra ricordate (fig. 5 *A*, *B*, *C*): queste, avvolte da fascie muscolari, contengono buon numero di grosse e lunghe cellule clavate, ricche di vacuole, una delle quali per solito più grossa, e prossima alla porzione assottigliata di ogni cellula. Queste

(1) Cfr. la mia fig. 46, in 9, tav. III; i pori maschili sono al 17°.

Digitized by Google

cellule sono senza dubbio ghiandolari e il loro prodotto s'accumula nelle vacuole, per poi essere inoltrato nella porzione assottigliata, dove appare in forma di minute sferule, e quindi versato all'esterno. Il nucleo di queste cellule sta nella porzione dilatata prossimale, ove lo circonda un citoplasma a fitto citomitoma, ed è dotato di un grosso nucleolo (fig. 13).

La materia secreta è certamente destinata ad assicurare una perfetta unione fra i due individui in copula (1), onde facilitare la penetrazione del grosso spermatoforo attraverso al collo di ogni receptaculum seminis.

I fatti che son venuto esponendo hanno un lato nuovo, ma in parte sono noti nella sottofamiglia degli Eudrilini. Così un passaggio, una " filtrazione „, come altrove ho detto (2), degli spermatozoi frammezzo alle fibre muscolari del robusto canale dei receptacula seminis era già stato descritto da MICHAELSEN (**17**, pp. 341, 342) pel suo *Pareudrilus nyassensis*. La fecondazione interna negli Eudrilini è certamente stata sospettata da tutti i drilologi che hanno studiato questi interessantissimi animali, e ciò data la comunicazione che s'avvera in essi fra receptacula seminis e apparato femminile centrale (3).

La curiosa migrazione degli spermatozoi favorita da speciali organi e da speciali cellule (fimbrie conduttrici e loro cellule migranti [? nutritizie]), la stessa fagocitosi intensissima di spermatozoi per opera di speciali elementi, trova riscontro nei curiosi fenomeni messi in chiaro da KOVALEVSKY (**13**) e da BRUMPT (**5**) negli Irudinei. Questi autori confermarono la " hypodermic impregnation „ dimostrata da WHITMAN (**25**), il quale ammise che lo spermatoforo rappresenti " an injecting apparatus „, destinato a far sì che " the spermatic elements of one " individual are forced through the body-woll of another, at any " point whatsoever „ (p. 361).

WHITMAN stesso fece l'acuta induzione che impregnazione ipodermica s'avverasse anche in altri animali produttori di spermatofori; così nei Chetopodi (**25**, p. 396).

(1) Verosimilmente con disposizione invertita.

(2) Cfr. **9**, p. 31.

(3) Cfr. la diagnosi della subfam. *Eudrilinae* in MICHAELSEN (**15**, p. 387).

Digitized by Google

Non è certo il caso di dire, in base a quanto ho dimostrato per *Pareudrilus pallidus*, " ab uno disce omnes „: ma per la specie in discorso si può affermare che ogni receptaculum seminis non è soltanto " a mere storage-house for the spermato- " phores „, come BEDDARD (3, p. 205) ammette con riserbo per *Polytoreutus*, bensì è un organo destinato a favorire la fecondazione interna.

Noterò infine che in *Alma Aloysii Sabaudiae* Cogn. ho avuto occasione di osservare la fagocitosi di spermatozoi (1) in segmenti più vicini a quello (13°) contenente gli ovari che a quelli contenenti i testes (10° e 11°) o i sacchi seminali (9°, 10°, 11°, 12°): non si tratterebbe anche qui di spermatozoi giunti nell'interno dell'animale attraverso alla parete del corpo? *Alma Al. Sab.* è priva di receptacula seminis (2). Si noti inoltre che le *Alma* vivono negli acquitrini come molti Irudinei, e che, come questi, preparano spermatofori.

LAVORI CITATI

(1) BEDDARD F. E., *A Monograph of the order of Oligochaeta*, Oxford, 1895.

(2) BEDDARD F. E., *On some Earthworms from British East Africa; and on the Spermatophores of Polytoreutus and Stuhlmannia*, " Proc. Zool. Soc. „, London, 1901, I, p. 336-365.

(3) BEDDARD F. E., *On some new Species of Earthworms belonging to the Genus Polytoreutus, and on the Spermatophores of that Genus*, " Proc. Zool. Soc. „, London, 1902, II, p. 190-210.

(4) BEDDARD F. E., *On a new Genus and two new Species of Earthworms of the Family Eudrilidae, with some Notes upon other African Oligochaeta*, " Proc. Zool. Soc. „, London, 1903, I, p. 210-222.

(5) BRUMPT E., *Reproduction des Hirudinées*, " Mém. Soc. Zool. France „, T. 13, 1900, p 286-430.

(6) COGNETTI DE MARTIIS L., *Un nuovo caso di ghiandole ermafroditiche negli Oligocheti*, " Biologica „, vol. I, n. 8, 1906, p. 1-22, tav. 2.

(7) COGNETTI DE MARTIIS L., *Ricerche anatomiche e istologiche sull'apparato riproduttore del genere Kynotus*, " Atti R. Accad. d. Sc. Torino „, vol. 42, 1907, 15 p., 1 tav.

(1) Cfr. 10.

(2) Cfr. la mia descrizione in 9, p. 44.

Digitized by Google

(8) Cognetti de Martiis L., *Nuovi Eudrilini del Monte Ruwenzori* (Diagnosi preliminari), " Bollett. Musei Zool. Anat. Comp. Torino „, vol. 22, 1907, n. 559.

(9) Cognetti de Martiis L., *Lombrichi del Ruwenzori e dell' Uganda*, in: *S. A. R. il Principe Luigi Amedeo di Savoia, Duca degli Abruzzi. Il Ruwenzori.* Parte scientifica. Vol. 1, Zool. e Bot., p. 358-414, 4 tav., Milano, Hoepli, 1909.

(10) Cognetti de Martiis L., *Ricerche sulla distruzione normale dei prodotti sessuali maschili*, " Mem. R. Acc. d. Sc. Torino „, ser. II, vol. 61, 1910.

(11) Emery E., *Compendio di zoologia*, 2ª ediz., Bologna, 1904.

(12) Horst R., *Sur quelques lombriciens exotiques appartenant au genre Eudrilus*, " Mém. Soc. Zool. France „, vol. 3, 1889, p. 223-240, tav. 8.

(13) Kovalevsky A., *Phénomènes de la fécondation chez l'Helobdella algira*, " Mém. Soc. Zool. France „, T. 13, 1900, p. 66-88, tav. 3-5.

(14) Leuckart R. und Nitsche, *Zoologische Wandtafeln*, Taf. XIX, Vermes Annelides Oligochaeta, T. Fischer in Cassel.

(15) Michaelsen W., *Oligochaeta*, in: *Das Tierreich*, 10 Lief., Berlin, 1900.

(16) Michaelsen W., *Die Oligochäten Nordost-Afrikas*, " Zool. Jahrb. Syst. „, 18 Bd., Hft. 4, n. 5, 1903, p. 435-556, tav. 24-27.

(17) Michaelsen W., *Die Oligochäten Deutsch-Ostafrikas*, " Zeitschr. f. wiss. Zool. „, 82 Bd,, 1905, p. 288-367, tav. 19 e 20.

(18) Ratzel F. und Warschawsky M., *Zur Entwickelungsgeschichte des Rogenwurms* (Lumbricus agricola Hoffm.), " Zeitschr. wiss. Zool. „, 18 Bd., 1868, p. 547-562, tav. 41.

(19) Rosa D., *Lombrichi dello Scioa*, " Ann. Museo Civico Genova „, ser. 2ª, vol. 6 (= 26), 1888, p. 571-592, tav. 9.

(20) Rosa D., *Viaggio del Dr. E. Festa in Palestina, nel Libano e regioni vicine.* II, Lumbricidi. " Bollett. Musei Zool. Anat. Comp. Torino „, vol. 8, 1893, n. 160, p. 1-14.

(21) Rosa D., *Revisione dei Lumbricidi*, " Mem. R. Accad. d. Sc. Torino „, ser. 2ª, tom. 43, 1893, p. 399-476, 2 tav.

(22) Vaillant L., *Histoire naturelle des Annelés marins et d'eau douce*, tome III, première partie, Paris, 1889.

(23) Veidovsky F., *System und Morphologie der Oligochaeten*, Prag, 1884.

(24) Vogt E. et Yung E., *Traité d'Anatomie comparée pratique*, tome 1, Paris, 1888.

(25) Withman C. O., *Spermatophores as a means of hypodermic impregnation*, " Journ. of Morphology „, vol. 4, p. 361-406, tav. 14, 1890.

Digitized by Google

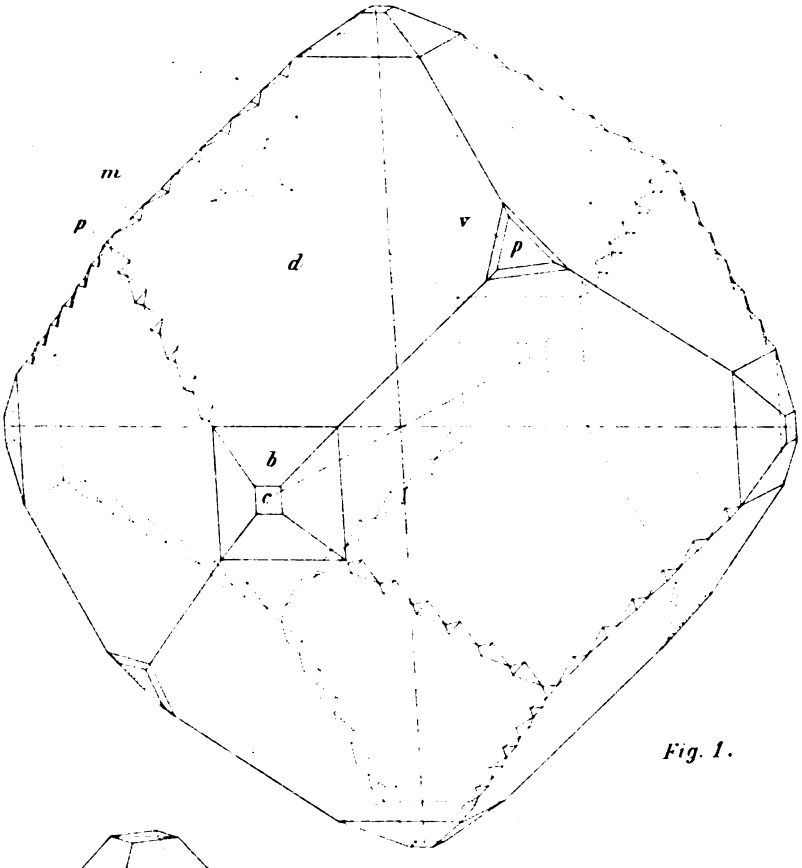


Fig. 1.

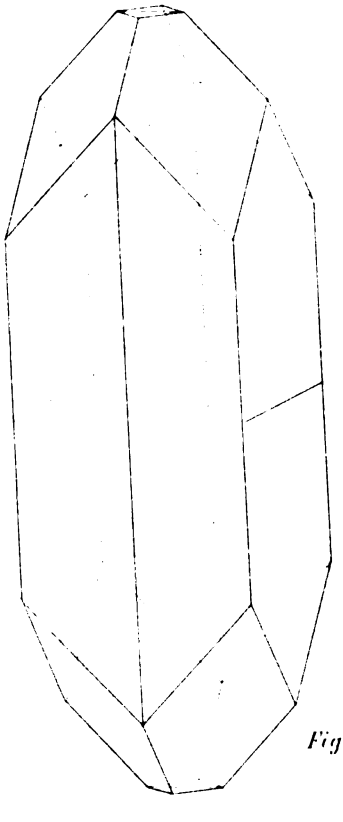


Fig. 2.

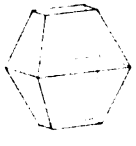


Fig. 3.

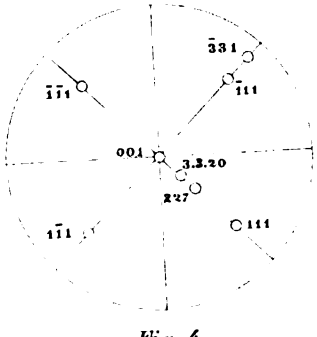


Fig. 4.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

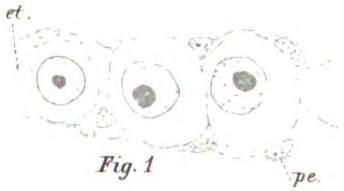


Fig. 1

Fig. 3

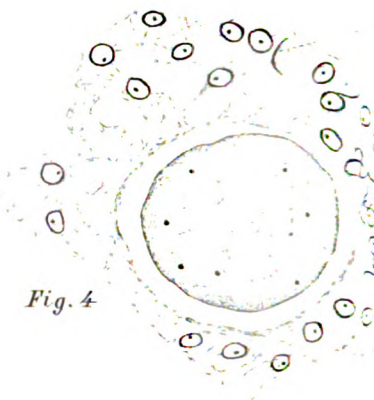


Fig. 4

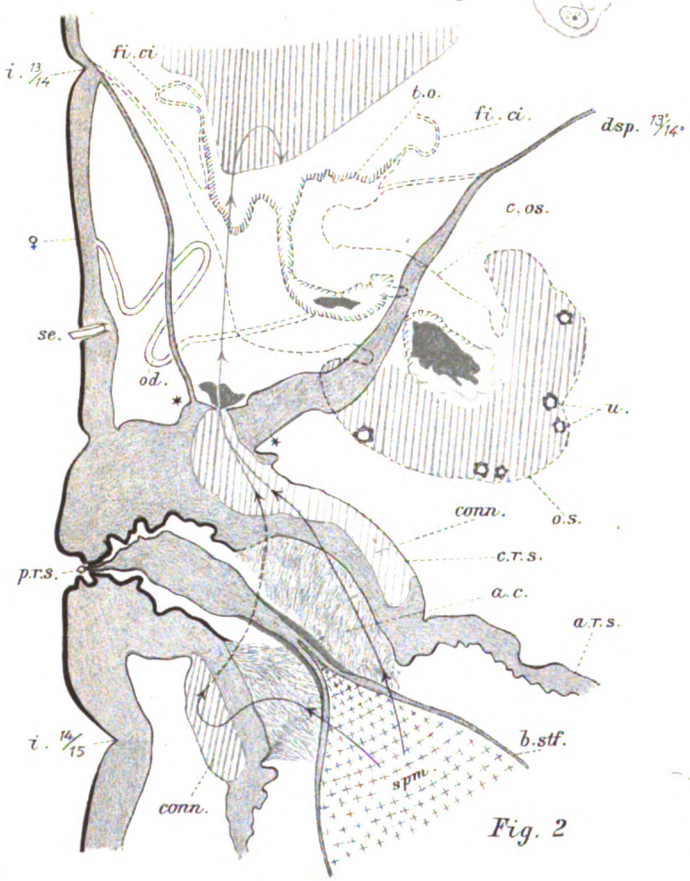


Fig. 2

Fig. 9

Fig. 12

Fig. 10

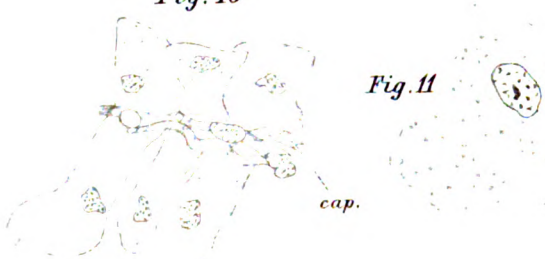
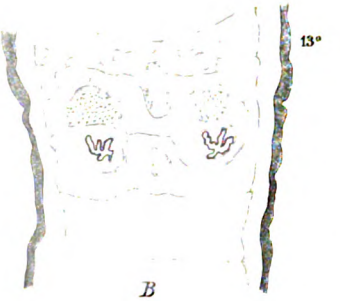


Fig. 11

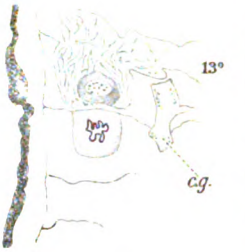
L. Cognetti de Martiis dis.

Digitized by Google

Fig. 5 A



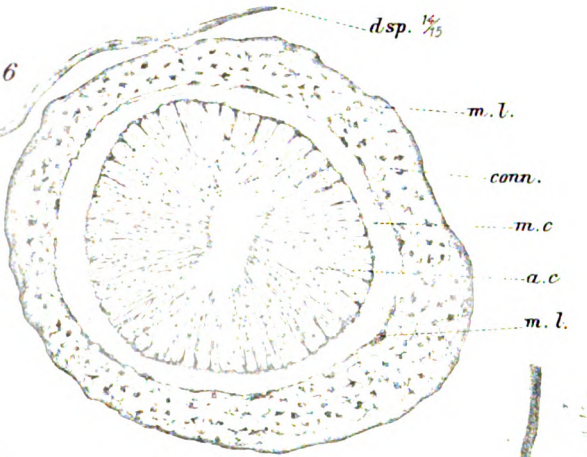
B

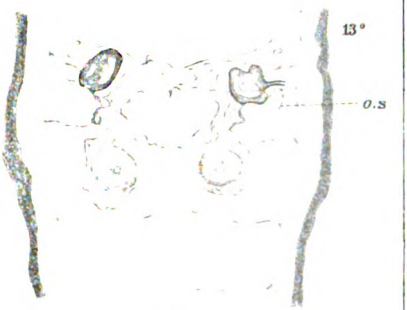


C

D

Fig. 6





E

Fig. 8

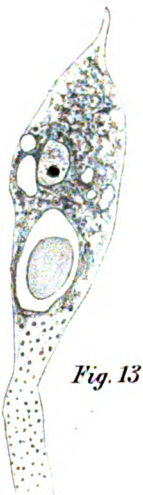


Fig. 13

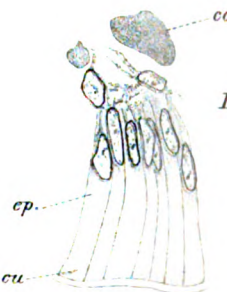


Fig. 7

Lit Salussolia - Torino

Digitized by Google

Digitized by Google

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Parendrilus pallidus Cogn.

Tutte le figure sono tolte da sezioni di due esemplari adulti fissati in alcool e assai ben conservati, l'uno copulato da poco tempo e dotato di spermatofori nei receptacula seminis, l'altro privo di spermatofori.

Dal primo sono ricavate le figure 2, 4, 7 e 8, le rimanenti dal secondo esemplare.

Fig. 1. Porzione dell'ovario circa a metà della sua lunghezza (*ct.* = ovociti; *pe.* = strato peritoneale); × 800.

„ 2. Ricostruzione semischematica, in sezione sagittale, dei rapporti fra receptaculum seminis e 13° segmento; *a. c.* = cellule alte e sottili che tappezzano il lume del tratto prossimale del canale del receptaculum seminis (*c. r. s.*) aperto all'esterno (*p. r. s.*) dietro al fascio di setole ventrali (*se.*); *a. r. s.* = ampolla del rec. sem. racchiudente il bulbo dello spermatoforo (*b. stf.*). Gli spermatozoi (*spm.*) avvoltolati nello spermatoforo sono indicati con crocette. La tuba ovarica (*t. o.*) porta le fimbrie circumtubali (*fi. ci.*) e si continua nel canale muscoloso (*c. os.*) che mena all'ovisacco (*o. s.*) contenente elementi femminili (*u.*) avvolti ognuno da sincizio; *od.* = percorso dell'ovidotto, che, originato dietro al dissepimento (*dsp.*) 13/14, lo attraversa in seguito due volte per poi raggiungere il poro femminile (♀). Il tratteggio verticale indica le regioni in cui si trovano fagociti e cellule nutritizie migranti liberi, e corrisponde, nella parete del canale del receptaculum seminis, al connettivo alveolare (*conn.*). Le masse nere rappresentano spermatozoi accumulati nel 13° segm., nell'ovisacco, e nel suo collo. Le frecce indicano il cammino degli spermatozoi; * * saldatura del dissepimento 13/14 alla parete del canale del rec. sem. × 32.

„ 3. Tre fagociti liberi del 13° segmento; × 800.

„ 4. Ovocito (? ovulo) dell'ovisacco circondato da sincizio racchiudente spermatozoi (*spm.*) fagocitati; × 475.

„ 5 *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. Sezioni longitudinali in serie (schematizzate) onde mostrare i rapporti fra i canali dei receptacula seminis (*c. r. s.*) e il dissepimento 13/14: *c. g.* = catena gangliare ventrale; *fi.* = fimbrie conduttrici; *o. s.* = ovisacco; *p.* = papilla del 14° segmento; × 12.

„ 6. Sezione trasversa del canale d'un recept. sem. nel tratto ch'è rivestito di cellule alte e sottili (*a. c.*): *conn.* = connettivo a larghe maglie; *dsp.* = dissepimento; *m. c.* = muscoli circolari; *m. l.* = muscoli longitudinali; × 68.

„ 7. Rivestimento epidermico (*ep.*) del primo tratto del canale di un recept. sem.; *cap.* = capillare sanguigno; *cu.* = cuticola; × 800.

Digitized by Google

Fig. 8. Cellule allungate e sottili che tappezzano il lume (*l.*) del canale del recept sem. presso l'ampolla; × 800.

„ 9. Estremità di fimbria circumtubale; *cap.* = capillare sanguigno che porta varî fagociti di cui sono raffigurati soltanto contorno, nucleo, e nucleolo; × 800.

„ 10. Porzione di fimbria conduttrice del 13° segmento, *cap.* = capillare sanguigno; × 800.

„ 11. Cellula migrante staccata da una fimbria conduttrice; × 1600.

„ 12. Sezione trasversa della periferia del canale di un recept. sem. poco prima dell'ampolla: *c. n. m.* = cellule (? nutritizie) migranti; *f.* = fagociti; *f. conn.* = fibre connettive; *m. c.* = muscoli circolari; *m. l.* = muscoli longitudinali; *pe.* = nucleo della membrana peritoneale; *v. s.* = vaso sanguigno; × 475.

„ 13. Porzione prossimale di cellula ghiandolare di una papilla del 14° segmento; × 800.

Le fig. 1, 3, 7, 8, 9, 10, 11 e 13 furono eseguite usando l'obbiettivo apocromatico 1,5 a imm. omog. di Zeiss.

Sui primi stadi di sviluppo della colonna vertebrale dei Rettili e degli Uccelli.

Nota del Dr. ANGELO CESARE BRUNI,
Assistente nell'Istituto anatomico di Torino.

(Con 1 Tavola).

In questi due ultimi anni intrapresi uno studio sull'evoluzione della corda dorsale degli Amnioti e sullo sviluppo dei corpi vertebrali e delle articolazioni, che li collegano. Tra gli embrioni esaminati presentano un particolare interesse alcuni di *Gongylus ocellatus* ed altri di Pollo, in cui si possono seguire i primi momenti dello sviluppo della colonna vertebrale. Non mi risulta che il *Gongylus* sia stato sino ad ora utilizzato per questo studio, e per il Pollo non possediamo altro lavoro sull'argomento posteriore a quello classico di Froriep (1883). Rimandando ad una trattazione più completa una discussione critica dei miei reperti, rispetto a quelli avuti dagli AA., mi limito ora ad illustrare otto figure semischematiche, che annetto a questa breve nota e che riproducono i momenti più importanti dello sviluppo della colonna vertebrale nei due animali considerati.

Digitized by Google

Tutte le figure, che presento corrispondono a sezioni frontali della regione toracica a livello della corda dorsale, e riproducono alcuni segmenti dello scheletro assile, che stanno a destra della corda, di cui è rappresentata in *c* la guaina cuticolare. In esse sono indicate in scuro le parti di tessuto più addensato, in chiaro quelle di tessuto meno addensato.

Le prime quattro figure si riferiscono ad embrioni di *Gonyylus*, in cui il disco, costituito dall'animale avvolto a spira, presenta rispettivamente le seguenti misure, prese col compasso di spessore dopo fissazione:

1°	lunghezza	del	disco	mm.	3,8	larghezza mm.	2,6
2°	„	„	„		6,4	„ „	4,3
3°	„	„	„		6,1	„ „	5,3
4°	„	„	„		6,7	„ „	5

Le quattro ultime figure corrispondono a pulcini rispettivamente della fine del 3°, 4°, 5° e 6° giorno d'incubazione.

Nella fig. 1ª notiamo che ogni protovertebra è già nettamente divisa in miotomo (*m*) e sclerotomo (*scl*), situato medialmente. Lo sclerotomo giunge sino ad immediato contatto della guaina cuticolare della corda (*c*). Il limite fra gli sclerotomi successivi non è segnato da speciali modificazioni di tessuto, ma semplicemente dalla posizione caratteristica delle sezioni dei vasi interprotovertebrali (*vip*) giacenti sulla linea, che continua medialmente il limite fra i miotomi successivi. Gli sclerotomi sono costituiti di cellule mesenchimali, riccamente anastomizzate fra di loro e molto avvicinate nella metà laterale, che appare perciò più densa, più lassamente unite nella metà mediale. Tuttavia l'addensamento laterale dello sclerotomo si continua medialmente degradando e restringendosi sino ad incontrare un altro sottile addensamento longitudinale pericordale (*gc*, *guaina cellulare della corda*) continuo, come il laterale, per tutta la serie degli sclerotomi, e costituito di cellule avvicinate ed abbastanza regolarmente disposte in uno strato di uno o due ordini di cellule.

Nella fig. 2ª la distinzione dei singoli sclerotomi è anche indicata soltanto dalla posizione dei vasi interprotovertebrali (*vip*). La linea, che separa la serie di essi lateralmente verso i miotomi (*m*), non è più retta; si osserva invece che ciascun mio-

Digitized by Google

tomo presenta una sporgenza cuneiforme mediale, che viene accolta in una corrispondente incavatura di ciascun sclerotomo. L'apice della sporgenza del miotomo non corrisponde esattamente alla metà craniocaudale dello sclerotomo, bensì all'unione dei $^{2}/_{5}$ craniali coi $^{3}/_{5}$ caudali. Per descrivere le particolarità presentate da ciascun sclerotomo è utile considerarlo diviso in cinque sezioni sovrapposte nel senso caudocraniale. Vediamo allora che i $^{2}/_{5}$ craniali sono formati di tessuto lasso e contengono verso l'estremo laterale la sezione del nervo spinale: i $^{2}/_{5}$ intermedii sono composti di tessuto mesenchimale molto denso (*a*), il $^{1}/_{5}$ caudale di nuovo di tessuto molto lasso identico a quello dei $^{2}/_{5}$ craniali dello sclerotomo seguente, col quale è fuso in una massa chiara contenente i vasi interprotovertebrali. La parte laterale dello sclerotomo, che si mette in rapporto coi miotomi formando un processo cuneiforme diretto lateralmente, presenta un orlo di tessuto addensato interrotto soltanto là dove si trova la sezione del nervo spinale e l'apice del miotomo. Un'altra zona di tessuto addensato, fatto di parecchi ordini di cellule disposte per il lungo, si nota subito di lato alla corda (*gc*, *guaina cellulare della corda*). Nei punti in cui ci sono gli addensamenti trasversali dello sclerotomo questa zona si allarga come per formare ad essi un piede.

Se diamo ora uno sguardo d'insieme alla stessa figura 2ª senza tener conto della divisione del blastema schelettogeno in sclerotomi, vediamo che ai lati della corda esiste uno strato di tessuto condensato formantele un involucro continuo (*gc*, *guaina cordale cellulare*), dal quale partono a regolare intervallo delle strie di tessuto denso (*a*, *archi vertebrali primitivi di* Froriep), che si portano prima in fuori, poi in fuori e caudalmente (*a'*), formando il limite caudale di una incisura angolare destinata a ricevere un prolungamento cuneiforme mediale del miotomo. L'estremità laterale dell'ispessimento descritto si continua con un altro più sottile (*a''*), diretto in senso caudale e lateromediale, che forma il limite craniale dell'incisura destinata a ricevere il prolungamento laterale del miotomo seguente. Nell'insieme ogni striscia di tessuto addensato prende l'aspetto di un uncino disposto in senso trasversale col becco volto caudalmente. Fra due di queste striscie unciniformi viene limitato uno spazio chiaro costituito di mesenchima lasso che contiene nella sua parte cra-

Digitized by Google

niale le sezioni dei vasi interprotovertebrali (*vip*), nel suo estremo caudolaterale la sezione del nervo spinale (*n*).

Nella figura 3ª, sebbene tolta da un embrione ben poco più grande di quello da cui è tolta la figura precedente, vediamo delle profonde modificazioni. Anzitutto si è fatta meno regolare la disposizione dei vasi interprotovertebrali (*vip*) e non sono più distinguibili nè l'addensamento di tessuto pericordale (fig. 2 *gc*), nè la complicata disposizione degli addensamenti nella parte laterale degli sclerotomi (fig. 2ª *a'*, *a''*). Anche i miotomi (*m*) non mostrano più il prolungamento cuneiforme mediale caratteristico dello stadio precedente. Ora dalla guaina cuticolare della corda partono a regolare intervallo delle striscie di tessuto addensato (*a*, *archi vertebrali primitivi*) dirette obliquamente in senso mediolaterale e craniocaudale, dolcemente incurvate, insinuantisi fra i miotomi, che, incominciando da questo periodo, è meglio chiamare *miomeri* (secondo la nomenclatura proposta da GADOW, che vuole riservata la terminazione *...mero* per le disposizioni segmentarie definitive, *...tomo* per quelle embrionarie). Medialmente al miomero, nello spazio fra due archi vertebrali primitivi successivi, troviamo nell'estremità caudolaterale dello spazio stesso la sezione del nervo spinale (*n*); medialmente e cranialmente rispetto al nervo un gruppo di due o tre vasi (vasi interprotovertebrali spostati, *vip*); poi, subito medialmente ai vasi, una striscia longitudinale di tessuto addensato (*mia*) poco nettamente delimitata, sottile in mezzo ed allargata all'impianto sulle due striscie trasversali successive. Poichè questa striscia congiunge due archi primitivi si può chiamare *membrana interarcuale*. Medialmente ad essa si trova una zona chiara (*x*), che giunge fino a contatto della corda ed istologicamente consta di un protoplasma sinciziale cosparso di nuclei tondeggianti piuttosto grossi ed allontanati gli uni dagli altri.

Con questo stadio, che chiude il periodo così detto membranoso o blastemale dello sviluppo della colonna vertebrale (BARDEEN), il corpo vertebrale è abbozzato.

Infatti nella figura 4ª non ci sono sostanziali differenze. Solo si è meglio determinata la forma del corpo vertebrale e sono avvenuti alcuni differenziamenti istologici. Tutto il campo del corpo vertebrale, segnato nella figura con una linea punteggiata, si presenta costituito da un simplasma disseminato di nuclei

Digitized by Google

tondeggianti piccoli, avvicinati nelle parti segnate più scure, più grossi e più distanti in quelle segnate più chiare. V'è inoltre una piccola zona centrale pericordale (tratteggiata nella figura); in cui un fine trabecolato di sostanza fondamentale divide il sincizio in campi cellulari. È un centro di condrificazione. Se ne hanno due per ciascuna vertebra, poichè nè sopra nè sotto la corda si vede qualche segno di continuità tra l'uno e l'altro.

Consideriamo ora le figure tolte da embrioni di Pollo.

Nella fig. 5ª, che rappresenta uno stadio forse di poco precedente a quello della fig. 1ª, vediamo pure la divisione degli sclerotomi (*scl*) soltanto indicata dalla disposizione delle sezioni dei vasi interprotovertebrali (*vip*). Lo sclerotomo consta di tessuto addensato nella metà laterale, lasso nella metà mediale. Manca un ispessimento pericordale. A metà altezza delle protovertebre, e non in tutte, una disposizione particolare delle cellule mesenchimali allungate in direzione trasversale, piuttosto che una vera soluzione di continuità, indica una traccia della così detta *fessura intervertebrale di* v. EBNER (*fi*). Medialmente questa fessura si perde poco dopo aver sorpassata la zona laterale ispessita dello sclerotomo.

La fig. 6ª mostra ancora i vasi interprotovertebrali (*vip*) nella disposizione tipica. La metà craniocaudale dello sclerotomo è occupata da una larga striscia addensata (*a*), che medialmente giunge fino a contatto della corda fondendosi con un sottilissimo ispessimento pericordale continuo (*gc*), e costituita di uno o al più due ordini di cellule. Esiste ancora un largo tratto ispessito nella parte laterale dello sclerotomo, però il limite laterale di questo non è più rettilineo, ma presenta per ciascun sclerotomo e per tutta l'altezza di esso una regolare incavatura angolare, destinata a ricevere un prolungamento mediale del miotomo, il cui apice viene a corrispondere alla metà craniocaudale dello sclerotomo. I vasi interprotovertebrali (*vip*) si trovano nell'ispessimento laterale, la sezione del nervo spinale (*n*) è lateralmente e caudalmente ad essi.

La figura 7ª non presenta altra variazione rispetto alla precedente all'infuori dello spostamento dei vasi interprotovertebrali (*vip*), che hanno perduta la disposizione regolare.

Nella figura 8ª notiamo anzitutto che la linea, la quale segna

Digitized by Google

la guaina cuticolare della corda (*c*), non è più retta. Abbiamo infatti nella corda un lieve strozzamento intervertebrale e un altro lieve strozzamento al centro del corpo vertebrale, ora abbozzato. Le modificazioni del blastema schelettogeno rispetto allo stadio precedente si riducono a queste: 1° I vasi interprotovertebrali (*vip*) si sono raccolti in gruppo intorno al nervo spinale (*n*); 2° Dalla guaina cordale (*c*), lungo la quale c'è ancora una striscia di tessuto denso (*gc*), costituita da quattro o cinque ordini di cellule piccole ed avvicinate, partono sempre delle striscie addensate trasversali (*a*), oblique in senso laterocaudale e prolungantisi fra i miotomi. Sono gli archi vertebrali primitivi, relativamente più sottili che nello stadio precedente: si può arguire che essi rappresentano solo la parte craniale di quelli disegnati nelle figure 6ª e 7ª, perchè lateralmente occupano la parte craniale dei primitivi larghi ispessimenti laterali degli sclerotomi (*a'*), ancora accennati; 3° Come fatto più importante si nota un robusto addensamento nel limite mediale degli ispessimenti laterali ora ricordati, addensamento (*mia, membrana interarcuale*) situato subito medialmente al gruppo dei vasi (*vip*) e nervo (*n*) segmentali; 4° Medialmente tra questo addensamento e le striscie trasversali un'area chiara, in cui le modificazioni istologiche preludono alla condrificazione, e le cellule si dispongono grossolanamente secondo le linee indicate dal tratteggio.

Lo stadio rappresentato da questa figura 8ª corrisponde ad uno intermedio fra quelli rappresentati dalle figure 3ª e 4ª.

Paragonando ora gli stadi pressochè corrispondenti rappresentati dalle figure 1ª e 5ª, 2ª e 6ª-7ª, 3ª-4ª e 8ª, vediamo che si può facilmente stabilire un parallelo fra gli stadi di sviluppo della colonna vertebrale del *Gongylus*, e quelli della colonna vertebrale del Pollo. Nelle figure 5ª e 1ª vediamo che i differenziamenti si iniziano nella parte laterale dello sclerotomo. Nelle figure 6ª-7ª e 2ª assistiamo alla formazione del così detto *arco vertebrale primitivo di* FRORIEP, sotto forma di un ispessimento della parte media craniocaudale dello sclerotomo. Questo ispessimento appare più largo nel Pollo e situato esattamente nella metà craniocaudale dello sclerotomo, più sottile nel *Gongylus* e situato un po' inferiormente alla parte media dello sclerotomo. Lateralmente gli archi si continuano con i residui dell'ispessi-

Digitized by Google

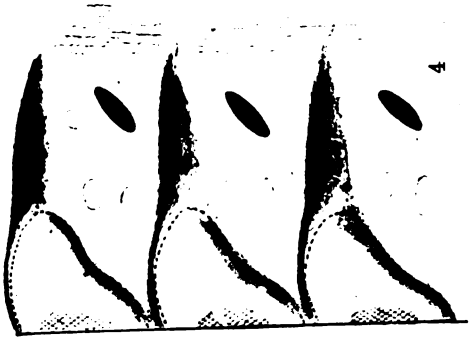
mento laterale, sottili e già in parte ridotti nel *Gongylus*, ove dànno all'arco primitivo un aspetto uncinato tutto speciale (fig. 2ª *a*, *a'*, *a''*), ancora assai spessi nel Pollo. Notiamo in questo stadio la formazione di sporgenze cuneiformi del miotomo verso lo sclerotomo e viceversa. Questo appare il fattore principale dello spostamento della metameria vertebrale rispetto a quella muscolare. Nelle figure 3ª e 8ª vediamo la scomparsa degli ispessimenti laterali, dei quali nella fig. 8ª resta soltanto e si rinforza la parte più interna, situata medialmente ai vasi interprotovertebrali, a formare quella che ho chiamata *membrana interarcuale*. Dalla stessa figura 8ª, che rappresenta uno stadio precedente a quello della figura 3ª, si può arguire meglio il passaggio dallo stadio delle figure 2ª e 7ª, perchè il primitivo largo ispessimento laterale tende a scomparire, ma non è ancora completamente scomparso. Nel *Gongylus* (fig. 3ª) la membrana interarcuale pare formarsi *ex novo*. Come differenza principale tra il *Gongylus* ed il Pollo, oltre la posizione degli archi primitivi rispetto allo sclerotomo, si nota lo sviluppo che prende nel *Gongylus* lo strato addensato pericordale (guaina cellulare della corda, fig. 2ª *gc*).

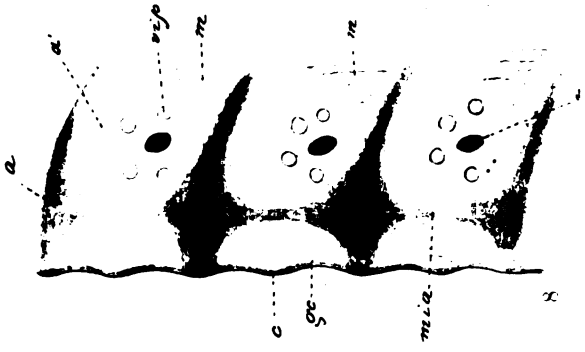
Come conclusione possiamo ora fare le seguenti riflessioni:

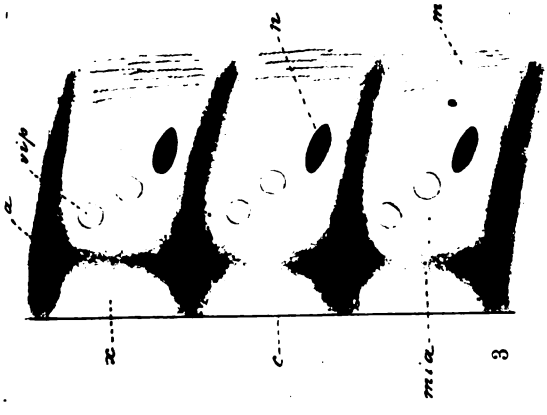
1° Quando cominciano nello sclerotomo i primi differenziamenti, che porteranno alla costituzione dello scheletro assile definitivo, gli sclerotomi sono fusi in direzione longitudinale, solo è indicato il luogo in cui erano i limiti primitivi dalla posizione dei vasi interprotovertebrali. Quindi la colonna vertebrale si sviluppa in un blastema schelettogeno non segmentato, come già aveva osservato Froriep. Questo fa sì che non si possa parlare di *neosegmentazione* della colonna vertebrale, poichè si avrebbe tale neosegmentazione soltanto se la segmentazione primitiva scomparisse allorquando avviene la segmentazione o anche solo il differenziamento della colonna vertebrale definitiva.

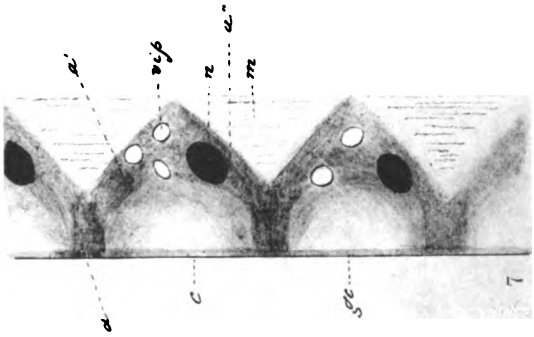
2° La fessura di v. Ebner è già scomparsa o tende a scomparire quando si iniziano i primi differenziamenti degli sclerotomi. Questo contrasta all'opinione degli AA., i quali ritengono che tale fessura si conservi a lungo (Corning, Maenner, Weiss) o anche per tutta la vita (Kollmann) ed appoggia invece l'opinione avanzata in proposito dallo stesso v. Ebner.

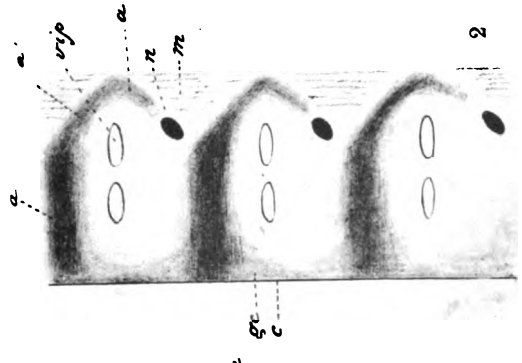
Digitized by Google

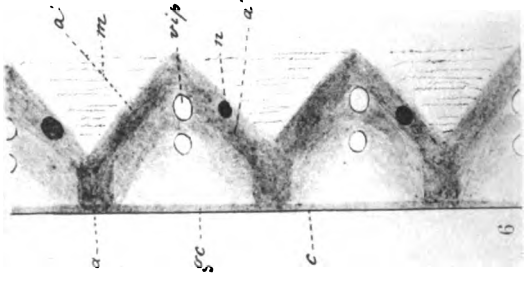


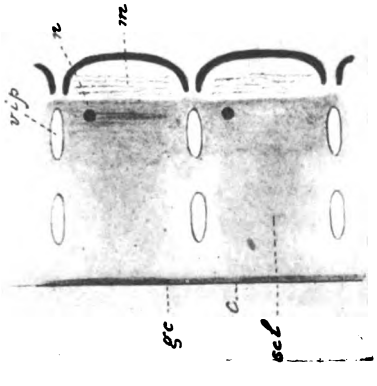


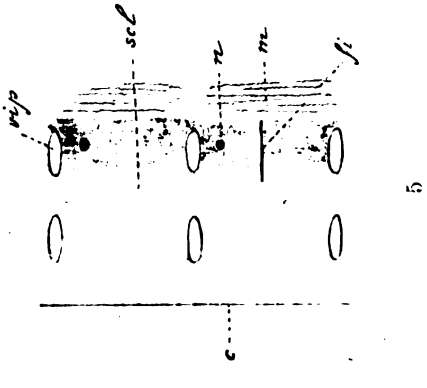












Off. Fototecnica Ing. Molfese. Torino

Digitized by Google

Digitized by Google

3° I primi differenziamenti avvengono nelle parti laterali dello sclerotomo e si manifestano come un addensamento del tessuto mesenchimale.

4° I processi si svolgono in modo molto simile nel *Gongylus* e nel Pollo; però nel *Gongylus* prende un notevole sviluppo un ispessimento pericordale, la così detta guaina cellulare cordale, che nel Pollo si sviluppa assai meno.

5° La delimitazione del corpo vertebrale definitivo, e l'esclusione da esso dei vasi interprotovertebrali viene determinata da una formazione (fig. 3ª e 8ª *mia*), che unendo due *archi vertebrali primitivi* si può chiamare *membrana interarcuale*. Essa non corrisponde alla *membrana interdiscale di* BARDEEN, perchè è situata medialmente al nervo e ai vasi, mentre quella di BARDEEN, come risulta dalle figure dell'A., è posta medialmente al nervo e lateralmente ai vasi.

6° Il corpo vertebrale definitivo risulta costituito: 1° dalla guaina cordale cellulare, 2° da un tratto di sclerotomo che si trasforma direttamente in cartilagine senza previo addensamento, 3° dalla membrana interarcuale, che, procedendo nel suo sviluppo dagli archi contigui nello spazio che li separa (si osservi a questo proposito la parte superiore della fig. 8ª), si può ritenere diretta emanazione di essi.

INDICAZIONI DELLE FIGURE

m = miotomo o miomero.
scl = sclerotomo.
c = guaina cordale cuticolare.
gc = guaina cordale cellulare.
a, *a'*, *a''* = arco vertebrale primitivo di FRORIEP e sue diverse porzioni.
mia = membrana interarcuale.
vip = vaso interprotovertebrale.
n = nervo spinale.
fi = fessura intervertebrale di v. EBNER.

Istituto Anatomico della R. Università di Torino
diretto dal Prof. Romeo FUSARI. Giugno 1910.

Digitized by Google

A proposito dei caratteri micropaleontologici di alcuni calcari mesozoici della Nurra in Sardegna.

Nota del Socio C. F. PARONA

(Con una Tavola).

1. Calcari a struttura oolitica del Dogger. — Le numerose sezioni da me esaminate furono tagliate da campioni di calcari raccolti dall'Ing. S. Franchi nelle seguenti località: Monte Elva, Monte Rosé, Monte Alvaro, Case di Monte di Bidda, Case Lu Crabioni e sopra le Case Badda Agliastra. Sono calcari giallastri fossiliferi, che, riferendoci alla tabella delle formazioni mesozoiche della Sardegna proposta dal Deninger (1), spettano alla serie del Dogger. Lasciando impregiudicata la questione dell'età bajociana o batoniana, che si risolverà collo studio dei fossili macroscopici, è da escludere, anche per consenso dell'Ing. Franchi, che questi calcari appartengano al Trias superiore, sviluppato nella Nurra con caratteri litologici diversi e ben conosciuti, od al Retico. Essi infatti presentano, fra gli altri fossili (brachiopodi, lamellibranchi e gasteropodi), delle belemniti, e con ogni probabilità corrispondono cronologicamente ai calcari rossi con crinoidi e stromatoporidi (2), ai quali si può ritenere, che essi siano collegati da passaggi laterali. Nessun dato ci permette poi di ascrivere questi calcari al Lias, che, d'altra parte, secondo la tabella del Deninger, manca alla Sardegna.

Evidente è la struttura oolitica, più o meno minuta, ma visibile anche senza mezzi d'ingrandimento; con questi la roccia appare in generale come un aggregato, a cemento di calcare spatico, di corpuscoli oolitiformi e di frammenti di cidariti, pentacrinidi, apiocrinidi, ecc., rosette di *Antedon*, di oloturidi,

(1) K. Deninger, *Die mesozoischen Formationen auf Sardinien*, " N. Jahrb. für M., G. u. P. „ 1907, Beil. Bd. XXIII, pag. 470.

(2) K. Deninger, *Einige neue Tabulaten und Hydrozoen aus mesozoischen Ablagerungen*, " Ibid. „ 1906, I Bd., pag. 66. — G. Osimo, *Alcune nuove Stromatopore giuresi e cretacee di Sardegna e dell'Appennino*, " Mem. R. Acc. delle Sc. di Torino „ 1910 (Adun. 29 maggio).

Digitized by Google

(*Chirodota*), spicole di forme svariate, lembi di colonie di briozoi e detriti di altri fossili, molluschi, brachiopodi, ecc. Liberi e non numerosi, spesso compresi nei corpi oolitiformi, si presentano i foraminiferi, che, per i confronti fatti colle faune giurassiche illustrate da SCHWAGER, TERQUEM, DEECKE, ecc., sono da riferire ai generi *Spiroloculina, Pentellina, Cornuspira, Haplophragmium, Ammodiscus, Trochammina, Textularia, Glandulina, Dentalina, Frondicularia, Cristellaria, Polymorphina*, ecc. Più comuni sono certe forme, le cui sezioni trasverse, appaiono assai simili a quelle del genere cretaceo *Vidalina* Schlumb.

I corpi oolitiformi in generale hanno la struttura zonaria e fibroso-radiata delle tipiche ooliti ed un corpo straniero ne forma il nucleo centrale (figg. 3, 6, 7); ma spesso al nucleo centrale si sostituisce un aggruppamento geodico di cristallini di calcite (fig. 8), per cui, secondo la distinzione di GÜMBEL, i primi si direbbero *extooliti*, ooliti formate appunto da zone concentriche avviluppanti un nucleo, e questi altri *entooliti*, a guisa di cellule calcaree vuote, internamente tappezzate di cristalli (1). L'interesse particolare ch'essi presentano dipende dal fatto, che vi si riscontrano delle masserelle coi caratteri di certe alghe sifonee codiacee.

La descrizione che il ROTHPLETZ dà del suo genere *Sphaerocodium* (2) si adatta molto bene a questa forma giurassica: infatti, i corpi oolitiformi, sferici o subsferici, avvolgono, come si disse, piccolissimi pezzi di crinoidi (fig. 7), frammentini di conchiglie o minutissime conchiglie di molluschi (fig. 5), nicchi di foraminiferi (fig. 6), od altri corpi, che sempre ne costituiscono il nucleo centrale, pur non essendo rari i casi di altri corpi stranieri inglobati nel successivo sviluppo in spessore; ne viene che spesso la forma esterna è irregolare ed anche allungata in dipendenza appunto della forma dei corpi stranieri inglobati. La struttura a filamenti, o cellule tubulari allungate,

---

(1) Le idee sulla formazione delle ooliti furono di recente riassunte brevemente nell'operetta di L. W. COLLET, *Les dépôts marins* (V^e^ Part., Chap. I, pag. 278), " Encyclop. Scientif. „.

(2) ROTHPLETZ, *Fossile Kalkalgen aus dem Familien der Codiaceen und der Corallineen*, " Zeitschr. d. Deutsch. Geol. Gesellsch. „, XLIII Bd., 1891, pag. 296, tav. XV e XVI.

Digitized by Google

aggrovigliate (figg. 1, 4), spesso dicotome, è talvolta chiarissima alla superficie del tallo oolitiforme (fig. 2), o nell'interno (fig. 3): quivi stanno delle cavità allungate e disposte con una certa regolarità, secondo la zonatura, che potrebbero essere interpretate come sporangi (fig. 7). Esse, come le cellule tubulari, sono occupate da calcare spatico incoloro, che spicca per la sua trasparenza sulla massa del tallo, costituita da calcare più o meno intensamente colorato in giallo rossastro o in bruno e talvolta quasi opaca anche nelle sezioni molto sottili.

Riguardo a questi caratteri strutturali non si osservano dunque differenze essenziali in confronto col gen. *Sphaerocodium*; tuttavia è notevole la piccolezza dei corpi oolitiformi, interpretati come talli, che non raggiungono la dimensione massima di 2 cent. di diametro data da Rothpletz per la sua specie (*Sphaer. Bornemanni*), mantenendosi in generale nelle dimensioni minori di 3 mm. di diametro. Una eccezione però si deve fare, ed è per un calcare giallo di S. Agnese (Alghero), sulle cui superfici l'erosione ha posto in evidenza nel modo più chiaro delle ooliti, che variano di diametro da 1 a 2 cent. e più, e che riproducono esattamente le figure in grandezza naturale (2, 5, 6) della tav. XV di Rothpletz. Se non che, mentre l'esame al microscopio dei numerosi preparati lascia presumere che in questi corpi le alghe codiacee non manchino, in nessun caso si osservano le cellule tubulari aggrovigliate in modo così nitido, come negli altri calcari oolitici prima accennati. Ciò può dipendere dal fatto che, nelle supposte codiacee del calcare di S. Agnese, la struttura fibrillare è forse più minuta e quindi meno facilmente visibile.

Qui torna opportuno il far notare inoltre, che le ooliti di S. Agnese, più delle altre prima considerate, ricordano per certi riguardi quelle calcareo-ferruginose ed a chamoisite (*Murchisonae-Schichten*) recentemente descritte da Gaub (1), il quale interpreta la loro formazione come dovuta al concorso di una forma di foraminifero del gen. *Ophthalmidium* (*Ophth. oolithicum* Gaub.). Ma, per quanto mi risulta dalle osservazioni fatte, non

(1) Fr. Gaub, *Die jurassischen Oolithe der Schwäbischen Alb.*, " N. J. f. M., G. u. P. „ II Bd., 1908, pag. 87, tav. VII e VIII.

Digitized by Google

credo che questa interpretazione possa applicarsi all'oolite di S. Agnese e tanto meno a quelle degli altri giacimenti.

La corrispondenza delle descritte masserelle di cellule tubulari aggrovigliate con quelle del gen. *Sphaerocodium* è dunque assai stretta; ma con tutto ciò non si può affermare che si tratti effettivamente di questo genere, perchè non risulta in modo sicuro, che le cellule tubulari presentino le caratteristiche terminazioni ad ampolla interpretate come sporangi, le quali, secondo ROTHPLETZ, costituiscono la differenza fra il gen. *Sphaerocodium* ed il gen. *Girvanella* Nich. et Etheridge. Infatti in quest'ultimo genere, interpretato dapprima come forma di foraminifero dal NICHOLSON (1), che poi, secondo riferisce ROTHPLETZ, ne ammise la natura vegetale ed il riferimento alle codiacee, mancano, o non furono scoperte, le caratteristiche terminazioni ad ampolla, ragione per cui la spettanza del gen. *Girvanella* alle alghe codiacee, nota lo stesso ROTHPLETZ, è meno sicura.

Secondo i trattatisti (2), il gen. *Sphaerocodium* trovasi nel Permico e nel Triassico, ed il gen. *Girvanella* nel Silurico. Ma non è da trascurare il fatto, che WETHERED (3) illustrò diverse forme di *Girvanella*, trovate in ooliti del Carbonico, dell'Oolite inferiore e del Giura superiore. Le figure della tavola, che accompagna la nota di questo autore, rappresentano le sezioni di corpi oolitiformi, contenenti in posizioni varie gli intrecci delle Girvanelle, dall'autore ripartite in cinque forme, in base alle diversità di calibro dei filamenti. Esse hanno un'impronta di verità ed esattezza, come parmi di poter giudicare, arguendo dalla singolare corrispondenza, che le figure stesse presentano coi diversi aspetti delle ooliti e degli intrecci di cellule tubulari da me osservati nei calcari della Nurra e di altri giacimenti, nei quali prevalgono gli intrecci a fini filamenti, esattamente rappresentati dalle figure 1, 5, 6 (*G. incrustans, G. minuta*)

(1) H. A. NICHOLSON, *On certain anomalous Organisms which are concerned in the Formation of some of the Paleozoic Limestones*, " The Geolog. Magaz. „, 1888, vol. V, n. 1, pag. 22, fig. A, B.

(2) G. STEINMANN, *Einführung in die Paläontologie*, Leipzig, 1907, pag. 16 " Das Pflanzenreich „.

(3) ED. WETHERED, *On the Occurrence of Genus Girvanella in Oolitic Rochs, and Remarks on Oolitic Structure*, " The Quart. Journ. of the Geol. Soc. of London „, vol. XLVI, 1890, pag. 270, tav. XI.

Digitized by Google

di WETHERED, pur non essendo rari gli intrecci meno aggrovigliati e con filamenti di calibro assai maggiore (fig. 2, *G. Ducii*).

Data la imperfetta conoscenza dei caratteri del gen. *Girvanella*, e le strette affinità sue col gen. *Sphaerocodium*, ritengo che non si possa con tutta sicurezza ammettere, che esista una reale differenza fra l'uno e l'altro, e che si tratti effettivamente di due generi distinti. Così è logico ammettere, che contemporaneamente e in tempi successivi siano esistite forme specifiche diverse di questo o di questi generi, ma le traccie o gli avanzi fossili di queste alghe calcari, quali a noi si presentano, sono troppo imperfette per ritenere giustificate la istituzione e la distinzione di diverse specie.

Non per questo lo studio loro è da trascurare, non essendo esclusa la probabilità, che si giunga a riconoscerne più nettamente i caratteri. Così, tenendo presenti le diverse interpretazioni proposte dagli autori sull'origine dei calcari oolitici, e considerando l'importanza del fenomeno nel riguardo paleontologico e geologico, mi proposi di estendere le ricerche ai calcari con struttura oolitica, che sono specialmente frequenti nelle serie liassica e giurassica del Veneto e dell'Appennino centrale, e nel Cretaceo dell'Appennino centrale e meridionale. Può darsi che dal riconoscimento dei caratteri delle singole forme, e dall'esame comparativo, derivino nuovi elementi utili allo studio dell'interessante e complesso fenomeno della origine delle ooliti, imperfettamente conosciuto nelle sue modalità, in rapporto con le condizioni varie di ambiente, nelle quali esso si svolse, e col concorso dei fattori, che, a quanto sembra, variano a seconda dei casi ed intervengono nel fenomeno con una azione diretta od indiretta.

I risultati ottenuti finora, colle ricerche appena iniziate, non sono tali da permettere di generalizzare qualche deduzione, che forse si potrebbe formulare. Ad ogni modo si può riconoscere che la struttura a tubicini cellulari in intreccio più o meno aggrovigliato, interpretabile come avanzo fossile di alghe calcari codiacee, è abbastanza frequente nei calcari oolitici, e si ripresenta nei piani successivi dal Silurico al Giurassico e probabilmente al Cretaceo. A conferma accennerò brevemente, fra i calcari con corpi oolitiformi, a quelli nei quali riconobbi la struttura in discussione.

Digitized by Google

Permo-carbonico. — Un campione di Forni Avoltri in Carnia, e precisamente del calcare grigio-chiaro a sfumature rossastre, con *Fusulina alpina* e *Schwagerina princeps*, sovrastante ai calcari neri con *Fusulina carnica*, presenta, insieme colle alghe calcari dubitativamente riferite dal GORTANI (1) al gen. *Gyroporella*, numerosi corpi pisolitiformi, di varia grandezza, che raggiungono e superano il diametro di un centimetro. All'esame microscopico essi mostrano, nelle sezioni molto sottili, ben evidente la struttura a tubicini cellulari, affatto simile a quella che si osserva nelle grandi Girvanelle (*G. problematica*, Nich. et Eth.) del Silurico inferiore di Wisby (Gotland), come ho potuto verificare per confronti con esemplari, che si conservano nel Museo di Torino.

Trias. — Nel *raibliano* di Acquate presso Lecco, noto per la bella fauna a *Hinnites Ombonii*, *Pecten filosus*, *Cassianella gryphaeata*, ecc., il calcare marnoso finamente arenaceo presenta delle masserelle pisolitiformi, nelle quali si riconosce la struttura caratteristica del gen. *Sphaerocodium*. Più numerosi, e ben evidenti sulla superficie erosa della roccia, sono i corpi pisolitiformi, caratterizzati dagli stessi intrecci di filamenti, del calcare con *Worthenia contabulata* (Costa) delle Cime Ferne presso Calascio (Aquila) nell'Appennino centrale. Lo stesso carattere riscontrai pure nel calcare dolomitico di Campolungo (Solagna), in Val del Brenta, del Trias superiore con *Megalodon Seccoi* (Dolomia principale). I corpi pisolitiformi di questo calcare furono, molti anni or sono, da me interpretati come litotamni, e più recentemente il Dott. D. DEL CAMPANA (2), li ritenne " ooliti non molto diverse da quelle, che lo STOPPANI classificò sotto il nome di *Evinospongia nummulitica* ". Io non ho potuto esaminare questa cosidetta *Evinospongia* della Dolomia principale, perchè sfortunatamente l'esemplare tipo non si rin-

---

(1) M. GORTANI, *Fauna permo-carbonifera del Col Mezzodì*, " Palaeont. Italica ", XII, 1906, pag. 7, tav. I, fig. 1 e 2.

Il campione da me esaminato fu raccolto sulla destra del Degano in occasione della gita fatta dalla Soc. Geol. Ital. il 21 agosto 1905.

(2) D. DEL CAMPANA, *Fossili della Dolomia principale della Valle del Brenta*, " Boll. d. Soc. Geol. It. ". XXVI, 1907.

Digitized by Google

venne nella collezione Stoppani del Museo Civico di Milano, come cortesemente mi informò l'amico Prof. MARIANI. Ebbi modo invece di esaminare, per gentilezza dello stesso collega, un bel campione di *Evinospongia nummulitica* della Dolomia principale di S. Rocco sopra Arzo e la forma affine *Evinosp. resiculosa* Stopp. (esempl. tipici) del calcare di Esino; ma, per quanto non vi abbia trovato traccia delle alghe in discorso, non ho potuto convincermi, che la loro struttura sia esclusivamente concrezionale, quale per contro si può senza riserva ritenere sia quella della *Evinosp. cerea* Stoppani.

Lias. — Soltanto nel calcare grigio oolitico del Lias inferiore, che appare presso Arischia sulla via di Teramo (Appennino centrale), mi riuscì di osservare nettamente la struttura interpretata come intreccio di filamenti di alga codiacea.

Anche i calcari bianchi dello stesso piano, con fauna a piccoli molluschi e specialmente gasteropodi, che affiorano in molti punti dell'Appennino Centrale, tipici fra gli altri quelli di Cesi, sono spesso oolitici e pisolitici, in dipendenza del fenomeno d'incrostazione calcare, reso inoltre manifesto dalla velatura o dal rivestimento calcare, che più o meno maschera gli ornamenti dei fossili. Vi si trovano delle vere pisoliti, ma più spesso si tratta di forme bernoccolute, formate da una corteccia calcare, che comprende interessanti avanzi di celenterati non ancora sufficientemente studiati, ma non di rado sicuramente riconoscibili come *Idrozoi*.

I risultati dell'esame delle sezioni tagliate da calcari oolitici di numerosi giacimenti liassici e giurassici delle Prealpi Venete e del Cretaceo dell'Appennino non corrisposero finora all'aspettativa e furono negativi. Infatti neppure le ooliti intensamente colorate in rosso, giallo e bruno degli strati a pentacrini e degli strati a *Murchisonae* di S. Vigilio nel Veronese mi presentarono traccie dei ricercati intrecci di filamenti cellulari. In generale hanno una manifesta struttura cristallina sia nella parte cementante del calcare, sia nelle masserelle oolitiche, e lo studio di queste roccie, più che al paleontologo, può riuscire interessante al mineralogo, specialmente per i diversi aspetti, che le ooliti presentano in dipendenza della cristallinità più o meno pronunciata.

Digitized by Google

Riservandomi di continuare in queste indagini, credo intanto di poter dedurre dalle osservazioni fatte nei calcari della Nurra e di altre regioni, che la struttura caratteristica di intrecci più o meno aggrovigliati di filamenti cellulari di vario calibro, interpretabili come avanzi di alghe codiacee, sia abbastanza comune nei calcari oolitici e pisolitici paleozoici e mesozoici, e che probabilmente la struttura cristallina fibroso-radiata, ingeneratasi spesso nelle concrezioni oolitiche e pisolitiche per effetto di azioni metamorfiche, sostituendosi alla struttura organica, abbia determinata la scomparsa delle alghe calcari suddette. Così appare sempre più manifesta nella sua efficacia la cooperazione degli organismi nel fenomeno degli accentramenti oolitici e pisolitici di carbonato di calcio, bianchi o più o meno intensamente e variamente colorati da prodotti di ferro; cooperazione messa in luce dagli studi di NICHOLSON, WETHERED, GAUB, e segnatamente dal ROTHPLETZ, al quale devesi l'importante osservazione, che spesso i banchi calcari nella serie di S. Cassiano e di Raibl, e nella serie retica risultano quasi esclusivamente dell'alga calcare da lui descritta (*Sphaerocodium Bornemanni*).

2. Calcari a miliolidi trematoforate del Cretaceo superiore. — La corrispondenza nei caratteri micropaleontologici permette di considerare in gruppo le sezioni sottili dei calcari raccolti dall'Ing. FRANCHI nei dintorni di Porto Conte (presso Cantoniera; falde N, presso la vetta, Sella, torre di M. Pedrosu, Molo, Scogli) e di Alghero (S. Agnese, Ponte Calich). Fra i calcari di P. Conte, ve ne sono di compatti, ma prevalgono quelli finamente oolitici, e spesso al centro delle piccole ooliti si osserva un minutissimo avanzo organico od una masserella cristallina, analogamente a quanto già notai per i calcari oolitici giurassici, ma senza traccie di alghe o di altri organismi, cui connettere l'origine delle ooliti stesse. Altrettanto può dirsi dei calcari di Alghero.

In questi calcari del Cretaceo si riconoscono detriti di crinoidi e di briozoi e frequenti avanzi di una piccola alga, che ritengo appartenente al genere *Triploporella*. Ma essi sono specialmente caratterizzati dalla ricca fauna a foraminiferi; infatti vi osservai: Lituolidae (*Lituola*, *Haplophragmium*), Miliolidae (*Idalina antiqua* d'Orb., *Periloculina Zitteli*, Mun. Ch. et Schlumb.,

Digitized by Google

Lacazina elongata Mun. Ch.), Lagenidae (*Cristellaria*, *Vaginulina*), Rotalidae (*Rotalia*), Nummulinidae (*Nonionina cretacea* Schl.), Textularidae (*Cuneolina conica* d'Orb., Textilaria, Textularia, *Meandropsina Vidali* Schl.), Globigerinidae.

I pochi foraminiferi specificamente determinati costituiscono un gruppo assai interessante, che corrisponde a quello caratteristico della fauna dei calcari (sabbia calcarea) di Trago di Noguera in Spagna, attribuiti al Santoniano (parte superiore del Senoniano inferiore) secondo il riferimento di SCHLUMBERGER (1).

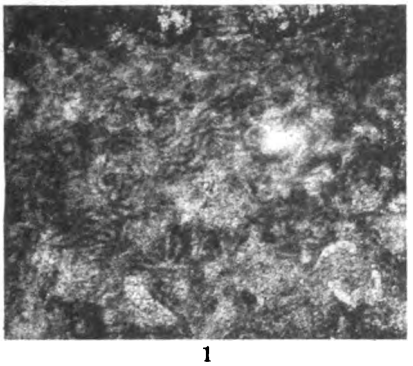
Riferendo sulla presenza di questa faunula nei calcari del Cretaceo superiore del litorale sardo occidentale, posso aggiungere ch'essa si ripresenta nella Penisola nei calcari, pure del Cretaceo superiore, di Monte Terminio e di Monte Laceno (Picentini) nell'Avellinese. e di Noicattaro in Puglia.

Le faune a foraminiferi del Cretaceo sono in complesso forse meno ben conosciute di quelle del giurassico, eppure sotto il punto di vista geologico. sono più interessanti, in quanto che presentano dei generi e dei raggruppamenti di forme assai caratteristici. Per limitarci al Cretaceo superiore, ricordiamo le Orbitoidi, sostituitesi alle Orbitoline del Cretaceo inferiore e medio, notevoli per la diffusione loro nella regione mediterranea ed anche per l'interessante fatto della persistenza di talune forme specifiche nell'Eocene inferiore (PREVER), da considerarsi come altra delle prove, che in questa regione il passaggio fra Cretaceo ed Eocene nell'ambiente marino avvenne per graduale evoluzione; ciò che spiega la difficoltà, che non di rado si presenta, di fissare un limite preciso fra l'un piano e l'altro nella serie marina, ed in particolare nella formazione della *scaglia*. Ma, se non erro, presentano notevole interesse per lo studio delle formazioni neritiche del Cretaceo superiore anche i fora-

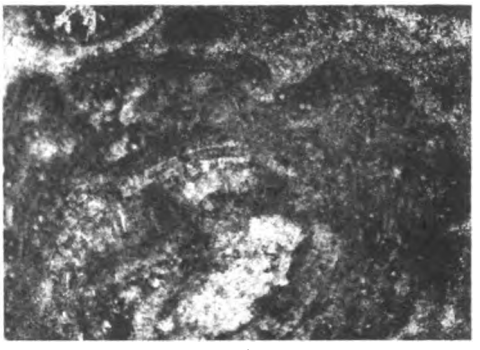
---

(1) MUNIER-CHALMAS et SCHLUMBERGER, *Note sur les Miliolidées trématophorées*, " Bull. d. l. Soc. Géol. d. Fr. „, 1884, XIII, pag. 273. — SCHLUMBERGER, *Note sur quelques Foraminif. nouv. ou peu connus du Crét. d'Espagne*, " Ibid. „, XXVII, 1899, pag. 456. — DENINGER (Nota cit., 1907, pag. 470) riconobbe in Sardegna, sopra i calcari bianchi con *Hipp. Requieni* del Turoniano superiore, i calcari bianchi e grigi con *H. Oppeli* del Senoniano inferiore e i calcari bianchi con *H. cornuvaccinum* del Senoniano superiore. L'ing. FRANCHI raccolse campioni di calcari rossicci con *Hipp.* (Orbignya) *Requieni* (Math.) e var. *resecta* presso Ovile Pilotta (Portotorres).

Digitized by Google



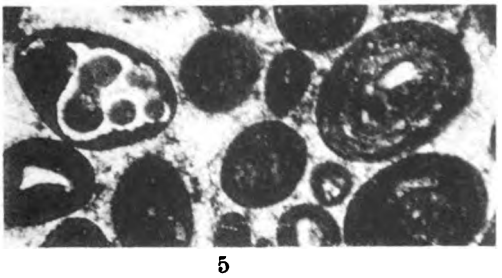
1



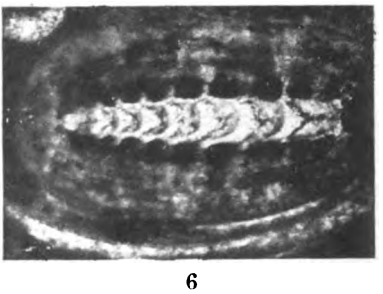
2

3

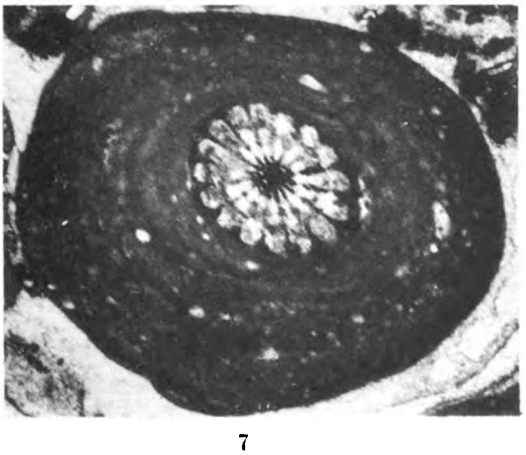
4



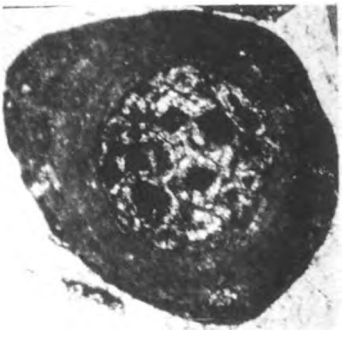
5



6



7



8

E. Forma F.t.

Off. Fototecnica Ing. Molfese Torino

Digitized by Google

Digitized by Google

miniferi trematoforati, numerosi specialmente, per quanto posso giudicare anche da mie osservazioni precedenti (1), nei calcari compatti, dove altri fossili o detriti di fossili mancano o sono assai scarsi. Se non che finora poco conosciamo e possiamo dire sulla loro diffusione nella regione mediterranea, sulla persistenza delle loro forme specifiche, e quindi sul valore di queste come documenti per i riferimenti cronologici e per stabilire i sincronismi dei calcari che le contengono. È quindi opportuno raccogliere i dati per uno studio in questo senso, a vantaggio delle conoscenze sui caratteri biologici e corologici del Cretaceo superiore.

(1) C. F. Parona, *La fauna corallig. del Cretaceo dei M. d'Ocre nell'Abruzzo Aquilano*, " Mem. p. serv. alla descr. della Carta Geol. d'Italia „, Roma, 1909, pag. 34.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

NB. Le fototipie furono eseguite su fotografie senza ritocchi.

Fig. 1, 2, 3. Struttura di alga calcare codiacea in oolite (× 120).
„ 4. Idem, dettaglio (× 160).
„ 5. Masserella oolitiforme avvolgente un piccolissimo gasteropodo (× 7)
„ 6. Idem, avvolgente un foraminifero (*Dentalina?*) (× 75).
„ 7. Idem, avvolgente un cidarite (× 30).
„ 8. Idem, con drusa di calcite (× 30).

Digitized by Google

Relazione sulla memoria del prof. G. B. Rizzo intitolata: *Sulla propagazione dei movimenti prodotti dal terremoto di Messina del 28 dicembre 1908.*

Nella memoria, che la Classe c'incaricò di esaminare, il prof. Rizzo applicò al terremoto di Messina il metodo di studio che egli aveva già applicato ai due terremoti di Calabria del 1905 e del 1907. Furono centonove le stazioni, che gli fornirono le osservazioni, e fra queste venti italiane.

Accenneremo qui brevemente alle conclusioni principali cui giunse il Rizzo.

Nelle curve odografe segnate dall'A. manca il flesso che era stato notato dallo Schmidt e che l'A. aveva riscontrato nelle curve relative ai due terremoti di Calabria. Ammettendo che la distanza di questo punto di flesso dall'origine misuri la profondità dell'ipocentro, si dovrebbe concludere che l'origine dello scotimento sia stata molto prossima alla superficie.

Fino alla distanza di 1500 chilom. dall'epicentro, la velocità misurata sulla superficie terrestre rimane costante per tutte le varie fasi delle oscillazioni sismiche. Ad una distanza maggiore, le oscillazioni spettanti ai due tremiti preliminari, penetrano nel suolo e vi si addentrano, fino a raggiungere uno strato di *massima velocità*, mentre le onde che costituiscono la fase principale continuano a propagarsi nella superficie.

Lo studio è condotto con la cura coscienziosa e la diligenza che distinguono gli altri scritti del Rizzo pubblicati nei nostri volumi, e vista anche l'importanza, che il tristissimo avvenimento dà a tali indagini, noi Vi proponiamo che la memoria sia accolta nei volumi accademici.

N. Jadanza,
A. Naccari, *relatore*.

Digitized by Google

Relazione intorno alla memoria del dott. L. COGNETTI DE MARTIIS intitolata: *Ricerche sulla distruzione normale dei prodotti sessuali maschili.*

L'A. ha fatto speciali ricerche sopra due specie di Oligocheti: *Alma Aloysii Sabaudiae* Cogn. e *Pareudrilus pallidus* Cogn. del Ruwenzori e particolarmente sopra un Mollusco (*Helix pomatia*). Egli ha potuto dimostrare nei due Oligocheti una attiva fagocitosi di spermatozoi. Nel *Pareudrilus pallidus* si tratta certamente di spermatozoi ricevuti durante l'accoppiamento, i quali vengono fagocitati in quantità grandissima. Questo fatto viene dall'A. messo in confronto con quanto dimostrarono lo Schneider e sopratutto Kovalevsky e Brumpt per gli Irudinei.

Nella *Helix pomatia*, per ciò che si riferisce alla fagocitosi intragonadiale dei prodotti seminali (spermatogoni, spermatociti, ecc.) per opera delle cosidette " *Basalzellen* „ o cellule nutritizie, l'A. ha osservato i fenomeni che si compiono nella ghiandola ermafroditica prima dell'ibernazione del mollusco, durante questa e dopo, mettendo in evidenza il fatto che l'attività spermatogenetica si assopisce durante l'ibernazione, mentre perdura la funzione fagocitaria delle cellule nutritizie e così pure la possibilità da parte di queste ultime di elaborare il materiale fagocitato, trasformandolo, in parte almeno, in corpi di forma irregolare, spesso alveolari, non anneriti dalla fissazione osmica e colorati intensamente dalla ematossilina ferrica Heidenhain.

L'A. ha pure potuto osservare che le cellule nutritizie possono sostenere spermatociti in maturazione, pur contenendo nel proprio citoplasma spermatozoi fagocitati in via di distruzione.

Per una opportuna discussione dei fatti osservati e per i necessari confronti l'A. ha tenuto conto di tutti i dati forniti dai numerosi autori che si sono occupati sia nei Vertebrati, sia negli Invertebrati, dei fenomeni in discorso, ed unisce al suo lavoro un diligente e copioso elenco bibliografico.

Il lavoro del dott. Cognetti, sia per le ricerche originali, sia per la discussione dei fenomeni osservati, è assai interessante. Esso è diligente, ben condotto, corredato di buoni e op-

Digitized by Google

portuni disegni, e porta un notevole contributo alla conoscenza dell'importante fenomeno della distruzione normale dei prodotti sessuali maschili.

I vostri commissari ne propongono la lettura alla Classe e la stampa nei volumi delle memorie accademiche.

R. Fusari,
L. Camerano, *relatore*.

Relazione sulla memoria: " *Alcune nuove Stromatopore giuresi e cretacee della Sardegna e dell'Appennino* „ della signorina Dott. G. Osimo.

I calcari del Giura superiore e del Cretaceo, specialmente nell'Appennino Centrale e Meridionale, presentano spesso avanzi di Idrozoi, che furono soltanto in parte studiati e limitatamente a certe forme di Ellipsactinidi, descritte da Steinmann e da Canavari. Ma i calcari stessi contengono altre forme, le quali, mentre differiscono notevolmente nei caratteri strutturali microscopici dalle Ellipsactinie, loro somigliano nell'aspetto esterno; ragione per cui dagli autori si dissero con Ellipsactinie dei calcari, che, pur contenendo degli Idrozoi, mancano forse di vere Ellipsactinie. Era quindi opportuno uno studio di revisione degli Idrozoi dei calcari suaccennati, nell'intento di stabilire quante e quali sono le famiglie rappresentate, di distinguere e descrivere le forme specifiche, di stabilire, per quanto è possibile, la successione loro nelle successive zone, e di verificare se e quanta importanza essi abbiano come fossili caratteristici per la determinazione cronologica delle masse appennine, così potenti e litologicamente così uniformi.

La sig.na Dr. G. Osimo si è appunto proposto questo lavoro di revisione, approfittando di materiale di studio assai copioso, e la memoria in esame è un saggio di queste sue ricerche. Pigliando occasione dallo studio di alcune nuove forme di Stromatopore del Giura e della Creta, l'A. cerca anzitutto di interpretare le varie parti dello scheletro degli Idrozoi fossili, osservando l'importanza e il significato, che assumono le varie parti scheletriche degli Idrozoi viventi. Analogamente ai viventi, cerca quindi di dividere gli Idrozoi fossili secondo una classificazione

Digitized by Google

basata essenzialmente sulla forma polipoide, o meglio sul rivestimento protettore (chitinoso o calcareo) delle forme polipoidi di tali organismi. Le forme fossili vengono così divise anzitutto nei due grandi gruppi delle Idrocoralline e delle Tubularidi, gruppi che forse possono già iniziarsi fin dalle forme paleozoiche, le quali non si devono considerare come formanti un gruppo a sè, estinto nel Paleozoico, ma che si continuano invece e si modificano nelle forme più recenti.

Il genere *Stromatopora* sopravvive infatti nel Mesozoico, e presenta parecchie forme nel Trias, nel Giura e nella Creta. Una delle forme illustrate in questo lavoro fu già imperfettamente descritta e figurata dal DENINGER fra i fossili del Dogger della Nurra in Sardegna. Insieme con questa, nella località di Pinette d'Elva presso Portotorres, l'A. trova un'altra forma nuova (*Stromatopora Franchii*), che presenta caratteri di stretta affinità con una *Stromatopora* paleozoica. Le altre forme descritte sono affatto nuove e provengono dalla Creta dell'Appennino (*Stromatop. Virgilioi* di Cimino d'Acquaviva in Puglia, *Stromat. Saccoi* di Ofena presso Calascio nell'Abruzzo Aquilano, *Stromatop. Costai* proveniente da località indeterminata del Gargano).

Come risulta da questi brevi cenni, il lavoro della signorina OSIMO non è una semplice descrizione di forme; ha carattere paleontologico ed insieme geologico, ed è notevole segnatamente per la critica al procedimento finora seguito nello studio degli Idrozoi fossili, e per la discussione sull'importanza dei confronti degli avanzi fossili colle parti scheletriche degli Idrozoi viventi, come base per uno studio razionale e scientifico.

La breve memoria è il risultato di un lungo studio, difficile per la novità dell'argomento, e che richiese un delicato lavoro per la preparazione di numerose sezioni sottili opportunamente orientate, indispensabili per l'esame al microscopio. In considerazione del buon indirizzo, della originalità ed opportunità del lavoro della sig.na OSIMO e degli interessanti risultati in esso esposti, noi lo riteniamo degno della stampa nei volumi delle Memorie e lo raccomandiamo all'approvazione della Classe.

L. CAMERANO,
C. F. PARONA, *relatore*.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

Digitized by Google

INDICE

DEL VOLUME XLV

ELENCO degli Accademici residenti, Nazionali non residenti, Stranieri e Corrispondenti al 31 Dicembre 1909 . . . . . *Pag.* III
Pubblicazioni periodiche ricevute dall'Accademia dal 1° Gennaio al 31 Dicembre 1909 . . . . . „ XXV

ADUNANZE.
Sunti degli Atti verbali delle Adunanze a Classi Unite . *Pag.* 179, 223, 382, 413, 447.
Sunti degli Atti verbali della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali . . . . . „ 1, 27, 91, 117, 120, 135, 190, 225, 261, 314, 321, 395, 415, 448, 471.
COMMEMORAZIONI E BIOGRAFIE.
GIACINTO MORERA. Commemorazione letta dal Socio Carlo SOMIGLIANA . . . . . „ 383
STANISLAO CANNIZZARO. Parole commemorative del Socio Michele FILETI . . . . . „ 419
ELEZIONI.
Elezione del Presidente e del Vice Presidente . 382, 414, 446, 448
Elezioni di Soci della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali . . . . . „ 416
Elezioni di Soci Corrispondenti 416, 417, 418
Elezioni a cariche:
— del Segretario . . . . . „ 473
CONGRESSI.
Congrès Scientifique international américain di Buenos Aires „ 314
IX^e Congrès Géologique international di Stoccolma . . „ 314
INVITO al Congresso internazionale di Botanica a Bruxelles . „ 2
— a sottoscrivere per un ricordo a V. CERRUTI . . . „ 2
ONORANZE ad Amedeo AVOGADRO:
Aggiunta del Socio Tesoriere dell'Accademia e dei Sindaci di Torino e Biella nel Comitato internazionale . . . „ 1
Adesione alle onoranze a Camillo CAVOUR . . . . „ 415
Adesione alle onoranze al prof. Guglielmo KOERNER . . „ 415
PREMIO BRESSA:
Relazione intorno al XVI premio . . . . . „ 181
Conferimento del XVI premio . . . . . „ 223
Nomina della 1ª Giunta pel XVII premio (Internazionale, quadriennio 1907-1910) . . . . . „ 223

Digitized by Google

PREMIO GAUTIERI:
Avviso del premio per la Storia per il triennio 1907-1910 *Pag.* 135
Relazione intorno al premio di Filosofia (triennio 1906-1908) „ 186
Conferimento del premio di Filosofia per il triennio 1906-1908 „ 223

AIMONETTI (Cesare) — Una nuova maniera di costruire i livelli a cannocchiale . . . . . *Pag.* 474
ARDISSONE (Francesco) — V. D'OVIDIO (E.).
BACCARINI (Pasquale) — Eletto Socio corrispondente . . . „ 418
— Ringrazia per la sua nomina . . . . . „ 471
BAEYER (Adolfo v.) — Eletto Socio straniero . . . . . „ 416
BALBIANO (Luigi) — Eletto Socio nazionale residente . . . „ 416
BATTELLI (Angelo) — Eletto Socio corrispondente . . . „ 417
— Ringrazia per la sua nomina . . . . . „ 471
BOCCARDI (Giovanni) — V. JADANZA (N.) e NACCARI (A.).
BOGGIO (Tommaso) — Dimostrazione assoluta delle equazioni classiche dell'Idrodinamica . . . . . „ 153
BOSELLI (S. E. Paolo) — Ringrazia l'Accademia per l'interessamento preso alla salute della sua signora . . . . . „ 314
— Eletto Presidente dell'Accademia . . . . . „ 382
— Rivolge parole di condoglianza al Socio SALVADORI per la morte del padre . . . . . „ 471
— Partecipa l'approvazione sovrana delle nomine del Socio nazionale residente e dei Soci stranieri . . . . . „ 471
BOTTI (Luigi) — Di alcuni fenomeni di grandezza apparente, di distanza e di prospettiva . . . . . „ 450
BOUSSINESQ (Valentino) — Eletto Socio corrispondente . . „ 417
— Ringrazia per la sua nomina . . . . . „ 471
BRUNI (Cesare) — Sui primi stadi di sviluppo della colonna vertebrale dei Rettili e degli Uccelli . . . . . „ 506
BURALI-FORTI (C.) — Sulla Geometria differenziale assoluta delle congruenze e dei complessi rettilinei . . . . . „ 4
— Gradiente, rotazione e divergenza in una superficie . . „ 242
CAMERANO (Lorenzo) — Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* un lavoro del Dr. E. ZAVATTARI, intitolato: *I muscoli ioidei dei Sauri in rapporto con i muscoli ioidei degli altri vertebrati.* Parte 2ª: *Ricerche morfologiche* . . . . „ 3
— Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* un suo lavoro intitolato: *Franco Andrea Bonelli e i suoi concetti evoluzionistici* . . . . . „ 3
— e FUSARI (Romeo) — Relazione intorno alla Memoria del Dr. E. ZAVATTARI, intitolata: *I muscoli ioidei dei Sauri in rapporto con i muscoli ioidei degli altri Vertebrati.* Parte seconda . . . „ 113
— Relazione intorno al XVI premio Bressa . . . . . „ 181

Digitized by Google

Camerano (Lorenzo) — Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche un lavoro del Dr. Luigi Cognetti de Martiis, intitolato: *Ricerche sulla distruzione normale dei prodotti sessuali maschili* . . . . . *Pag.* 449
— e Fusari (Romeo) — Relazione sulla Memoria del Dr. Luigi Cognetti de Martiis, intitolata: *Ricerche sulla distruzione normale dei prodotti sessuali maschili* . . . . . „ 525
— Eletto Vice Presidente dell'Accademia . . . . . „ 447
— V. Fusari (R.) e Camerano (L.).
— V. Parona (C. F.) e Camerano (L.).
Campetti (A.) e Delgrosso (C.) — V. Naccari (A.) e Grassi (G.).
Cannizzaro (Stanislao) — V. D'Ovidio (E.), V. Fileti (M.).
Cantone (Michele) — Eletto Socio corrispondente . . . . „ 417
— Ringrazia per la sua nomina. . . . . „ 471
Carnevali (F.) — V. Giolitti (F.) e Carnevali (F.).
Casu (Angelo) — V. Mattirolo (O.) e Parona (C. F.).
Cavalli (Ernesto) — Eletto Socio corrispondente . . . . „ 417
— Ringrazia per la sua nomina. . . . . „ 471
Cerulli (Vincenzo) — Eletto Socio corrispondente . . . . „ 417
— Ringrazia per la sua nomina. . . . . „ 471
Charrier (G.) — Azione del calore sugli o-amidoazocomposti . „ 105
Chinaglia (Leopoldo) — Dell' influenza esercitata dalla temperatura sull'apprezzamento di oggetti posti sopra la nostra pelle „ 210
Cicconetti (G.) — Latitudine astronomica della Specola geodetica della R. Università di Napoli determinata nel 1909 . . „ 143
Cognetti de Martiis (Luigi) — Contributo alla conoscenza della fecondazione degli Oligocheti . . . . . „ 493
— V. Camerano (L.) e Fusari (R.).
Colomba (Luigi) — Sopra alcuni minerali dell'alta Valle di Aosta „ 399
Colonnetti (Gustavo) — Sulla trattazione grafica della trave continua „ 121
Croce (Benedetto) e Gentile (Giovanni) — È conferito loro il premio Gautieri per la filosofia (triennio 1906-1908) . . . . „ 223
— Ringraziano per il premio Gautieri 225, 339
Darwin (Sir Giorgio Howard) — Eletto Socio corrispondente . „ 417
— Ringrazia per la sua nomina. . . . . „ 471
Delgrosso (C.) — V. Campetti e Delgrosso (C.).
Dell'Agnola (Carlo Alberto) — Sul teorema di Borel . . . „ 23
D'Ercole (Pasquale) — Relazione intorno al premio Gautieri per la Filosofia (triennio 1906-1908) . . . . . „ 186
Dezani (Serafino) — Contributo allo studio della pepsina . . „ 136
D'Ovidio (Enrico) — Partecipa la morte avvenuta del Socio corrispondente Simone Newcomb e di Valentino Cerruti . „ 1
— Dà conto dei lavori del Comitato per le Onoranze ad Amedeo Avogadro . . . . . „ 1
— Partecipa la morte del Presidente del Club Alpino Italiano avv. A. Grober . . . . . „ 117

Digitized by Google

D'Ovidio (Enrico) — Partecipa i ringraziamenti della famiglia Newcomb e della signora Grober . . . . . *Pag.* 120
— Partecipa la morte del Socio corrispondente Federico Kohlrausch . 190
— Legge il telegramma inviato dal Vice Presidente Boselli col quale ringrazia degli auguri 314, 382
— Partecipa la morte del Socio corrispondente prof. Francesco Ardissone . . . . . „ 321
— Partecipa d'aver aderito all'invito avuto dal Sindaco di Torino di far parte del Comitato per le Onoranze a Camillo Cavour . 413.
— Partecipa d'aver aderito alle Onoranze del Prof. Guglielmo Koerner . . . . . „ 415
— Partecipa la morte del Socio nazionale non residente Stanislao Cannizzaro . . . . . „ 415
— Incaricato di fare a nome della Classe condoglianze al Socio Peano per la morte della madre . . . . . „ 448
— Partecipa i ringraziamenti della famiglia Cannizzaro per la parte presa al lutto che l'ha colpita . . . . . „ 448
Ehrlich (Paolo) — Eletto Socio corrispondente . . . . . „ 418
Engler (Carlo) — Eletto Socio corrispondente . . . . . „ 417
Enriques (Federigo) — Eletto Socio corrispondente . . . . „ 416
— Ringrazia per la sua nomina . . . . . „ 471
Fileti (Michele) — Commemorazione di Stanislao Cannizzaro . „ 419
Fino (Vincenzo) — Brucite di Viù . . . . . „ 323
Foà (Pio) — Note di ematologia . . . . . „ 51
— Ricorda la morte del Dr. Roberto Kock . . . . . „ 448
— V. Mosso (A.) e Foà (P.).
Fusari (Romeo) — Presenta per la stampa nei volumi delle *Memorie* accademiche un lavoro del Dr. A. Civalleri, intitolato: *Sullo sviluppo della guaina midollare nelle fibre nervose centrali* „ 416
— e Camerano (L.) Relazione intorno alla Memoria del Dr. A. Civalleri, intitolata: *Sullo sviluppo della guaina midollare nelle fibre nervose centrali* . . . . . „ 469
— V. Camerano (L.) e Fusari (R.).
Gambèra (Pietro) — Alcune conseguenze dedotte dalla ipotesi moderna sulla entità del calorico e della temperatura . „ 373
Garbasso (Antonio) — Eletto Socio corrispondente . . . . „ 417
— Ringrazia per la sua nomina . . . . . „ 471
Gentile (Giovanni) — V. Croce (B.) e Gentile (G.).
Ghiglieno (Mario) — Su alcuni nuovi derivati trimetilenpirrolici. Nota I e II 200, 271
Giolitti (F.) e Carnevali (F.) — Ricerche sulla fabbricazione dell'acciaio cementato. V. Cementazione con gas fortemente compressi . . . . . „ 191
Giolitti (F.) e Carnevali (F.) — Ricerche sulla fabbricazione dell'acciaio cementato. VI. Cementazione di acciai ad alto tenore

Digitized by Google

di carbonio, coi gas alla pressione atmosferica e a pressione ridotta . . . . . *Pag.* 230

Giolitti (F.) e Tavanti (G.) — Sulla fabbricazione dell'acciaio cementato. VII. Studio di un processo di cementazione fondato sull'azione specifica dell'ossido di carbonio . . . . . „ 349

Gramegna (Maria) — Serie di equazioni differenziali lineari ed equazioni integro-differenziali . . . . . „ 391

Grassi (Guido) — Raddoppiamento della frequenza di una corrente per mezzo di lampade a filo metallico . . . . . „ 396

— Sul raddoppiamento di frequenza di una corrente per mezzo di lampade a filamento metallico . . . . . „ 465

— V. Naccari (A.) e Grassi (G.).

Grober (Antonio) — V. D'Ovidio (E.).

Guareschi (Icilio) — Daniele Bernoulli ed Amedeo Avogadro e la teoria cinetica dei gas . . . . . „ 423

Guccia (G. B.) — Eletto Socio corrispondente . . . . . „ 417

— Ringrazia per la sua nomina . . . . . „ 471

Guidi (Camillo) — Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* uno scritto dell'Ing. Gustavo Colonnetti, intitolato: *I sistemi elastici continui trattati col metodo delle linee d'influenza* . „ 395

— e Segre (Corrado) — Relazione sulla memoria dell'ing. G. Colonnetti, che ha per titolo: *I sistemi elastici continui trattati col metodo delle linee d'influenza* . . . . . „ 445

Haller (Albin) — Eletto Socio corrispondente . . . . . „ 417

— Ringrazia per la sua nomina . . . . . „ 471

Jadanza (Nicodemo) — Determinazione delle costanti in un cannocchiale distanziometro . . . . . „ 315

— e Naccari (Andrea) — Relazione intorno alla Memoria del Prof. Giovanni Boccardi, intitolata: *Passaggi meridiani del pianeta Marte osserrati nella opposizione del 1909* . . . . . „ 118

— V. Naccari (A.) e Jadanza (N.).

Kilian (Wilfrid Carlo) — Eletto Socio corrispondente . . . „ 418

— Ringrazia per la sua nomina . . . . . „ 471

Koerner (Guglielmo) — V. D'Ovidio (E.).

Kolhrausch (Federico) — V. D'Ovidio (E.).

Kossel (Albrecht) — Eletto Socio corrispondente . . . . „ 418

— Ringrazia per la sua nomina . . . . . „ 471

Lacroix (Alfredo) — Eletto Socio corrispondente . . . . „ 418

— Ringrazia per la sua nomina . . . . . „ 471

Laura (E.) — V. Somigliana (C.) e Naccari (A.).

Lenchantin De Gubernatis (Massimo) — V. Stampini (E.) e De Sanctis (G.).

Levi-Civita (Tullio) — Eletto Socio corrispondente . . . . „ 418

— Ringrazia per la sua nomina . . . . . „ 471

Lincio (Gabriele) — Di alcuni minerali dell'Alpe Veglia . . „ 484

Mangin (Luigi) — Eletto Socio corrispondente . . . . . „ 418

— Ringrazia per la sua nomina . . . . . „ 471

Martel (E.) — V. Mattirolo (O.) e Parona (C. F.).

Digitized by Google

MATTIROLO (Oreste) — Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* un lavoro del prof. E. MARTEL, col titolo: *Contribuzione alla lichenologia del Piemonte* . . . . . *Pag.* 27
— Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* un lavoro del Dr. Angelo CASU, intitolato: *Lo Stagno di S.ta Gilla (Cagliari) e la sua vegetaziane.* Parte I . . . . . „ 314
— e PARONA (Carlo Fabrizio) — Relazione intorno alla Memoria presentata dal Prof. E. MARTEL che ha per titolo: *Contribuzione alla Lichenologia del Piemonte* . . . . . „ 115
— — Relazione sul lavoro del Dr. A. CASU, dal titolo: *Lo Stagno di S.ta Gilla (Cagliari) e la sua vejetazione* . . . . „ 379
MENTCHNIKOFF (E.) — Eletto Socio corrispondente . . . . „ 418
MEYER (Ernesto v.) — Eletto Socio corrispondente . . . . „ 417
— Ringrazia per la sua nomina . . . . . „ 471
MORERA (Giacinto) — V. SOMIGLIANA (Carlo).
MOSSO (Angelo) — Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* un lavoro del Dr. Mario PONZO, intitolato: *Studio della localizzazione delle sensazioni cutanee di dolore* . . . . „ 27
— e FOÀ (Pio) — Relazione intorno al lavoro del Dr. Mario PONZO: *Studio della localizzazione delle sensazioni cutanee di dolore* „ 114
NACCARI (A.) — Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* un lavoro del prof. G. BOCCARDI, intitolato: *Passaggi meridiani del pianeta Marte osservati nell'opposizione del 1909* . . „ 90
— Presenta per la pubblicazione le Osservazioni meteorologiche fatte all'Osservatorio della R. Università di Torino nel 1909 „ 226
— Eletto Vice Presidente dell'Accademia . . . . . „ 382
— Ringrazia e rinuncia alla carica . . . . . „ 413
— Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* un lavoro dei sigg. A. CAMPETTI e C. DELGROSSO col titolo: *Sull'equilibrio di coppie di liquidi parzialmente miscibili* . . . . . „ 395
— e GRASSI (G.) — Relazione sulla memoria dei sigg. A. CAMPETTI e C. DELGROSSO, intitolata: *Sull'equilibrio di coppie di liquidi parzialmente miscibili* . . . . . „ 444
— Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* un lavoro del Prof. G. B. RIZZO, intitolato: *Sulla propagazione dei movimenti prodotti dal terremoto di Messina del 28 dicembre 1908* „ 449
— e JADANZA (N.) — Relazione sulla Memoria del Prof. G. B. RIZZO, intitolata: *Sulla propagazione dei movimenti prodotti dal terremoto di Messina del 28 dicembre 1908* . . . . . „ 524
— V. JADANZA (N.) e NACCARI (A.).
— V. SOMIGLIANA (C.) e NACCARI (A.).
NEUMANN (Carlo) — Eletto Socio corrispondente . . . . „ 417
— Ringrazia per la sua nomina . . . . . „ 471
— NEWCOMB (Simone) — V. D'OVIDIO (E.).
NOETHER (Massimiliano) — Eletto Socio straniero . . . . „ 416
OSIMO (G.) — V. PARONA (C. F.) e CAMERANO (L.).
PANETTI (Modesto) — Teoria e calcolo delle molle discoidali . „ 166

Digitized by Google

PARONA (Carlo Fabrizio) — Esposizione finanziaria dell'esercizio 1909 e bilancio preventivo per il 1910 e gestione dei lasciti Bressa, Gautieri, Vallauri e Pollini . . . . . *Pag.* 447
— A proposito dei caratteri micropaleontologici di alcuni calcari mesozoici della Nurra in Sardegna . . . . . „ 514
— Presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* il lavoro della sig.na G. OSIMO, intitolato: *Alcune nuove Stromatopore giuresi e cretacee della Sardegna e dell'Appennino* . . . . . „ 449
— Relazione sulla Memoria della sig.na G. OSIMO su *Alcune nuove Stromatopore giuresi e cretacee della Sardegna e dell'Appennino* „ 526
— V. MATTIROLO (O.) e PARONA (C. F.).
PIOLTI (Giuseppe) — Sintesi dell'anglesite . . . . . „ 227
PONZIO (G.) — Sulla sostituibilità del nitrogruppo . . . . „ 129
PONZO (Mario) — V. MOSSO (A.) e FOÀ (P.).
PORENA (F.) — V. D'OVIDIO (E.).
RAMON Y CAJAL (Santiago) — Eletto Socio corrispondente . . „ 418
RIZZO (G. B.) — V. NACCARI (A.) e JADANZA (N.).
ROCCATI (Alessandro) — Ricerche petrografiche sulle Valli del Gesso. Aplite del Lago delle Rovine. I suoi fenomeni di contatto ed i suoi inclusi . . . . . „ 326
ROMANO (Santi) — V. BRONDI (V.).
SALVADORI (Tommaso) — Eletto Vice Presidente dell'Accademia „ 414
— Ringrazia e rinuncia alla carica . . . . . „ 447
SANNIA (Gustavo) — Sull'inviluppata media di una congruenza di rette „ 28
SANTANGELO (G. B.) — Su di una estensione del teorema di Habich „ 254
SCHIAPARELLI (Ernesto) — Gli è conferito il XVI premio Bressa „ 223
— Ringrazia per il conferitogli XVI premio Bressa . . . 225, 339
SCORZA (G.) — Sulle varietà di Segre . . . . . „ 93
SEGRE (Corrado) — Eletto alla carica triennale di Socio segretario „ 473
SOMIGLIANA (Carlo) — Commemorazione di Giacinto Morera . „ 383
— e NACCARI (Andrea) — Relazione sulla Memoria del Dr. E. LAURA: *Sopra i moti armonici semplici e smorzati di un mezzo elastico, omogeneo, isotropo* . . . . . „ 25
SPEZIA (Giorgio) — Sopra alcuni presunti effetti chimici e fisici della pressione uniforme in tutti i sensi . . . . . „ 335
SUESS (Federico Edoardo) — Eletto Socio straniero . . . . „ 416
TAVANTI (G.) — V. GIOLITTI (F.) e TAVANTI (G.).
THOMSON (Gio. Giuseppe) — Eletto Socio straniero . . . . „ 416
VOGLINO (Piero) — Ricerche intorno alla " Sclerotinia Ocymi „ n. sp. parassita del " Basilico „ . . . . . „ 263
WILLSTAETER (Richard) — Eletto Socio corrispondente . . „ 417
— Ringrazia per la sua nomina . . . . . „ 471
ZAVATTARI (E.) — V. CAMERANO (L.) e FUSARI (R.).
ZEEMANN (Pietro) — Eletto Socio corrispondente. . . . . „ 417
— Ringrazia per la sua nomina. . . . . „ 471

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MINNESOTA
3 1951 D00 000 950 4

Minnesota Library Access Center
9 ZA R08 D54 S11 TI C

Digitized by Google